SOLUCIONES NOVIEMBRE 2019

PROBLEMAS PARA BACHILLERATO. PROBLEMAS DE LA CMO (Canadian Mathematical Olympiad) (https://cms.math.ca/Competitions/CMO/) Selección: Rafael Martínez Calafat. Profesor jubilado.

Noviembre 1: Factorizar en los reales:

$$\mathbf{x^4 - 11x^2 + 49}$$

Solución: Recordemos que todo polinomio con coeficientes reales se factoriza como el producto de polinomios con coeficientes reales de grado cero, de grado uno o grado dos con discriminante negativo. Como el polinomio es bicuadrado es fácil tratar de obtener sus raíces. Tendremos

$$x^4 - 11x^2 + 49 = 0 \;\Rightarrow\; x^2 = \frac{11 \pm \sqrt{121 - 196}}{2} = \frac{1}{2} \pm \frac{5}{2} i\sqrt{3} \notin \mathbb{R}$$

Como no hay raíces reales no hay polinomios de grado uno. Como el término principal del polinomio es 1 tampoco hay polinomios de grado 0. Por tanto, en la descomposición factorial del polinomio sólo pueden aparecer dos polinomios de grado dos con discriminante negativo. Tendremos:

$$\begin{aligned} x^4 - 11x^2 + 49 &= (x^2 + Ax + B) \cdot (x^2 + Cx + D) \\ &= x^4 + (C + A)x^3 + (D + AC + B)x^2 + (AD + BC)x + BD \end{aligned}$$

Igualando coeficientes:

$$\left.\begin{array}{c} C + A = 0 \\ D + AC + B = -11 \\ AD + BC = 0 \\ BD = 49 \end{array}\right\}$$

De la primera ecuación tenemos C = - A y sustituyendo en las otras tres ecuaciones:

$$\left.\begin{array}{c} D - C^2 + B = -11 \\ -CD + BC = C(B - D) = 0 \\ BD = 49 \end{array}\right\} \;(*)$$

De la segunda ecuación tenemos C = 0 o B = D. Si C = 0, el sistema (*) queda:

$$\left.\begin{array}{c} D + B = -11 \\ BD = 49 \end{array}\right\}$$

De la primera D = - (11 + B), que sustituyendo en la segunda lleva a $B^2 + 11B + 49 = 0$, que no tiene soluciones reales. Luego $C \neq 0$ y necesariamente B = D. Con ello el sistema (*) se transforma en:

$$\left.\begin{array}{c} 2B - C^2 = -11 \\ B^2 = 49 \end{array}\right\}$$

De la segunda ecuación tenemos: $B = D = \pm 7$. Y sustituyendo en la primera llegamos a:

$C^2 = 25$ (y con ello $C = \pm 5$ y $-A = \pm 5$) o $C^2 = -3$ (que es imposible). Luego:

$$x^4 - 11x^2 + 49 = (x^2 - 5x + 7) \cdot (x^2 + 5x + 7)$$

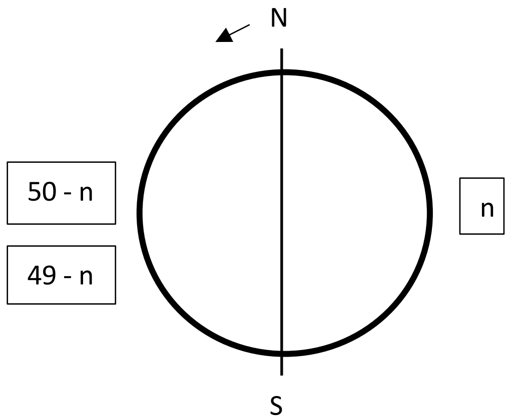
Solución de Natalia Beltrán Pérez (1 Batx-D, IES "José de Ribera" Xàtiva. València)

Como $(x^2 + 7)^2 = x^4 + 14x^2 + 49$, tenemos:

$$x^4 - 11x^2 + 49 = x^4 + 14x^2 + 49 - 14x^2 - 11x^2 = (x^2 + 7)^2 - 25x^2 = (x^2 + 7 + 5x)(x^2 + 7 - 5x)$$

Noviembre 2-3: Dada una circunferencia escogemos aleatoriamente 50 puntos en su interior de manera que dos o más cualesquiera de ellos no están en el mismo diámetro de la circunferencia. Demostrar que siempre hay un diámetro que deja 25 puntos en cada lado.

Solución: Ninguno de los 50 puntos puede ser el centro de la circunferencia, pues si suponemos que el centro es escogido entonces cualquier diámetro que contenga a cualquier otro punto contiene dos puntos contradiciendo el enunciado.



Supongamos escogidos los 50 puntos y dibujamos un diámetro, por ejemplo, el de la figura (que designaremos por N-S). Sólo uno de los 50 puntos puede estar en ese diámetro. Si no ocurre eso y hay 25 puntos en cada parte ya tenemos demostrado el problema. Supongamos que hay n puntos en la parte derecha ($n \in \{0, 1, 2, 3, \cdots, 24\}$) y 50 – n o 49 – n en la izquierda (idéntico razonamiento se podrá seguir suponiendo n puntos a la izquierda y 50 – n o 49 – n a la derecha). Empezamos a rotar el diámetro en el sentido contrario a las agujas del reloj. La variación de puntos a la derecha es de uno en uno (por la condición de que no hay dos o más puntos en un diámetro).

Al rotar el diámetro 180° tendremos que el diámetro S-N deja a su derecha 50 – n o 49 – n puntos y a su izquierda n puntos. Por lo tanto, en algún momento, algún diámetro deja a su derecha 25 puntos y a su izquierda los otros 25. Con ello tenemos demostrado el enunciado.

Noviembre 4: Sea s(n) la suma de los dígitos de n. Hallar:

$$\sum_{k=1}^{2019} s(n) = s(1) + \cdots + s(2019)$$

Solución: Podemos prescindir de los ceros que aparecen en los números, pues estos no alteran la suma.

Dividimos la suma solicitada en tres sumandos:

$$A = s(1) + s(2) + s(3) + \cdots\cdots\cdots + s(999)$$

$$B = s(1000) + s(1001) + s(1002) + \cdots + s(1999)$$

$$C = s(2000) + s(2001) + s(2002) + \cdots + s(2019)$$

Para el sumando A, cada dígito desde el uno al nueve aparece 100 veces en la posición de las unidades, otras 100 veces en a posición de las decenas y otras 100 veces en la posición de las centenas. Por lo tanto:

$$A = 300\cdot 1 + 300\cdot 2 + 300\cdot 3 + \cdots + 300\cdot 9 = 300\cdot(1 + 2 + 3 + \cdots + 9) = 300\cdot 45 = 13500$$

Para el sumando B tenemos que el dígito 1 aparece 1000 veces en las unidades de millar, y de nuevo, cada dígito desde el uno al nueve aparece 100 veces en las unidades, otras 100 veces en las decenas y otras 100 veces en las centenas. Por lo tanto:

$$B = 1000\cdot 1 + 300\cdot 1 + 300\cdot 2 + 300\cdot 3 + \cdots + 300\cdot 9 = 1000 + 300\cdot(1 + 2 + 3 + \cdots + 9) = 1000 + 300\cdot 45 = 14500$$

