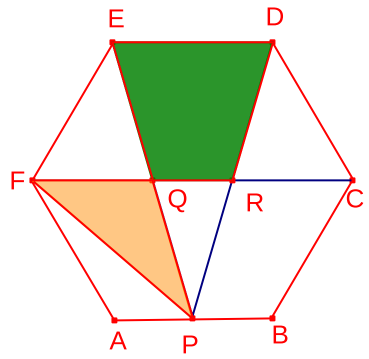
SOLUCIONES OCTUBRE 2019

PROBLEMAS PARA UTILIZAR PROGRAMAS GEOMÉTRICOS. Autor: Ricard Peiró i Estruch. IES “Abastos”. València

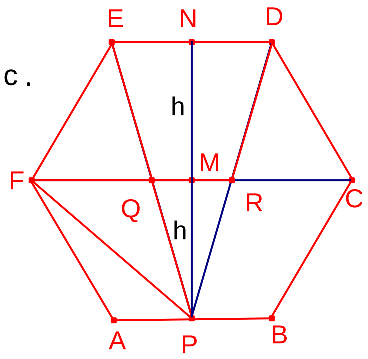


Octubre 1-2: Sea el hexágono regular ABCDEF. Sea P el punto medio del lado $\overline{AB}$.

El segmento $\overline{EP}$ corta la diagonal $\overline{FC}$ en el punto Q. El segmento $\overline{EP}$ corta la diagonal $\overline{FC}$ en el punto R.

Calculad la proporción entre las áreas del cuadrilátero DEQR y del triángulo $\overset{\Delta}{FPQ}$.

Solución: Sea $\overline{AB} = c$ el lado del hexágono regular ABCDEF.
Sea M el punto medio de la diagonal $\overline{FC}$, M es el centro del hexágono.
$\overline{MF} = \overline{MC} = c$. Sea N el punto medio del lado $\overline{DE}$. Sea $h = \overline{PM} = \overline{MN}$.
$\overline{QR}$ es paralela mediana del triángulo $\overset{\Delta}{DEP}$. Entonces, $\overline{QR} = \frac{1}{2}\overline{DE} = \frac{1}{2}c$.



$$\overline{FQ} = \frac{\overline{FC} - \overline{QR}}{2} = \frac{2c - \frac{1}{2}c}{2} = \frac{3}{4}c.$$

El área del trapecio DEQR es:

$$S_{DEQR} = \frac{c + \frac{1}{2}c}{2}h = \frac{3}{4}ch.$$

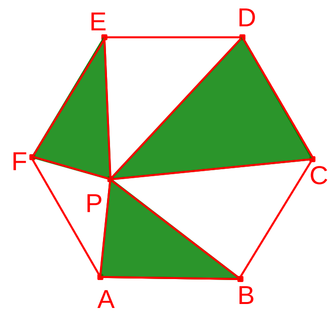
El área del triángulo $\overset{\Delta}{FPQ}$ es:

$$S_{FPQ} = \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}c\cdot h = \frac{3}{8}ch.$$

La proporción entre las áreas del cuadrilátero DEQR y del triángulo $\overset{\Delta}{FPQ}$ es:

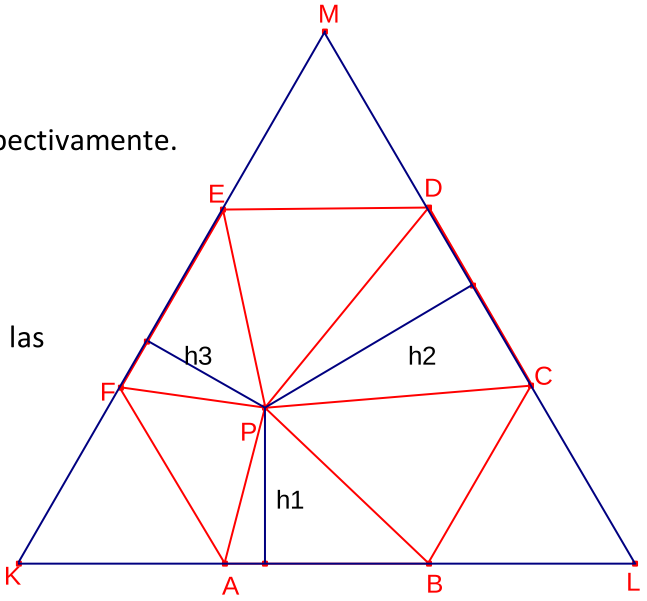
$$\frac{S_{DEQR}}{S_{FPQ}} = \frac{\frac{3}{4}ch}{\frac{3}{8}ch} = 2.$$

Octubre 3-4: Sea P un punto interior de un hexágono regular. Unimos el punto P con los vértices del hexágono regular formando 6 triángulos. Pintamos los triángulos alternativamente de verde y blanco. Probad que la suma de las áreas pintadas de verde es igual a la suma de las áreas pintadas de blanco.



Solución: Sea ABCDEF el hexágono regular de lado $\overline{AB} = c$. El área del hexágono regular ABCDE es:

$$S_{ABCDEF} = 6\left(\frac{\sqrt{3}}{4}c^2\right) = \frac{3\sqrt{3}}{2}c^2.$$



Sean h_1, h_2, h_3 las distancias de O a los lados $\overline{AB}, \overline{CD}, \overline{EF}$, respectivamente.