Para el sumando C tenemos que el dígito 2 aparece 20 veces en las unidades de millar, el dígito 1 aparece 10 veces en las decenas y 2 en las unidades y luego desde el 2 hasta el 9 aparecen 2 veces en las unidades y ninguna en las decenas y centenas. Luego

$$C = 2\cdot 20 + 1\cdot 12 + 2\cdot 2 + 2\cdot 3 + \cdots + 2\cdot 9 = 40 + 12 + 2\cdot(2 + 3 + \cdots + 9) = 140$$

En definitiva:

$$\sum_{k=1}^{2019} s(k) = 13500 + 14500 + 140 = 28140$$

Solución Ignacio Larrosa Cañestro: Tendremos:

$$\sum_{k=0}^{9} s(k) = 45; \qquad \sum_{k=1}^{2019} s(k) = M + C + D + U$$

Como

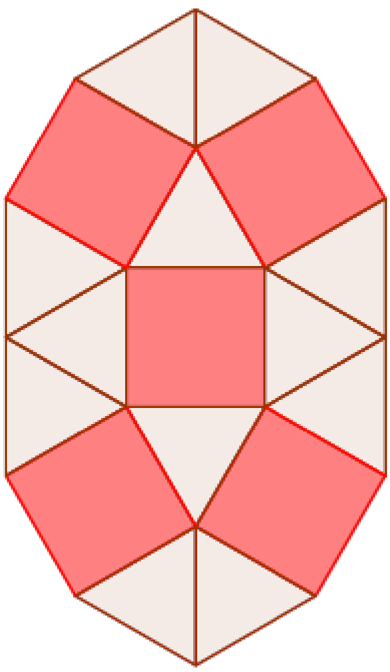
$U = 45\cdot(200 + 2) = 9090$; $D = 45\cdot(20\cdot 10) + 10 = 9010$; $C = 45\cdot 2\cdot 100 = 9000$; $M = 1\cdot 1000 + 2\cdot 20 = 1040$

Tendremos:

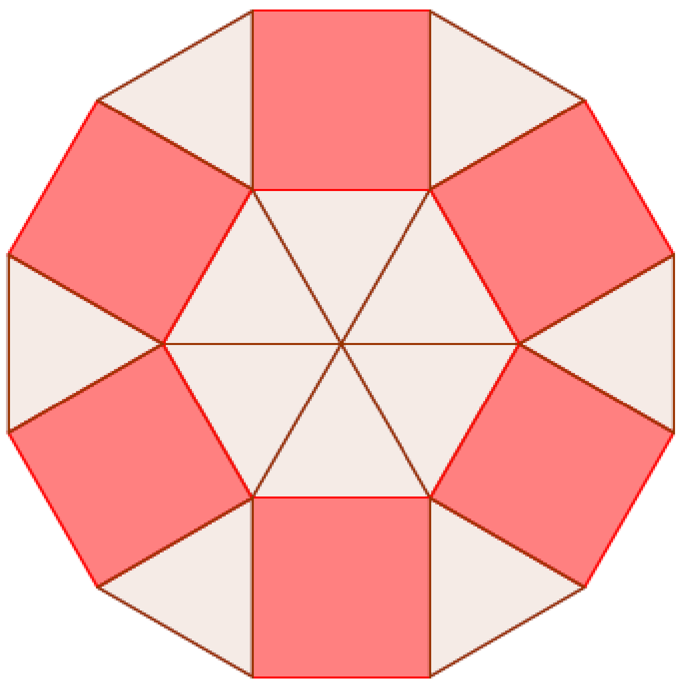
$$\sum_{k=1}^{2019} s(k) = M + C + D + U = 28140$$

Noviembre 5-6: Supongamos que disponemos de 12 triángulos equiláteros y 6 cuadrados. Con ellos formamos polígonos convexos. ¿Cuál es el mayor número de lados de los polígonos convexos que podemos formar sin tener solapamientos?

Solución:



5 cuadrados
12 triángulos
10 lados



6 cuadrados
12 triángulos
12 lados

Noviembre 7: Calcular:

$$\mathbf{x} = \sqrt{\mathbf{3} - \sqrt{\mathbf{3} + \sqrt{\mathbf{3} - \sqrt{\mathbf{3} + \cdots\cdots}}}}$$

Solución: Tendremos:

$$x = \sqrt{3 - \sqrt{3+x}}, \qquad x^2 = 3 - \sqrt{3+x}, \quad x^2 - 3 = -\sqrt{3+x},$$

$$(x^2-3)^2 = \left(-\sqrt{3+x}\right)^2, x^4 - 6x^2 + 9 = 3 + x, \qquad x^4 - 6x^2 - x + 6 = 0$$

	1	0	-6	-1	6
1		1	1	-5	-6
	1	1	-5	-6	0
-2		-2	2	6	
	1	-1	-3	0	

Por lo tanto:

$$x^4 - 6x^2 - x + 6 = 0 = (x-1)(x+2)(x^2-x-3)$$

Y de aquí, tenemos:

$$x = 1; \;\; x = -2; \;\; x^2 - x - 3 = 0 \;\; \Rightarrow \;\; x = \frac{1 \pm \sqrt{13}}{2}$$

Veamos cuales de los valores encontrados son solución de la ecuación propuesta. Como

$$\operatorname{sg}(x) = \operatorname{sg}\left(\sqrt{\mathbf{3} - \sqrt{\mathbf{3} + \sqrt{\mathbf{3} - \sqrt{\mathbf{3} + \cdots\cdots}}}}\right) = +$$

tendremos que los valores negativos x = - 2 y x = $\frac{1-\sqrt{13}}{2}$ no son soluciones de la ecuación. Sin embargo, x = 1 si lo es, pues:

$$1 = \sqrt{3 - \sqrt{3+1}} = \sqrt{3-2} = \sqrt{1}$$

Para $x = \frac{1+\sqrt{13}}{2}$ tenemos que no es solución, pues , si lo fuese, también sería solución de:

$$x^2 - 3 = -\sqrt{3+x}$$

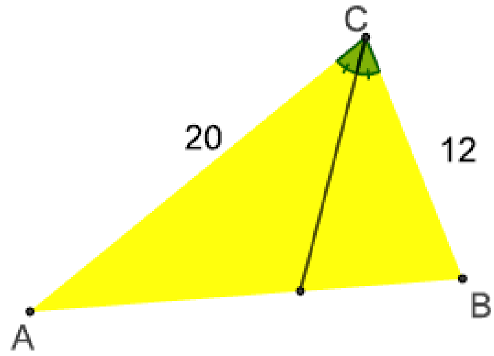
Pero este valor no es solución de esta última ecuación, pues:

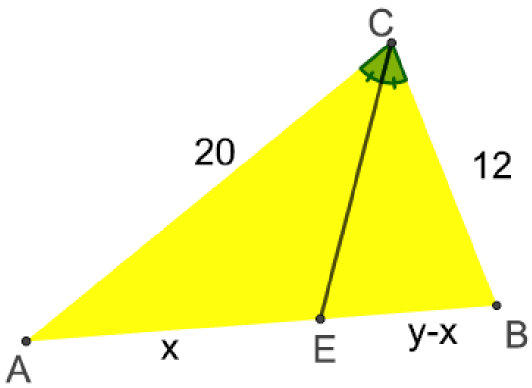
$$\text{primer miembro} = \left(\frac{1+\sqrt{13}}{2}\right)^2 - 3 = \frac{1+\sqrt{13}}{2} > 0$$

$$\text{segundo miembro} = -\sqrt{3 + \frac{1+\sqrt{13}}{2}} < 0$$

Noviembre 8-9:

De un triángulo ΔABC se sabe que BC = 12 cm y CA = 20 cm. Además, la bisectriz del ángulo C determina un segmento de longitud 15 en lado AB. Calcular la longitud del lado AB.





Solución 1: Sea AB = y. Por el toerema de la bisectriz

$$\frac{20}{x}=\frac{12}{y-x}$$

Si el segmento de longitud 15 es el y – x, entonces:

$$x=\frac{20\cdot 15}{12}=25$$

Y como y – x =15 = y – 25 ⇒ y = 40. Pero los segmentos 40, 20 y 12 no forman triángulo (pues no cumplen la desigualdad triangular: 40 > 20 + 12 = 32)

Luego necesariamente el segmento de longitud 15 es el segmento adjunto a AC. En este caso:

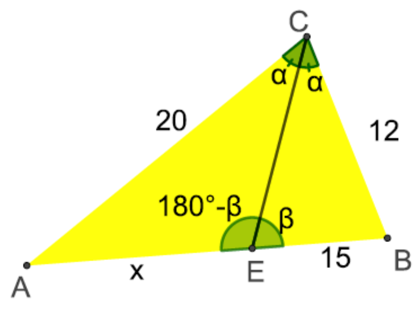
$$\frac{20}{15}=\frac{12}{y-x}\ \Rightarrow\ \frac{20}{15}=\frac{12}{y-15}\ \Rightarrow\ y=24$$

Solución 2: Supongamos en primer lugar que el segmento de longitud 15 es EB. Aplicando el teorema de los senos en ΔCEB y en ΔACE

$$\frac{15}{\operatorname{sen}\alpha}=\frac{12}{\operatorname{sen}\beta}=\frac{12}{\operatorname{sen}(180-\beta)}=\frac{12}{20}\frac{20}{\operatorname{sen}(180-\beta)}=\frac{12}{20}\frac{x}{\operatorname{sen}\alpha}$$

$$\Rightarrow 15\cdot 20=12\cdot x\ \Rightarrow\ x=\frac{15\cdot 20}{12}=25$$

$$\Rightarrow AB=15+25=40$$

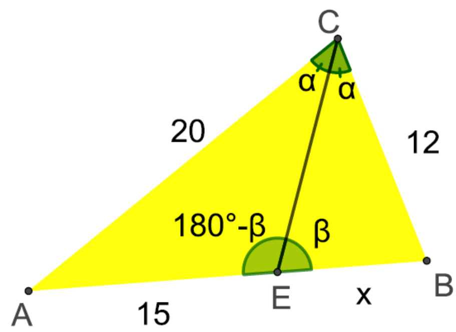


Pero los segmentos 40, 20 y 12 no forman triángulo (por no cumplirse la desigualdad triangular). Así que sólo puede medir 15 el segmento adyacente al vértice A. En este caso tendremos, al reiterar el teorema de los senos a ΔCEB y a ΔACE

$$\frac{x}{\operatorname{sen}\alpha}=\frac{12}{\operatorname{sen}\beta}=\frac{12}{\operatorname{sen}(180-\beta)}=\frac{12}{20}\frac{20}{\operatorname{sen}(180-\beta)}=\frac{12}{20}\frac{15}{\operatorname{sen}\alpha}$$

$$\Rightarrow x\cdot 20=12\cdot 15\ \Rightarrow\ x=\frac{15\cdot 12}{20}=9\ \Rightarrow AB$$

$$=15+9=24$$



Noviembre 10: Hallar los enteros que cumplen:

$$\mathbf{n(n^3-5n^2-11)\geq -3(3n^2+2)}$$

Solución: La inecuación propuesta es equivalente a:

$$n^4 - 5n^3 - 11n \geq -9n^2 - 6 \iff n^4 - 5n^3 + 9n^2 - 11n + 6 \geq 0$$

Factorizamos el polinomio:

	1	-5	9	-11	6
1		1	-4	5	-6
	1	-4	5	-6	0
3		3	-3	6	
	1	-1	2	0	

quedando la inecuación propuesta equivalente a:

$$(n-1)(n-3)(n^2-n+2) \geq 0$$

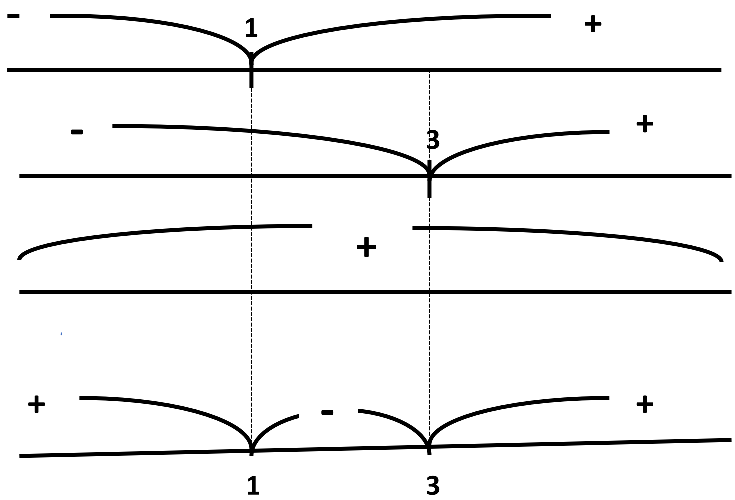
Y, para esta última tenemos:

Factor n – 1: $n - 1 = 0 \Rightarrow n=1$

Factor n – 3: $n - 3 = 0 \Rightarrow n=3$

factor $n^2 - n + 2$: $n^2 - n + 2 = 0 \Rightarrow n \notin R$

$(n-1)(n-3)(n^2-n+2)$



Luego los enteros que verifican la inecuación son todos los enteros excepto el 2

Noviembre 11-12: Sea ΔABC un triángulo equilátero y P un punto arbitrario de su interior. Las perpendiculares PD, PE y PF se dibujan a los tres lados del triángulo. Probar que:

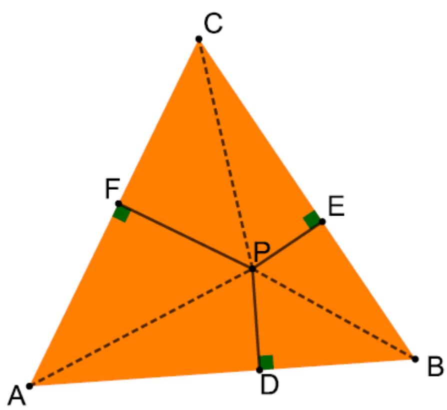
$$\frac{\mathbf{PD+PE+PF}}{\mathbf{AB+BC+CA}} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2\sqrt{3}}}$$

Solución: Al tratarse de un triángulo equilátero su altura es

$$\frac{a\sqrt{3}}{2}$$

siendo a el lado del triángulo. Puesto que, el punto P divide al triángulo en tres triángulos de alturas PD, PE y PF, tenemos:

$$\text{Área} = \frac{a\frac{a\sqrt{3}}{2}}{2} = \frac{a \cdot PD}{2} + \frac{a \cdot PE}{2} + \frac{a \cdot PF}{2}$$