La suma de las áreas de los triángulos $\overset{\Delta}{ABP}$, $\overset{\Delta}{CDP}$, $\overset{\Delta}{EFP}$ es:

$$S_{verd} = \frac{1}{2}(h_1 + h_2 + h_3)c \qquad (1)$$

Dibujamos las rectas AB, CD, y EF. La intersección dos a dos de las rectas forman el triángulo equilátero $\overset{\Delta}{KLM}$:

$$\overline{KL} = 3c.$$

El área del triángulo equilátero $\overset{\Delta}{KLM}$ es igual a la suma de los triángulos $\overset{\Delta}{KLP}$, $\overset{\Delta}{LMP}$, $\overset{\Delta}{KMP}$:

$$S_{KLM} = \frac{\sqrt{3}}{4}(3c)^2 = \frac{1}{2}(h_1 + h_2 + h_3)3c.$$

$$\frac{1}{2}(h_1 + h_2 + h_3) = \frac{3\sqrt{3}}{4}c \qquad (2).$$

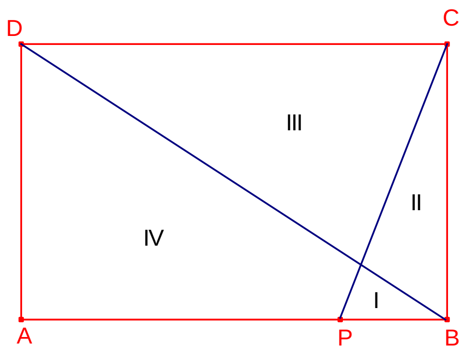
Sustituyendo la expresión (2) en la expresión (1):

$$S_{verd} = \frac{1}{2}(h_1 + h_2 + h_3)c = \frac{3\sqrt{3}}{4}c^2.$$

Entonces,

$$S_{verd} = \frac{1}{2}S_{ABCDEF}.$$

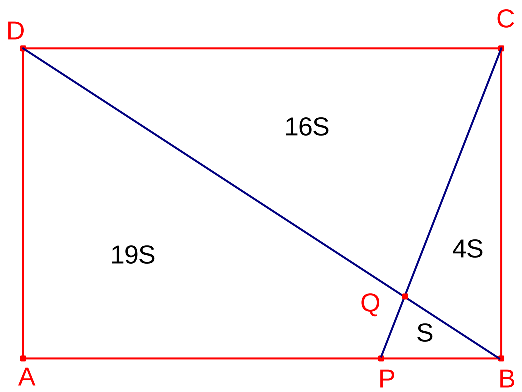
Por tanto, la suma de las áreas pintadas de verde es igual a la suma de las áreas pintadas de blanco.



Octubre 5-6: Sea el rectángulo ABCD de área 120. Sea P el punto del lado $\overline{AB}$ tal que $\overline{AP} = \frac{3}{4}\overline{AB}$. Los segmentos $\overline{BD}$, $\overline{CP}$ dividen el rectángulo ABCD en cuatro partes. Determinad el área de las cuatro partes.

Solución: Sea S el área del triángulo $\overset{\Delta}{PBQ}$.

$$\overline{BP} = \frac{1}{4}\overline{AB}$$



Sea Q la intersección de los segmentos $\overline{BD}$, $\overline{CP}$.

Los triángulos $\overset{\Delta}{PBQ}$ y $\overset{\Delta}{CDQ}$ son semejantes y de razón 1:4.
La proporción de las áreas es:

$$\frac{S_{PBQ}}{S_{CDQ}} = \left(\frac{1}{4}\right)^2.$$

Entonces:

$$S_{CDQ} = 16 \cdot S.$$

$$PQ = \frac{1}{4}\overline{CQ}$$

Los triángulos $\overset{\Delta}{PBQ}$ y $\overset{\Delta}{CQB}$ tienen la misma altura, las áreas son proporcionales a las bases:

$$\frac{S_{PBQ}}{S_{CQB}} = \frac{\overline{PQ}}{\overline{CQ}} = \frac{1}{4}.$$

Entonces:

$$S_{CQB} = 4 \cdot S.$$

$$S_{BCD} = S_{CDQ} + S_{CQB} = 20S = \frac{1}{2}120 = 60.$$

$$S = 3.$$

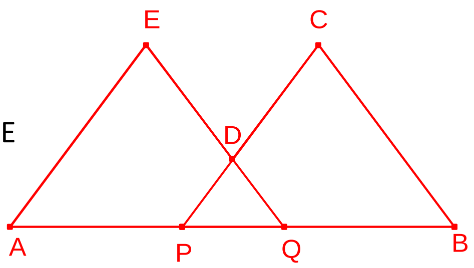
$$S_{CDQ} = 16 \cdot S = 48.$$

$$S_{CQB} = 4 \cdot S = 12.$$

$$S_{APQD} = 19 \cdot S = 57.$$

<u>Octubre 7-8:</u> En la figura, $\overline{AE} = \overline{EQ} = \overline{BC} = \overline{CP} = 10$, $\overline{AQ} = \overline{BP} = 12$.

Los puntos A, P, Q i B están alineados. Si el perímetro del pentágono ABCDE es 52, calculad su área.



<u>Solución:</u> Los triángulos isósceles $\overset{\Delta}{AEQ}$, $\overset{\Delta}{PCB}$ son iguales.

Los triángulos $\overset{\Delta}{AEQ}$, $\overset{\Delta}{PBD}$ son semejantes. Sea $\overline{PQ} = x$.

$$\overline{PD} = \frac{\overline{AE}}{\overline{AQ}}x = \frac{5}{6}x.$$

$$\overline{DE} = \overline{DC} = 10 - \frac{5}{6}x.$$

El perímetro del pentágono ABCDE es 52:

$$64 - \frac{5}{6}x = 52.$$

Resolviendo la ecuación:

$$x = \frac{9}{2}.$$

Aplicando la fórmula de Herón, el área del triángulo $\overset{\Delta}{AEQ}$ es:

$$S_{AEQ} = \frac{\sqrt{32 \cdot 8 \cdot 12 \cdot 12}}{4} = 48.$$

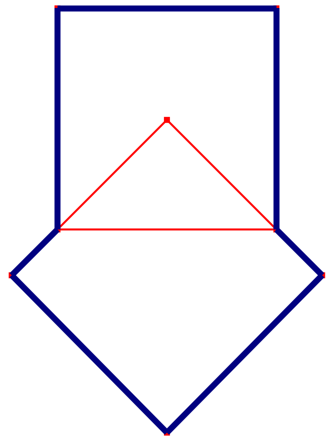
$$\frac{S_{PDQ}}{S_{AEQ}} = \left(\frac{\overline{PQ}}{\overline{AQ}}\right)^2 = \left(\frac{3}{8}\right)^2.$$

$$S_{PDQ} = \frac{9}{64}48 = \frac{27}{4}.$$

El área del pentágono ABCDE es:

$$S_{ABCDE} = 2 \cdot S_{AEQ} - S_{PDQ} = 2 \cdot 48 - \frac{27}{4} = \frac{357}{4}.$$

<u>Octubre 9-10:</u> En la figura, los cuadrados son iguales de lado 10.
El centro del cuadrado superior es un vértice del cuadrado inferior. Dos vértices del cuadrado superior pertenecen al cuadrado inferior. Calculad el área y el perímetro del polígono exterior que forman los dos cuadrados.



<u>Solución</u>: Sea ABCDEFG el polígono exterior que forman los cuadrados ABCG y ODEF.
El área del polígono es igual al área de dos cuadrados de lado 10 menos el área del triángulo $\overset{\Delta}{OCG}$ cuya área es la cuarta parte del cuadrado de lado 10.

$$S_{ABCDEFG} = 2 \cdot 10^2 - \frac{1}{4} \cdot 10^2 = 175 \text{ .}$$

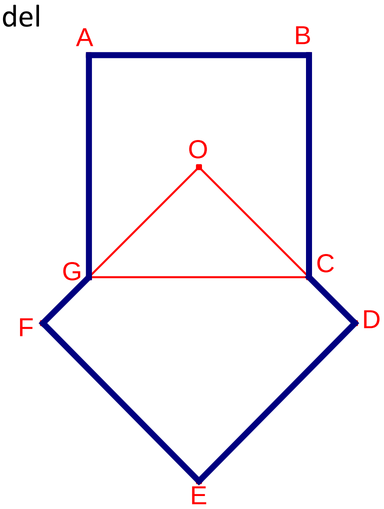
Aplicando el teorema de Pitágoras al triángulo rectángulo isósceles $\overset{\Delta}{OCG}$:

$$\overline{OC} = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot 10 = 5\sqrt{2} \text{ .}$$

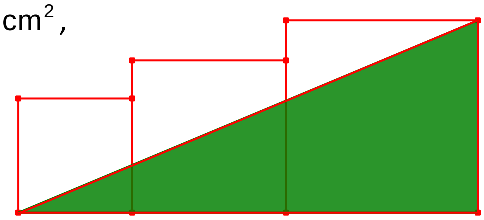
$$\overline{CD} = 10 - \overline{OC} = 10 - 5\sqrt{2} \text{ .}$$

El perímetro del polígono es:

$$P_{ABCDEFG} = 5 \cdot \overline{AB} + 2 \cdot \overline{CD} = 5 \cdot 10 + 2\left(10 - 5\sqrt{2}\right) = 70 - 10\sqrt{2} \text{ .}$$



<u>Octubre 11-12:</u> En la figura hay dibujados 3 cuadrados de áreas 9 cm^2, 16 cm^2 i 25 cm^2. Calculad la proporción entre el área de la zona coloreada i la de la zona no coloreada.

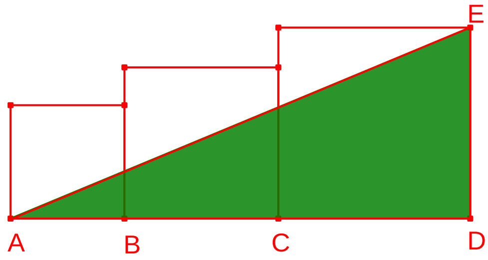


<u>Solución:</u> El lado del cuadrado pequeño es $\overline{AB} = 3 \text{ cm}$.
El lado del cuadrado mediano es $\overline{BC} = 4 \text{ cm}$.
El lado del cuadrado grande es $\overline{CD} = \overline{DE} = 5 \text{ cm}$.

$$\overline{AD} = 12 \text{ cm} .$$

El área de la zona coloreada es:

$$S_{ADE} = \frac{1}{2} 12 \cdot 5 = 30 \text{ cm}^2 .$$

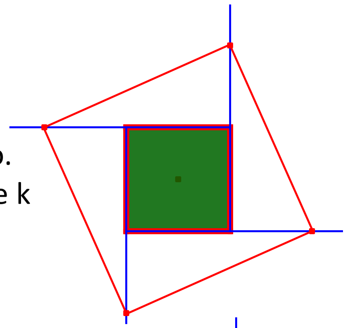


El área de la zona no coloreada es igual a la suma de las áreas de los tres triángulos menos el área de la zona coloreada:

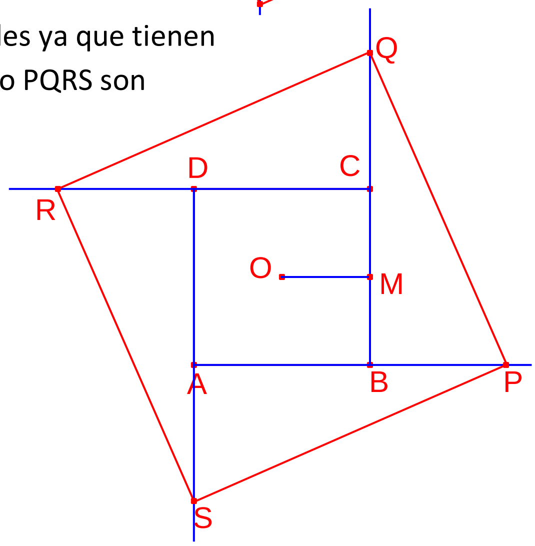
$$S_{blanc} = (9 + 16 + 25) - 30 = 20 \text{ cm}^2 .$$

La proporción entre las áreas de la zona coloreada i la zona blanca es:

$$\frac{S_{ADE}}{S_{blanc}} = \frac{30}{20} = \frac{3}{2} .$$



<u>Octubre 13-20:</u> Dado un cuadrado de lado a, prolongamos los lados, en el mismo sentido, una magnitud ka. Demostrad que el cuadrilátero formado es un cuadrado. Demostrad que los dos cuadrados tienen el mismo centro. Determinad el valor de k para que la proporción de las áreas sea 3.