De donde:

$$PE + PD + PF = \frac{a\sqrt{3}}{2}$$

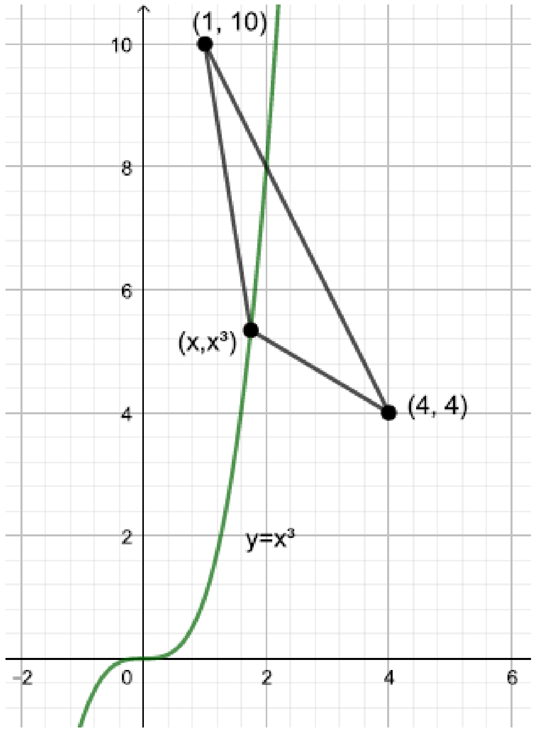
(teorema de Viviani). Luego:

$$\frac{PD + PE + PF}{AB + AC + BC} = \frac{\frac{a\sqrt{3}}{2}}{3a} = \frac{\sqrt{3}}{6} = \frac{1}{2\sqrt{3}}$$

Noviembre 13: Hallar el valor de x que hace mínima la expresión:

$$\sqrt{(\mathbf{x-1})^2 + (\mathbf{x^3-10})^2} + \sqrt{(\mathbf{x-4})^2 + (\mathbf{x^3-4})^2}$$

Solución: La primera raíz es la distancia entre los puntos (1, 10) y (x, x^3). La segunda raíz es la distancia entre los puntos (4, 4) y (x, x^3). La suma será mínima cuando el punto (x, x^3) sea la intersección de la curva y = x^3 y la recta que pasa por los puntos (1, 10) y (4,4): y = - 2·x + 12, es decir, cuando x sea la solución del sistema:



$$\left.\begin{matrix} y = x^3 \\ y = -2x + 12 \end{matrix}\right\} \Rightarrow x^3 + 2x - 12 = 0$$

	1	0	2	-12
2		2	4	12
	1	2	6	0

$$x^3 + 2x - 12 = (x-2)(x^2 + 2x + 6) = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = 2 \\ x = \dfrac{-2 \pm \sqrt{-20}}{2} \notin \mathbb{R} \end{cases}$$

Por lo tanto, el valor más pequeño de la expresión del enunciado sale cuando x = 2 y su valor es:

$$\sqrt{(2-1)^2 + (8-10)^2} + \sqrt{(2-4)^2 + (8-4)^2} = 3\sqrt{5}$$

Noviembre 14-15: Sea f una función con las siguientes propiedades:

1.- f(n) está definido ∀n, entero positivo

2.- f(n) es un entero ∀n, entero positivo

3.- f(2) = 2

4.- f(m·n) = f(m)·f(n) ∀m, n enteros positivos

5.- Si m > n entonces f(m) > f(n)

Probar que f(n) = n ∀n, entero positivo

Solución:

Lema previo: $f(2^n) = 2^n\ \forall n\in\mathbb{N}$

Por inducción:

Por el axioma 3 tenemos f(2) = 2. Supongamos $f(2^n) = 2^n$ y veámoslo para n + 1

$$f(2^{n+1}) = f(2\cdot 2^n) = \{\text{axioma 4}\} = f(2)\cdot f(2^n) = \{\text{axioma 3 e hipótesis de inducción}\} = 2\cdot 2^n = 2^{n+1}$$

Por el lema tenemos que f coincide con la identidad en las potencias de 2. Estudiemos que pasa con los naturales entre dos potencias de 2 consecutivas. Tenemos:

$2 < 3 < 4 = 2^2 \Rightarrow$ {axioma 5} $2 = f(2) < f(3) < f(4) = 4$. Luego f(3) es un natural entre 2 y 4 $\Rightarrow$ f(3) = 3

$4 = 2^2 < 5 < 6 < 7 < 8 = 2^3 \Rightarrow$ {axioma 5} $4 = f(4) < f(5) < f(6) < f(7) < f(8) = 8$. Luego f(5), f(6) y f(7) son naturales distintos y ordenados entre 5 y 7. Luego necesariamente: f(5) = 5, f(6) = 6 y f(7) = 7.

Veámoslo en general: Entre 2^n y 2^{n+1} hay $2^n - 1$ naturales:

$$2^n < 2^n + 1 < 2^n + 2 < \cdots\cdots < 2^n + 2^n - 1 < 2^n + 2^n = 2\cdot 2^n = 2^{n+1}$$

Por el axioma 5 tendremos.

$$2^n = f(2^n) < f(2^n + 1) < f(2^n + 2) < \cdots\cdots < f(2^n + 2^n - 1) < f(2^{n+1}) = 2^{n+1}$$

Luego necesariamente $f(2^n+j)$ es un natural que forman una colección estrictamente creciente de $2^n - 1$ naturales entre $2^n + 1$ y 2^{n+1}. Por tanto:

$$f(2^n+j) = 2^n+j\quad \forall j\in\{1, 2, 3, \cdots, 2^n - 1\}$$

Por lo tanto, tenemos que $f(n) = n\ \forall n\in\mathbb{N}$

Noviembre 16: Demostrar que:

$$\sqrt{\mathbf{c+1}} - \sqrt{\mathbf{c}} < \sqrt{\mathbf{c}} - \sqrt{\mathbf{c-1}}$$

para cualquier $c \geq 1$

Solución: Tendremos:

$$\begin{aligned} c \geq 1 \ &\Rightarrow (y = x^2 \text{creciente})\ c^2 \geq 1^2 = 1 \ \Rightarrow\ 0 \leq c^2 - 1 < c^2 \ \Rightarrow\ \left(y = \sqrt{x}\text{ creciente}\right) \sqrt{c^2 - 1} < \sqrt{c^2} \\ &= c \ \Rightarrow\ 2\sqrt{c^2 - 1} < 2c \ \Rightarrow 2c + 2\sqrt{c^2 - 1} < 4c \ \Rightarrow\ c + 1 + c - 1 + 2\sqrt{(c-1)(c+1)} \\ &< 4c \ \Rightarrow\ \left(\sqrt{c+1} + \sqrt{c-1}\right)^2 < 4c \ \Rightarrow\ \left(y = \sqrt{x}\text{ creciente}\right) \sqrt{c+1} + \sqrt{c-1} < 2\sqrt{c} \\ &= \sqrt{c} + \sqrt{c} \ \Rightarrow\ \sqrt{c+1} - \sqrt{c} < \sqrt{c} - \sqrt{c-1} \end{aligned}$$

Solución de Ignacio Larrosa Cañestro:

$$\sqrt{c+1} - \sqrt{c} < \sqrt{c} - \sqrt{c-1}$$

$$\Updownarrow$$

$$\sqrt{c+1} + \sqrt{c-1} < 2\sqrt{c}$$

$$\Updownarrow (y = x^2 \text{ creciente})$$

$$2c + 2\sqrt{(c-1)(c+1)} < 4c$$

$$\Updownarrow$$

$$2\sqrt{(c-1)(c+1)} < 2c$$

$$\Updownarrow \text{ (}y = x^2 \text{ creciente)}$$

$$c^2 - 1 = (c-1)(c+1) < c^2$$

Noviembre 17: Hallar los enteros a, b y c que cumplen

$$\mathbf{a^2 + b^2 - 8c = 6}$$

Solución: La ecuación puede interpretarse como buscar potencias cuadradas que den resto 4 módulo 8. Tenemos, al considerar congruencias módulo 8:

$$a = 0(8) \;\Rightarrow\; a^2 = 0(8)$$
$$a = 1(8) \;\Rightarrow\; a^2 = 1(8)$$
$$a = 2(8) \;\Rightarrow\; a^2 = 4(8)$$
$$a = 3(8) \;\Rightarrow\; a^2 = 1(8)$$
$$a = 4(8) \;\Rightarrow\; a^2 = 0(8)$$
$$a = 5(8) \;\Rightarrow\; a^2 = 1(8)$$
$$a = 6(8) \;\Rightarrow\; a^2 = 4(8)$$
$$a = 7(8) \;\Rightarrow\; a^2 = 1(8)$$

Y, además, para la suma de potencias tenemos:

$b^2\backslash a^2$	0(8)	1(8)	4(8)
0(8)	0(8)	1(8)	4(8)
1(8)	1(8)	2(8)	5(8)
4(8)	4(8)	5(8)	0(8)

Luego $a^2 + b^2 \neq 6(8) \;\Rightarrow\; a^2 + b^2 - 8c = 6$ no tiene soluciones

Solución @Fedematico314: Puesto que 6 + 8c es par tendremos que $a^2 + b^2$ también debe serlo. Por tanto, a y b deben tener la misma paridad. Si ambos fuesen pares $a^2 + b^2 - 8c$ sería múltiplo de 4 que es imposible (pues 6 no es múltiplo de 4). Supongamos pues que a = 2x +1 y b = 2y + 1, entonces:

$$8c = a^2 + b^2 - 6 = 4x^2 + 4x + 1 + 4y^2 + 4y + 1 - 6 = 4(x^2 + x + y^2 + y - 1)$$

Luego, necesariamente, el paréntesis debe ser múltiplo de 2, pero esto es imposible pues $x^2 - x$ es par, $y^2 - y$ es par, y al restarle una unidad, debe ser impar.

Por tanto, la ecuación no tiene soluciones.

Noviembre 18: Hallar:

$$\sum_{\mathbf{k}=\mathbf{1}}^{\mathbf{n}} (\mathbf{k} \cdot \mathbf{k}!)$$

Solución: Tenemos, desarrollando el simbolismo:

$$\sum_{k=1}^{n} (k \cdot k!) = 1 \cdot 1! + 2 \cdot 2! + 3 \cdot 3! + \cdots\cdots + (n-1) \cdot (n-1)! + n \cdot n!$$

Para cada sumando del segundo miembro, tenemos:

$$n \cdot n! = [(n+1) - 1] \cdot n! = (n+1) \cdot n! - n! = (n+1)! - n!$$

$$(n-1) \cdot (n-1)! = n \cdot (n-1)! - (n-1)! = n! - (n-1)!$$

$$(n-2) \cdot (n-2)! = [(n-1) - 1] \cdot (n-2)! = (n-1) \cdot (n-2)! - (n-2)! = (n-1)! - (n-2)!$$

$$\vdots$$

$$\vdots$$

$$\vdots$$

$$\vdots$$

$$3 \cdot 3! = [(3+1) - 1] \cdot 3! = (4) \cdot 3! - 3! = 4! - 3!$$

$$2 \cdot 2! = [(2+1) - 1] \cdot 2! = (3) \cdot 2! - 2! = 3! - 2!$$

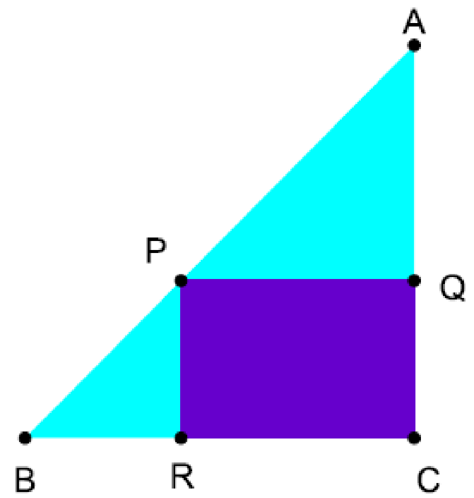
Con ello:

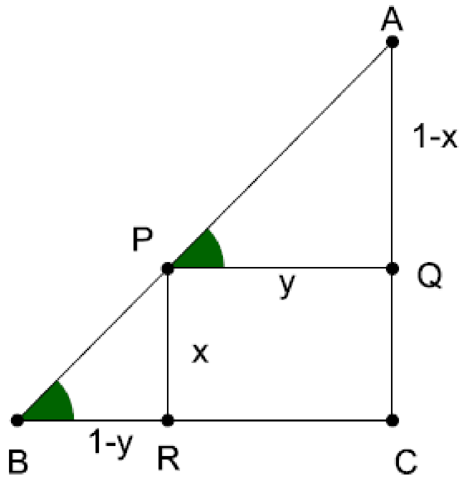
$$\sum_{k=1}^{n} (k \cdot k!) = 1 \cdot 1! + 2 \cdot 2! + 3 \cdot 3! + \cdots\cdots + (n-1) \cdot (n-1)! + n \cdot n!$$

$$= 1 + (3! - 2!) + (4! - 3!) + \cdots\cdot + (n! - (n-1)!) + \big((n+1)! - n!\big) = 1! - 2! + (n+1)!$$

$$= (n+1)! - 1$$

Noviembre 19-20: Sea ΔABC un triángulo rectángulo isósceles con catetos de longitud 1. Sea P un punto cualquiera de la hipotenusa. Sean Q y R los pies de las perpendiculares a los catetos por P. Consideremos las áreas de los triángulos ΔAPQ y ΔPBR y el área del rectángulo QCRP. Probar que, no importa donde se escoja el punto P, la mayor de estas áreas es, al menos, 2/9