<u>Solución:</u> Los triángulos rectángulos $\overset{\Delta}{ASP}$, $\overset{\Delta}{BPQ}$, $\overset{\Delta}{CQR}$, $\overset{\Delta}{DRS}$ son iguales ya que tienen iguales los catetos correspondientes. Entonces, los lados del cuadrilátero PQRS son iguales. Siga $\alpha = \angle APS = \angle BQP$.

Entonces,

$$\angle BPQ = 90º - \alpha .$$

$$\angle SPQ = \angle APS + \angle BPQ = 90º$$

Análogamente los ángulos Q, R, S del cuadrilátero PQTS son rectos. Entonces, PQRS es un cuadrado. Aplicando el teorema de Pitágoras al triángulo rectángulo $\overset{\Delta}{BPQ}$, calculemos las medidas del cuadrado PQRS:

$$\overline{PQ}^2 = (ka)^2 + ((1+k)a)^2 = (2k^2 + 2k + 1)a^2 .$$

Aplicando el teorema de Pitágoras al triángulo rectángulo $\overset{\Delta}{SPQ}$:

$$\overline{SQ}^2 = 2 \cdot \overline{PQ}^2$$

Sea M el punto medio del lado $\overline{BC}$.

Aplicando el teorema de Pitágoras al triángulo rectángulo $\overset{\Delta}{MOQ}$:

$$\overline{OQ}^2 = \left(\frac{1}{2}a\right)^2 + \left(\left(\frac{1}{2} + k\right)a\right)^2 = \frac{1}{2}(2k^2 + 2k + 1)a^2 = \frac{1}{2}\overline{PQ}^2 .$$

Entonces, $\overline{OQ} = \frac{1}{2}\overline{SQ}$, por tanto, O es el centro del cuadrado PQRS.

Determinemos el valor k tal que $S_{PQRS} = 3 \cdot S_{ABCD}$.

$$S_{PQRS} = \overline{PQ}^2 = (2k^2 + 2k + 1)a^2$$

$$(2k^2 + 2k + 1)a^2 = 3a^2 .$$

$$2k^2 + 2k - 2 = 0 .$$

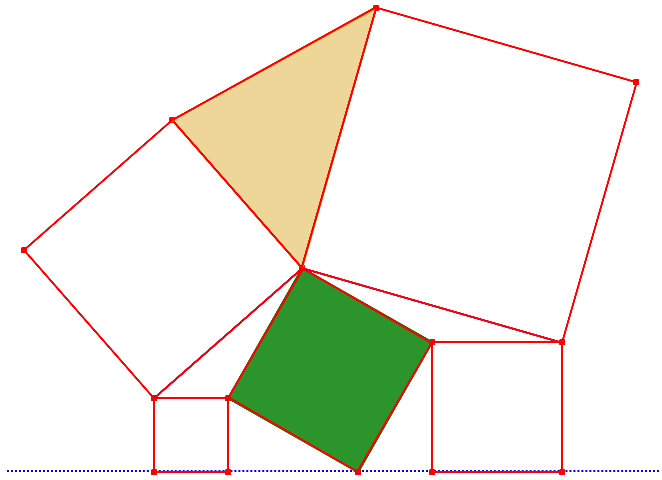
Resolviendo la ecuación:

$$k = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2} = \frac{1}{\Phi} .$$

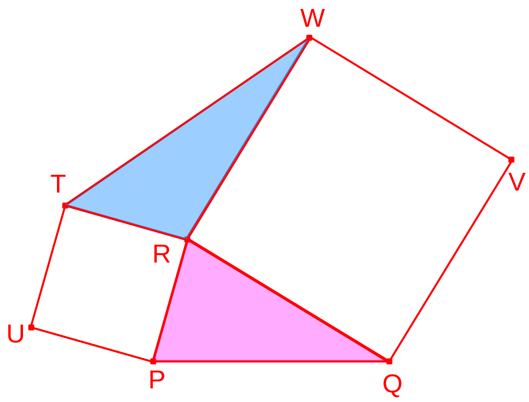
$$\frac{\overline{AP}}{\overline{AB}} = \Phi = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} .$$

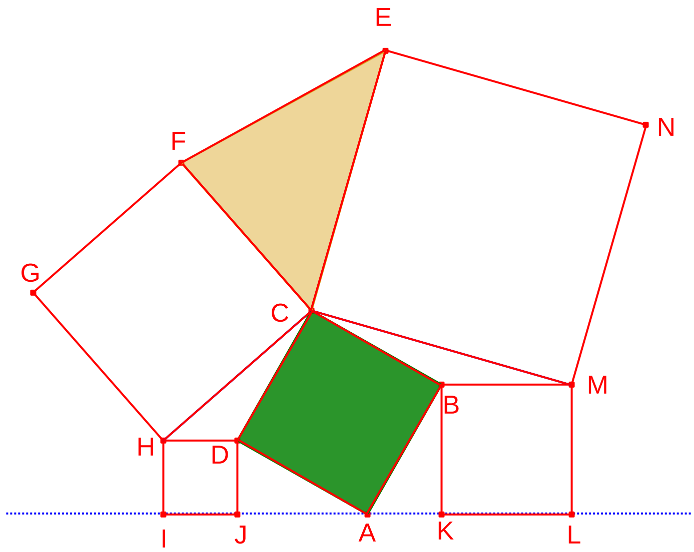
Octubre 14-21:

En la figura, hay cinco cuadrados. Probad que las figuras coloreadas tienen la misma área:



Solución: Nota: Sea un triángulo cualquiera $\overset{\Delta}{PQR}$, si dibujamos los cuadrados PRTU, RQVW exteriores al triángulo, entonces las áreas de los triángulos $\overset{\Delta}{PQR}$, $\overset{\Delta}{RTW}$ son iguales.