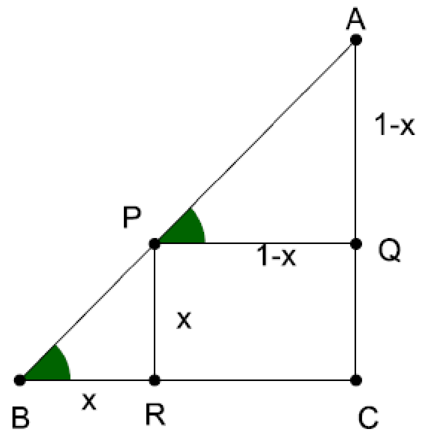


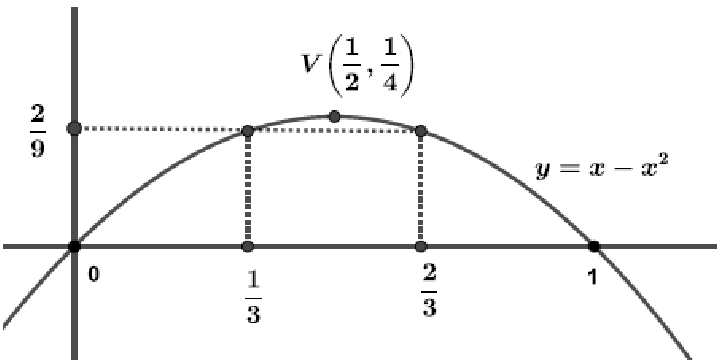
Solución: Puesto que los triángulos ΔBRP y ΔPQA son semejantes (al ser los dos rectángulos y tener iguales los ángulos de color verde, por tener lados coincidentes o paralelos), tendremos:

$$\frac{x}{1-x}=\frac{1-y}{y}\Rightarrow xy=(1-x)\cdot(1-y)$$
$$=1-y-x+xy\ \Rightarrow 1=y+x$$

Luego la ilustración queda como aparece a la derecha, y las áreas de cada polígono son:

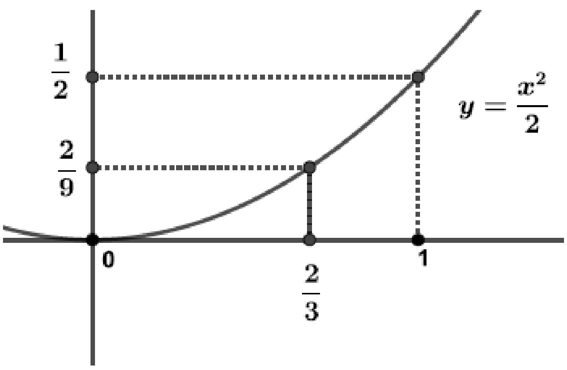
$$\begin{cases} \Delta\mathrm{PBR}\Rightarrow \dfrac{\mathrm{x}^2}{2} \\ \Delta\mathrm{PQA}\ \Rightarrow \dfrac{(1-\mathrm{x})^2}{2} \\ \mathrm{RPQC}\Rightarrow \mathrm{x}\cdot(1-\mathrm{x})=\mathrm{x}-\mathrm{x}^2 \end{cases}$$





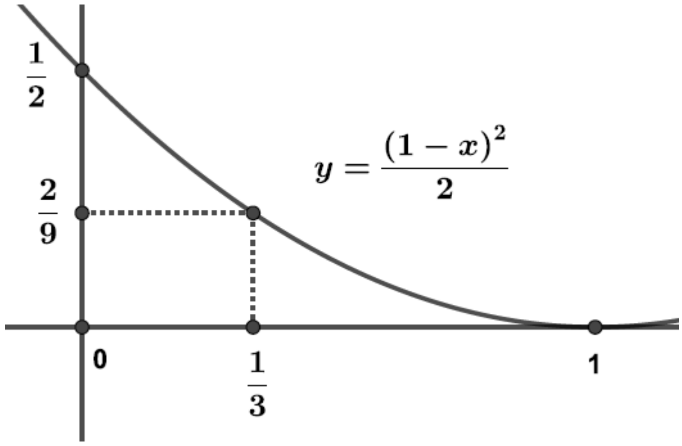
y = x^2 – x es una parábola invertida con vértice V , que pasa por los puntos $\left(\frac{1}{3},\frac{2}{9}\right)$ y $\left(\frac{2}{3},\ \frac{1}{9}\right)$.

Con ello, si $x\in\left[\frac{1}{3},\frac{2}{3}\right]$ el área del rectángulo RPQC es mayor o igual a $\frac{2}{9}$



$y=\frac{\mathrm{x}^2}{2}$ es una parábola no invertida con vértice (0, 0), que pasa por $\left(\frac{2}{3},\frac{2}{9}\right)$ y $\left(1,\frac{1}{2}\right)$.

Con ello, si $x\in\left[\frac{2}{3},1\right]$ el área del triángulo ΔPBR es mayor o igual a $\frac{2}{9}$



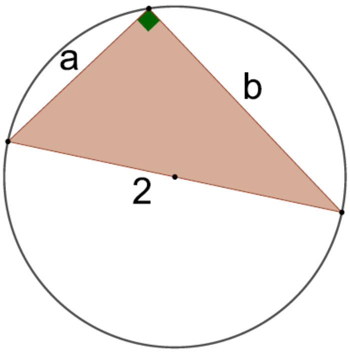
$y = \frac{(1-x)^2}{2}$ es una parábola no invertida con vértice (1, 0), que pasa por $\left(\frac{1}{3}, \frac{2}{9}\right)$ y $\left(0, \frac{1}{2}\right)$.

Con ello, si $x \in \left[0, \frac{1}{3}\right]$ el área del triángulo ΔPQA es mayor o igual a $\frac{2}{9}$

Noviembre 21: Probar que para cualquier cuadrilátero convexo inscrito en un círculo de radio 1, la longitud del lado más corto es menor o igual a $\sqrt{2}$

Solución: Lema: Sean a y b dos cuerdas perpendiculares de una circunferencia de diámetro 2. Entonces:

$$a \leq b \;\Rightarrow\; a \leq \sqrt{2} \leq b$$

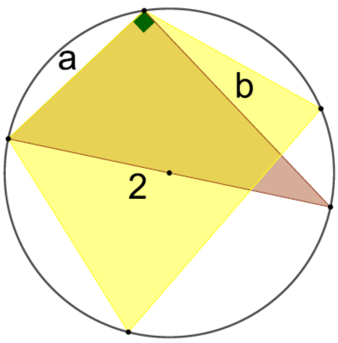


Demostración: Al ser las cuerdas perpendiculares, el triángulo que forman tiene por hipotenusa un diámetro. Entonces al aplicar Pitágoras:

$$a^2 + b^2 = 4$$

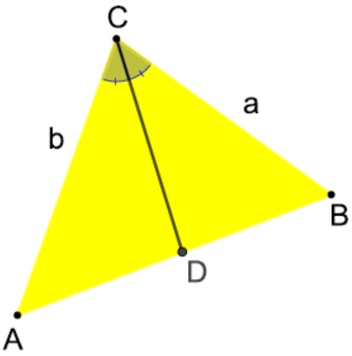
Pero si, $a \leq b$ (y por tanto $a^2 \leq b^2$), tenemos:

$$a^2 = \frac{2a^2}{2} \leq \frac{a^2 + b^2}{2} = \frac{4}{2} = 2 \leq \frac{2b^2}{2} = b^2 \;\Rightarrow\; a \leq \sqrt{2} \leq b$$



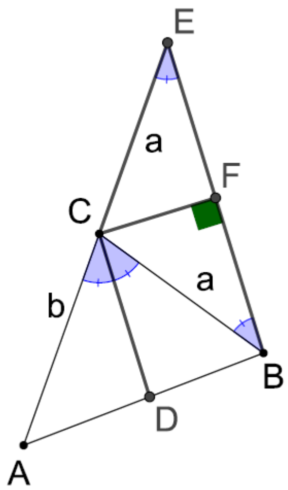
Sea ahora un cuadrilátero convexo inscrito en una circunferencia de radio 1. Sean α_i los ángulos que forman los lados. Algún ángulo $\alpha_j \geq 90°$ (pues si todos los ángulos $\alpha_i < 90° \Rightarrow \Sigma\alpha_i < 4\cdot 90° = 360°$, en contra de que $\Sigma\alpha_i = 360°$). Sean a y c los lados que generan ese α_j y supongamos que $a \leq c$. Construimos entonces una cuerda perpendicular a a y supongamos que su medida sea b. Aplicando el lema, tenemos $a \leq \sqrt{2}$