Los triángulos rectángulos $\overset{\Delta}{AJD}$, $\overset{\Delta}{BKA}$ son iguales. Sea $\overline{IJ} = \overline{AK} = x$, $\overline{AJ} = \overline{BK} = y$. El área del cuadrado IJDH es x^2. El área del cuadrado KLMB es y^2. El área del cuadrado ABCD es $x^2 + y^2$. El área del triángulo $\overset{\Delta}{AJD}$ es

$$S = \frac{1}{2}xy.$$

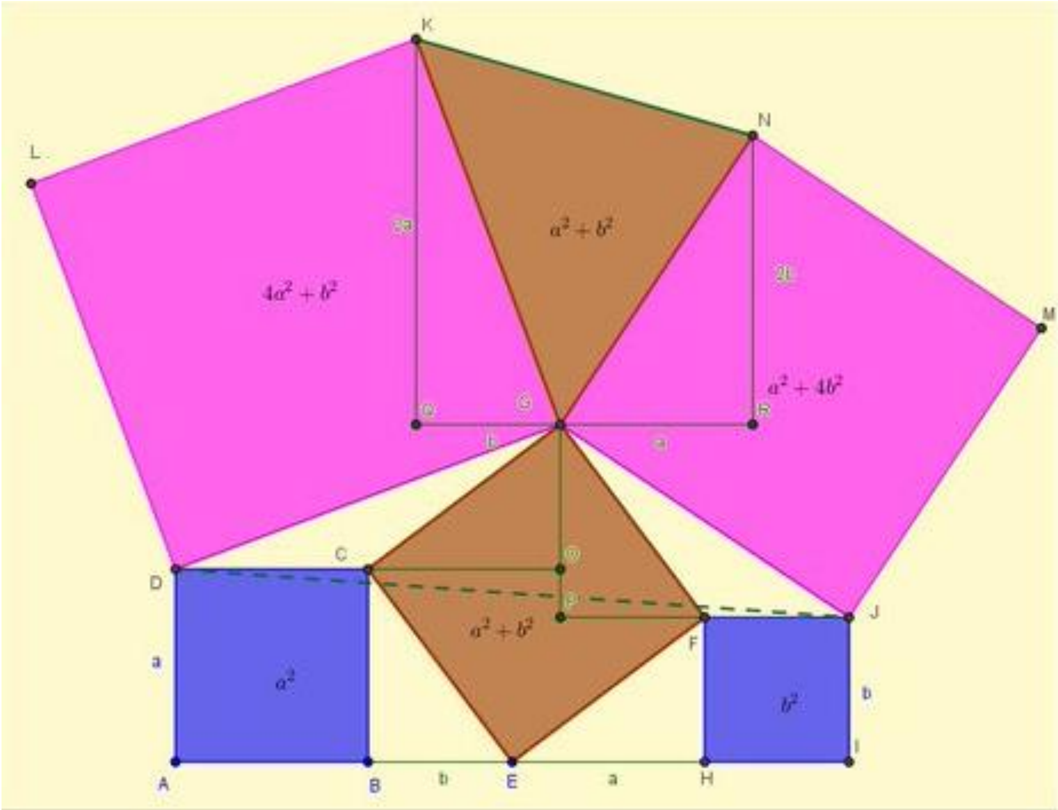
Por la nota las áreas de los triángulos $\overset{\Delta}{AJD}$, $\overset{\Delta}{HDC}$ son iguales. Por la nota las áreas de los triángulos $\overset{\Delta}{BKA}$, $\overset{\Delta}{BMC}$ son iguales. El área del pentágono ILMCH es: $S_{ILMCH} = 2(x^2 + y^2) + 2xy$. El área del trapecio ILMH es:

$$S_{ILMH} = (x+y)^2.$$

El área del triángulo $\overset{\Delta}{HMC}$ es: $S_{HMC} = S_{ILMCH} - S_{ILMH} = x^2 + y^2 = S_{ABCD}$. Aplicando la nota:

$$S_{CEF} = S_{HMC} = S_{ABCD}.$$

Solución de Ignacio Larrosa Cañestro (@ilarrosac)



$$\Delta KGN = (QRNK) - \Delta QGK - \Delta RGN = \frac{2a+2b}{2}(a+b) - 2ab = a^2+b^2 = (EFGC)$$

Las longitudes $\overline{DG}$ y $\overline{GJ}$ se obtienen aplicando el teorema de Pitágoras ΔDOG y ΔJPG respectivamente, lo que permite calcular las áreas de los cuadrados DGKL y GJMN.

$$\Delta BEC = \Delta EHF = \Delta DCG = \Delta FJG = \frac{ab}{2}$$

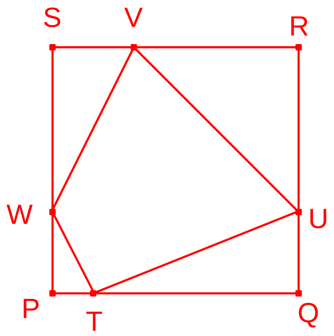
$$\Delta DJG = \Delta KGN = a^2+b^2$$

Además:

$$\overline{DJ} = \sqrt{5(a^2+b^2)+6ab}$$

$$\overline{KN} = \sqrt{5(a^2+b^2)-6ab}$$

que se obtienen aplicando el teorema de Pitágoras a $2(a+b)$ y $|a-b|$, y $(a+b)$ y $2|a-b|$ respectivamente.



Octubre 15-16: En la figura, PQRS es un cuadrado. Los puntos T, U, V, W pertenecen a los lados del cuadrado de forma que $\overline{PT}=1$, $\overline{QU}=2$, $\overline{RV}=3$ y $\overline{SW}=4$. Si el área del cuadrilátero TUVW es la mitad del área del cuadrado PQRS, determinad la medida del lado $\overline{PQ}$.

Solución: Sea

$$\overline{PQ}=x\ \overline{TQ}=x-1,\ \overline{UR}=x-2,\ \overline{VS}=x-3,\ \overline{WP}=x-4.$$

El área del cuadrilátero TUVW es la mitad del área del cuadrado PQRS, entonces la suma de las áreas de los triángulos $\overset{\Delta}{PTW}$, $\overset{\Delta}{TQU}$, $\overset{\Delta}{URV}$ y $\overset{\Delta}{VSW}$ es igual a la mitad del área del cuadrado PQRS:

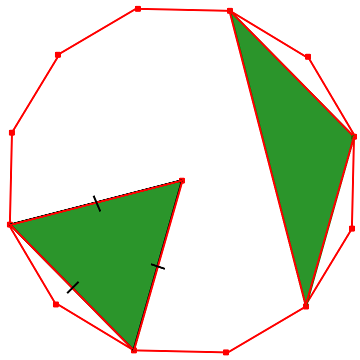
$$\frac{x-4}{2}+\frac{2(x-1)}{2}+\frac{(x-2)3}{2}+\frac{(x-3)4}{2}=\frac{1}{2}x^2.$$

Simplificando:

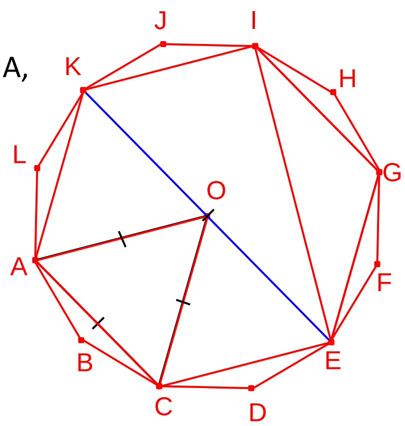
$$x^2-10x+24=0.$$

Resolviendo la ecuación $x=6, 4$.

La solución $x=4$ no es válida ya que $x-4>0$.



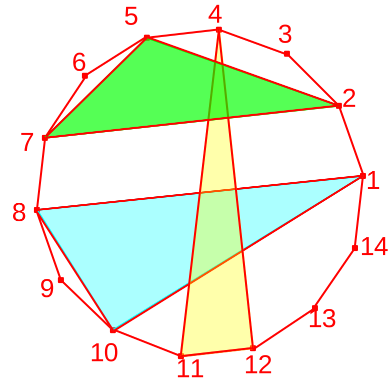
Octubre 17-18: En un dodecágono regular se han dibujado dos triángulos, uno de ellos equilátero. Probad que los dos triángulos tienen la misma área.



Solución: Sea ABCDEFGHIJKL el dodecágono regular de centro O. Los vértices A, C son los lados del hexágono regular de centro O. Entonces, el centre O es vértice del triángulo equilátero. El segmento $\overline{EK}$ es paralelo al segmento $\overline{GI}$. La distancia de O al segmento $\overline{GI}$ es igual a la distancia de O al segmento $\overline{AC}$.

$$\overline{GI}=\overline{AC}.$$

Los dos triángulos tienen igual la base y la altura, entonces tienen la misma área.



Octubre 19: ¿Cuántos triángulos rectángulos se pueden formar uniendo los vértices de un polígono regular de 14 lados?

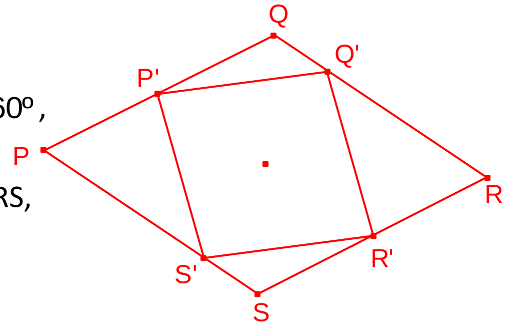
Solución: Para construir un triángulo rectángulo la hipotenusa ha de ser un diámetro de la circunferencia circunscrita al polígono regular. Un polígono regular de 14 lados tiene 7 diámetros, uniendo vértices.
Para formar un triángulo, necesitaremos un diámetro y cualquiera de los 12 vértices que restan. Entonces el número de triángulos rectángulos es:

$$7 \cdot 12 = 84 .$$

Generalización:
¿Cuántos triángulos rectángulos se pueden formar uniendo los vértices de un polígono regular de 2n lados?

Solución:

$$\frac{n}{2}(n-2) .$$



Octubre 22-23: El rombo PQRS de lado 1 y $\angle SPQ = \angle SRQ = 60^o$, $\angle PQR = \angle PSR = 120^o$, tiene inscrito un rombo P'Q'R'S'. Sabiendo que el área del rombo inscrito es igual a la mitad del área del rombo PQRS, calculad la medida del lado del rombo P'Q'R'S'.

Solución: $\overset{\Delta}{PQS}$ es un triángulo equilátero.

$$S_{PQRS} = 2 \cdot S_{PQS} = 2\frac{\sqrt{3}}{4}1^2 = \frac{\sqrt{3}}{2} .$$

Sea

$$\overline{QQ'} = x \, , \; \overline{QP'} = y \, , \; \overline{PP'} = 1-y \, , \; \overline{PS'} = \overline{RQ'} = 1-x$$

El área del rombo P'Q'R'S' es igual a la mitad del área del rombo PQRS. Entonces:

$$S_{P'Q'R'S'} = 2 \cdot S_{P'QQ'} + 2 \cdot S_{PP'S'} = \frac{1}{2}\frac{\sqrt{3}}{2} .$$

$$2\frac{1}{2}xy \cdot \sin 120^o + 2\frac{1}{2}(1-x)(1-y)\sin 60^o = \frac{\sqrt{3}}{4} .$$

$$xy \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + (1-x)(1-y)\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{4} .$$

Simplificando:

$$2xy + 1 - (x + y) = \frac{1}{2} \qquad (1)$$

Aplicando el teorema del coseno al triángulo $P'\overset{\Delta}{Q}'Q$:

$$\overline{P'Q'}^2 = x^2 + y^2 - 2xy \cdot \cos 120^o .$$

Simplificando:

$$\overline{P'Q'}^2 = x^2 + y^2 + xy .$$

Aplicando el teorema del coseno al triángulo $P\overset{\Delta}{P}'S'$:

$$\overline{P'S'}^2 = (1-x)^2 + (1-y)^2 - 2(1-x)(1-y) \cdot \cos 60^o .$$

Simplificando:

$$\overline{P'S'}^2 = 1 - (x+y) + x^2 + y^2 - xy .$$

P'Q'R'S' es un rombo, entonces, $\overline{P'Q'} = \overline{P'S'}$:

$$x^2 + y^2 + xy = 1 - (x+y) + x^2 + y^2 - xy .$$

Simplificando:

$$2xy = 1 - (x + y) \qquad (2)$$

Consideremos el sistema formado por las expresiones (1) (2):

$$\begin{cases} 2xy = -\frac{1}{2} + (x+y) \\ 2xy = 1 - (x+y) \end{cases} .$$

Sumando y restando las dos expresiones: $\begin{cases} xy = \frac{1}{8} \\ x + y = \frac{3}{4} \end{cases}$.