Si a, es el menor de los lados del cuadrilátero, ya está todo demostrado. Si, por el contrario, hay en el cuadrilátero, un lado con longitud más pequeña que a, digamos m, tendremos $m < a \leq \sqrt{2}$ y también tenemos terminado el problema



Noviembre 22-23: Sea ΔABC un triángulo con lados de longitudes a, b y c. La bisectriz por C corta al lado AB en D. Probar que la longitud de la bisectriz CD es:

$$\frac{\mathbf{2abcos}\,\frac{\mathbf{C}}{\mathbf{2}}}{\mathbf{a+b}}$$

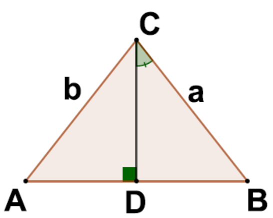


Solución 1: A partir del vértice B trazamos una paralela a la bisectriz CD hasta encontrarse con E (en la prolongación de AC). Trazamos, también, una perpendicular a EB por C que corta a EB en F. Los ángulos de color azul son todos iguales (bien por ser alternos intgernos, bien por tener lados coincidentes o paralelos). Así que ΔCBE es isósceles con CB = CE = a. Entonces en el triángulo ΔBCF:

$$\cos\frac{C}{2}=\frac{FB}{CB}=\frac{FB}{a}=\frac{2\cdot FB}{2\cdot a}=\frac{EB}{2a}\Rightarrow EB=2a\cos\frac{C}{2}$$

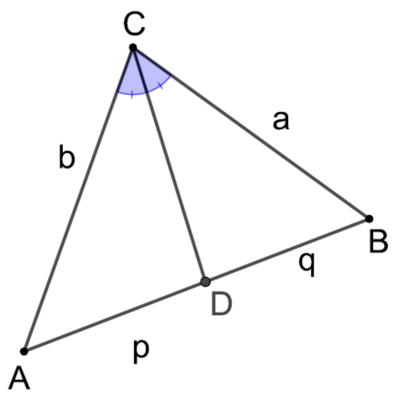
Por último, ΔACD ≅ ΔAEB (por construcción), luego:

$$\frac{AC}{CD}=\frac{AE}{EB}\ \Rightarrow\ CD=\frac{AC\cdot EB}{AE}=\frac{b\cdot 2a\cos\frac{C}{2}}{a+b}$$



Solución 2: Si a = b el triángulo inicial es isosceles y CD es perpendicular a AB y entonces:

$$CD=a\cdot\cos\frac{C}{2}=\frac{2b}{2b}a\cdot\cos\frac{C}{2}=\frac{2ab\cos\frac{C}{2}}{a+b}$$



Supongamos, pues que a ≠ b. ^Por el teorema de la bisectriz

$$\frac{a}{b}=\frac{q}{p}$$

Si aplicamos el teorema de los cosenos a q y p:

$$q^2=CD^2+a^2-2aCD\cos\frac{C}{2}$$

$$p^2=CD^2+b^2-2bCD\cos\frac{C}{2}$$

De donde:

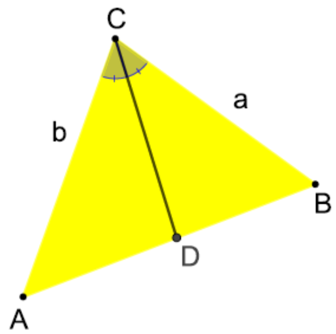
$$\frac{a^2}{b^2}=\frac{q^2}{p^2}=\frac{CD^2+a^2-2aCD\cos\frac{C}{2}}{CD^2+b^2-2bCD\cos\frac{C}{2}}\ \Rightarrow\ a^2\cdot\left(CD^2+b^2-2bCD\cos\frac{C}{2}\right)=b^2\cdot\left(CD^2+a^2-2aCD\cos\frac{C}{2}\right)$$

Operando se llega a:

$$(a^2 - b^2)CD = 2ab(a - b)\cos\frac{C}{2}$$

Y como $a - b \neq 0$

$$(a + b)CD = 2ab\cos\frac{C}{2} \;\Rightarrow\; CD = \frac{2ab\cos\frac{C}{2}}{a + b}$$



Solución 3: Tendremos al igualar el área del triángulo grande con la suma de los dos triángulos pequeños:

$$\frac{1}{2}ab\sin C = \frac{1}{2}aCD\sin\frac{C}{2} + \frac{1}{2}bCD\sin\frac{C}{2} = \frac{1}{2}CD(a + b)\sin\frac{C}{2}$$

Y recordando el seno del ángulo doble, tenemos:

$$2ab\sin\frac{C}{2}\cos\frac{C}{2} = CD(a + b)\sin\frac{C}{2} \;\Rightarrow\; CD = \frac{2ab\cos\frac{C}{2}}{a + b}$$

Noviembre 24: Sea n el menor natural tal que la suma de sus dígitos es el mayor natural de dos cifras con suma de dígitos igual a 9. ¿Cuántos divisores tiene n+1?

Solución: Si designamos por s(n) la suma de los dígitos del número n, buscamos el menor n tal que s(n) es el mayor número de dos cifras con suma de dígitos s(s(n)) igual a 9.

Si s(s(n)) = 9 y s(n) tiene dos cifras, los casos posibles son: $s(n) \in \{90, 81, 18, 72, 27, 63, 36, 54, 45\}$.

El mayor de todos ellos es 90.

Ahora buscamos el más pequeño n con s(n) = 90, que obviamente es 9999999999 (pues cualquier otro natural con s(n) = 90 tiene más cifras y por tanto es mayor que 9999999999). Entonces n + 1 = 10000000000 = 10^{10} =$5^{10}\cdot 2^{10}$. Los divisores de n + 1 son de la forma $2^{\alpha}\cdot 5^{\beta}$ con $\alpha, \beta \in \{0, 1, 2, \cdots, 9, 10\}$. Es decir, n + 1 tiene (11·11 =) 121 divisores

Noviembre 25-26: A partir de los dígitos 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 y 9 formamos números de nueve cifras sin repetir ninguna. ¿Cuál es la probabilidad de que el número resultante sea múltiplo de 11?

Solución: Recordemos la regla de la divisibilidad por 11: La suma de las cifras en lugar impar (Σ_I) menos la suma de cifras en lugar par (Σ_P) es 0 o múltiplo de 11. El mayor valor de Σ_I es (9 + 8 + 7 + 6 + 5 =) 35 que lleva asociado el menor valor de Σ_P que es (1 + 2 + 3 + 4 =) 10. El menor valor de Σ_I es (1 + 2 + 3 + 4 + 5 =) 15 que lleva asociado el mayor valor de Σ_P que es (6 + 7 + 8 + 9 =) 30. Por lo tanto, los valores de $\Sigma_I - \Sigma_P$ van desde (35 – 10 =)25 hasta (15 – 30 =) – 15. De aquí que los valores que hacen los números múltiplos de 11 son: 22, 11, 0, - 11. Analicemos cada uno de esos valores posibles,

Si $\Sigma_I - \Sigma_P = 22$, como $\Sigma_I + \Sigma_P$ = (1 + 2+ 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 =)45, tenemos al sumar las dos ecuaciones que $2\cdot\Sigma_I = 67$ que es un absurdo pues el primer miembro es par y el segundo impar.