Las soluciones del sistema son las soluciones de la ecuación $z^2 - \frac{1}{8}z + \frac{3}{4} = 0$.

Resolviendo la ecuación:

$$z = \frac{1}{2}, \frac{1}{4} .$$

Entonces, $\begin{cases} x = \frac{1}{4} \\ y = \frac{1}{2} \end{cases}$, o bien $\begin{cases} x = \frac{1}{2} \\ y = \frac{1}{4} \end{cases}$.

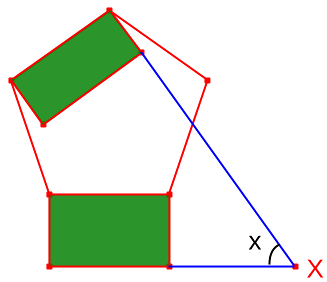
Supongamos que $\begin{cases} x = \frac{1}{4} \\ y = \frac{1}{2} \end{cases}$.

Aplicando el teorema del coseno al triángulo $P'\overset{\Delta}{Q}Q$:

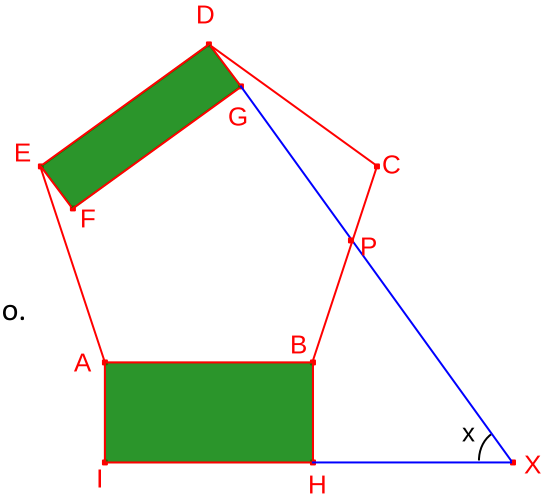
$$\overline{P'Q'}^2 = \left(\frac{1}{4}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 - 2\frac{1}{4}\frac{1}{2}\cos 120^o = \frac{7}{16} .$$

$$\overline{P'Q'} = \frac{\sqrt{7}}{4} .$$

La otra solución da el mismo resultado.



Octubre 24-25:
En la figura sobre dos lados de un pentágono regular se han dibujado dos rectángulos. Un lado de cada rectángulo se extiende hasta intersectarse en el punto X. Determinad la medida del ángulo x.



Solución: Sea ABCDE el pentágono regular.

$$A = B = C = D = E = 108^{o}.$$

Sean DEFG y ABHI los rectángulos. Sea X la intersección de las rectas DG y IH. Sea P la intersección de la recta DG y el lado $\overline{BC}$ del rectángulo.

La suma de los ángulos interiores de un pentágono convexo es
$$180^{o}(5-2) = 540^{o}.$$

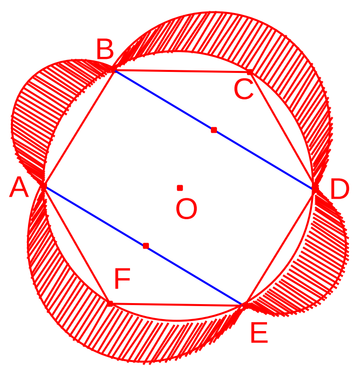
Consideremos el pentágono convexo ABPDE:

$$\angle BPD = 540^{o} - (3 \cdot 108^{o} + 90^{o}) = 126^{o}.$$

$$\angle BPX = 180^{o} - \angle BPD = 180^{o} - 126^{o} = 54^{o}.$$

$$\angle PBH = 360^{o} - (\angle ABH + \angle ABP) = 360^{o} - (90^{o} + 108^{o}) = 162^{o}.$$

$$x = 360^{o} - (\angle BHX + \angle PBH + \angle BPX) = 360^{o} - (90^{o} + 162^{o} + 54^{o}) = 54^{o}.$$



Octubre 26-27: Sea un hexágono regular ABCDEF, inscrito en una circunferencia de centro O y radio R. Sobre $\overline{AB}$, $\overline{BD}$, $\overline{DE}$ i $\overline{EA}$ se construyen, hacia fuera semicircunferencias. Calculad la proporción entre el área limitada por las semicircunferencias y la circunferencia circunscrita al hexágono y el área del hexágono.

Solución: El área del hexágono regular ABCDEF es igual al área de 6 triángulos equiláteros de lado R.

$$S_{ABCDEF} = 6\left(\frac{\sqrt{3}}{4}R^2\right) = \frac{3\sqrt{3}}{2}R^2.$$

El área de una de las lúnulas pequeñas es igual al área del semicírculo de radio $\frac{R}{2}$ menos el área de un sector circular de 60° de radio R, más el área de un triángulo equilátero de lado R:

$$S_{L1}=\frac{1}{2}\pi\left(\frac{R}{2}\right)^2-\frac{1}{6}\pi R^2+\frac{\sqrt{3}}{4}R^2=\left(-\frac{1}{24}\pi+\frac{\sqrt{3}}{4}\right)R^2.$$

$$\overline{AE}=\sqrt{3}R.$$

Notemos que $S_{AEF}=S_{AFO}$. El área de una de las lúnulas grandes es igual al área del semicírculo de radio $\frac{\sqrt{3}}{2}R$ menos el área de un sector circular de 120° de radio R, más el área de un triángulo equilátero de lado R:

$$S_{L2}=\frac{1}{2}\pi\left(\frac{\sqrt{3}}{2}R\right)^2-\frac{1}{3}\pi R^2+\frac{\sqrt{3}}{4}R^2=\left(\frac{1}{24}\pi+\frac{\sqrt{3}}{4}\right)R^2.$$

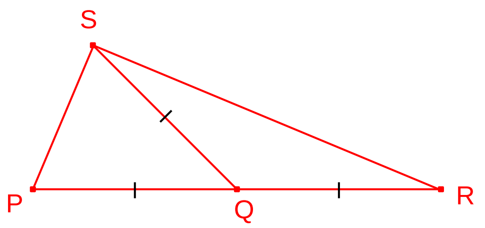
El área sombreada es:

$$S_{\text{ombrejada}}=2\left(S_{L1}+S_{L2}\right)=\sqrt{3}R^2$$

La proporción entre el área limitada por las semicircunferencias y la circunferencia circunscrita al hexágono y el área del hexágono es:

$$\frac{S_{\text{ombrejada}}}{S_{ABCDEF}}=\frac{\sqrt{3}R^2}{\frac{3\sqrt{3}}{2}R^2}=\frac{2}{3}.$$

<u>Octubre 28-29:</u> En la figura, $\overline{PQ}=\overline{QR}=\overline{QS}$ y $\angle SPQ=3\angle QSR$. Determinad la medida del ángulo $\angle QRS$.



<u>Solución 1:</u>

$$\alpha=\angle QSR.$$

$$\angle SPQ=3\alpha.$$

El triángulo $\overset{\Delta}{QRS}$ es isósceles, entonces:

$$\angle QRS=\angle QSR=\alpha.$$

$$\angle PQS=\angle QSR+\angle QRS=2\alpha.$$

El triángulo $\overset{\Delta}{QRS}$ es isósceles, entonces:

$$\angle PSQ=\angle SPQ=3\alpha.$$

La suma de los ángulos del triángulo $\overset{\Delta}{PQS}$ es 180°:

$$3\alpha+3\alpha+2\alpha=180^{o}.$$

Entonces,

$$\alpha=\frac{45^{o}}{2},\ \angle QRS=\alpha=\frac{45^{o}}{2}=22^{o}30'.$$

Solución 2:

$$\alpha = \angle QSR.$$

$$\angle SPQ = 3\alpha .$$

En un triángulo si la mediana es igual a la mitad del lado sobre la que está dibujada, el triángulo es rectángulo.

$\overline{QS}$ es la mediana del triángulo $\overset{\Delta}{PRS}$ y $\overline{PQ} = \overline{QR} = \overline{QS}$. Entonces, $\angle PSR = 90^o$. El triángulo $\overset{\Delta}{QRS}$ es isósceles, entonces:

$$\angle QRS = \angle QSR = \alpha .$$

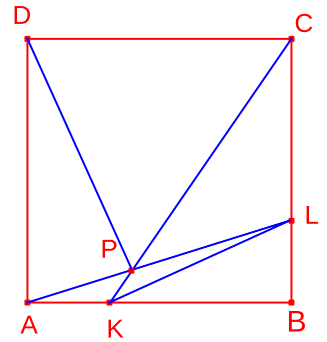
$$\angle PRS + \angle SRP = 90^o .$$

$$\alpha + 3\alpha = 90^o .$$

Resolviendo la ecuación:

$$\angle QRS = \alpha = \frac{90^o}{4} = 22^o 30' .$$

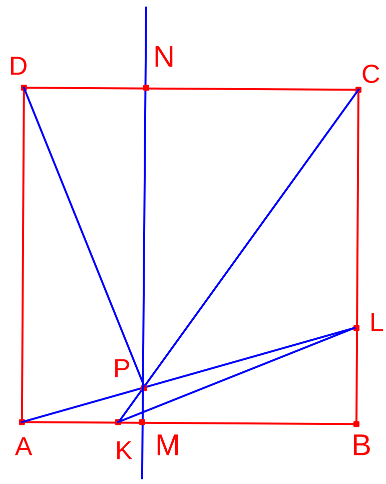
Octubre 30-31: En un cuadrado ABCD se marcan los puntos K y L sobre los lados $\overline{AB}$ y $\overline{BC}$ de modo que $\overline{KB} = \overline{LC}$. Sea P el punto de intersección de los segmentos $\overline{AL}$ i $\overline{CK}$. Demostrad que los segmentos $\overline{DP}$ y $\overline{KL}$ son perpendiculares.



Solución: Sea $\overline{AB} = c$ el lado del cuadrado. Sea $x = \overline{KB} = \overline{LC}$.

$$\overline{AK} = \overline{BL} = c - x.$$

Sea la recta que pasa por P y es perpendicular al lado $\overline{AB}$ que corta los lados $\overline{AB}$ y $\overline{CD}$ en los puntos M, N, respectivamente. Sea $h = \overline{PN}$, $y = \overline{DN}$.



Los triángulos rectángulos $\overset{\Delta}{CNP}$, $\overset{\Delta}{KBC}$ son semejantes. Aplicando el teorema de Tales:

$$\frac{h}{c-y} = \frac{c}{x}.$$

$$xh = c^2 - cy \quad (1)$$

Los triángulos rectángulos $\overset{\Delta}{AMP}$, $\overset{\Delta}{ABL}$ son semejantes. Aplicando el teorema de Tales:

$$\frac{c-h}{y} = \frac{c-x}{c}.$$

$$c^2 - ch = cy - xy \qquad (2)$$

Sumando las expresiones (1) (2):

$$(c - x)h = xy \qquad (3)$$

Los segmentos $\overline{DP}$ y $\overline{KL}$ son perpendiculares si los triángulos $\overset{\Delta}{PND}$, $\overset{\Delta}{KLB}$ son semejantes.

De la expresión (3):

$$\frac{c - x}{x} = \frac{y}{h} \qquad (4)$$

Entonces, los triángulos $\overset{\Delta}{PND}$, $\overset{\Delta}{KLB}$ son semejantes.