Si $\Sigma_I - \Sigma_P = 0$, como $\Sigma_I + \Sigma_P = 45$, tenemos al sumar las dos ecuaciones que $2\cdot\Sigma_I = 45$ que es un absurdo pues el primer miembro es par y el segundo impar.

Si $\Sigma_I - \Sigma_P = 11$, como $\Sigma_I + \Sigma_P = 45$, tenemos al restar las dos ecuaciones que $\Sigma_P = 17$

Si $\Sigma_I - \Sigma_P = -11$, como $\Sigma_I + \Sigma_P = 45$, tenemos al restar las dos ecuaciones que $\Sigma_P = 28$

Para el caso $\Sigma_P = 17$, tenemos 9 posibilidades:

1, 2, 5, 9,

1, 2, 6, 8,

1, 3, 4, 9,

1, 3, 5, 8,

1, 3, 6, 7,

1, 4, 5, 7,

2, 3, 4, 8,

2, 3, 5, 7,

2, 4, 5, 6

que generan 9·4!·5! números al reordenar las cifras de los lugares pares y las cifras de los lugares impares

Para el caso $\Sigma_P = 28$, tenemos 2 posibilidades:

9, 8, 6, 5,

9, 8, 7, 4,

que generan 2·4!·5! números al reordenar las cifras de los lugares pares y las cifras de los lugares impares.

Luego la probabilidad pedida es:

$$\frac{\text{casos favorables}}{\text{casos posibles}} = \frac{9 \cdot 4!\,35! + 2 \cdot 4! \cdot 5!}{9!} = \frac{11 \cdot 4! \cdot 5!}{9!} = \frac{11}{9 \cdot 2 \cdot 7} = \frac{11}{126}$$

Noviembre 27: Sea dada la ecuación: $\mathbf{x^3 + 4x^2 - 4x + a = 0}$. Hallar a para que las tres raíces x_1, x_2 y x_3 cumplan $\mathbf{x_3 = x_1 \cdot x_2}$

Solución: Recordemos las relaciones de Cardano-Vietà: Si

$$P(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_k x^k$$

tiene por raíces: $x_1, x_2, \cdots, x_k$, entonces:

$$\left.\begin{array}{c} \sum x_i = -\frac{a_{k-1}}{a_k} \\ \sum_{i<j} x_i \cdot x_j = \frac{a_{k-2}}{a_k} \\ \sum_{i<j<n} x_i \cdot x_j \cdot x_n = -\frac{a_{k-3}}{a_k} \\ \vdots \\ \prod x_i = (-1)^k \frac{a_0}{a_k} \end{array}\right\}$$

Las dos primeras, junto con la relación que han de cumplir las raíces llevan al sistema

$$\left.\begin{array}{c} x_1 + x_2 + x_3 = -4 \\ x_1 \cdot x_2 + x_1 \cdot x_3 + x_3 \cdot x_2 = -4 \\ x_1 \cdot x_2 = x_3 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{c} x_1 + x_2 + x_1 \cdot x_2 = -4 \\ x_1 \cdot x_2 + x_1^2 \cdot x_2 + x_1 \cdot x_2^2 = -4 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{c} x_1 + x_2 + x_1 \cdot x_2 = -4 \\ x_1 \cdot x_2(1 + x_1 + x_2) = -4 \end{array}\right\}$$

En el último sistema las incógnitas aparecen en la forma $x_1 + x_2$ y $x_1 \cdot x_2$. Efectuando el cambio $x_1 + x_2 = t$ y $x_1 \cdot x_2 = u$, el sistema se transforma en:

$$\left.\begin{array}{c} t + u = -4 \\ u(1 + t) = -4 \end{array}\right\}$$

cuyas soluciones son: u = 1 y t = - 5; u = - 4 y t = 0

La primera solución aporta el sistema:

$$\left.\begin{array}{r} x_1 \cdot x_2 = 1 \\ x_1 + x_2 = -5 \end{array}\right\}$$

con soluciones:

$$x_1 = \frac{-5+\sqrt{21}}{2}, x_2 = \frac{-5-\sqrt{21}}{2}$$

que llevan a:

$$x_3 = x_1 \cdot x_2 = \frac{25-21}{4} = 1$$

con lo que, utilizando la tercera relación de Cardano-Vietà, lleva a:

$$a = -x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 = (-1) \cdot \frac{-5+\sqrt{21}}{2} \cdot \frac{-5-\sqrt{21}}{2} = -1$$

La segunda solución aporta el sistema:

$$\left.\begin{array}{r} x_1 \cdot x_2 = -4 \\ x_1 + x_2 = 0 \end{array}\right\}$$

con soluciones:

$$x_1 = 2, \qquad x_2 = -2$$

que llevan a:

$$x_3 = x_1 \cdot x_2 = 2 \cdot (-2) = -4$$

con lo que, utilizando la tercera relación de Cardano-Vietà, lleva a:

$$a = -x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 = (-2) \cdot (-2) \cdot (-4) = -16$$

<u>Noviembre 28-29:</u> Probar que si $\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \frac{a_3}{b_3}$ y p_1, p_2 y p_3 no son todos nulos, entonces:

$$\boldsymbol{\left(\frac{a_1}{b_1}\right)^n = \frac{p_1 a_1^n + p_2 a_2^n + p_3 a_3^n}{p_1 b_1^n + p_2 b_2^n + p_3 b_3^n}}$$

para todo entero positivo n

<u>Solución:</u> Lema previo:

$$\frac{A}{B} = \frac{C}{D} \;\Rightarrow\; \frac{A+C}{B+D} = \frac{A}{B} = \frac{C}{D}$$

Demostración: Si

$$\frac{A}{B} = \frac{C}{D} \;\Rightarrow\; AD = BC$$

Por otra parte:

$$(A+C)B = AB + CB = AB + AD = A(B+D) \;\Rightarrow\; \frac{A+C}{B+D} = \frac{A}{B} = \frac{C}{D}$$

Vamos por el problema. Supongamos que $p_1 \neq 0$, entonces:

$$\left(\frac{a_1}{b_1}\right)^n = \frac{a_1^n}{b_1^n} = \frac{p_1 a_1^n}{p_1 b_1^n}$$

Si $p_2 = 0$, entonces:

$$\left(\frac{a_1}{b_1}\right)^n = \frac{p_1 a_1^n}{p_1 b_1^n} = \frac{p_1 a_1^n + p_2 a_2^n}{p_1 b_1^n + p_2 b_2^n}$$

Si $p_2 \neq 0$, entonces:

$$\left(\frac{a_1}{b_1}\right)^n = \left\{ \begin{array}{r} = \dfrac{p_1 a_1^n}{p_1 b_1^n} \\ = \left(\dfrac{a_2}{b_2}\right)^n = \dfrac{a_2^n}{b_2^n} = \dfrac{p_2 a_2^n}{p_2 b_2^n} \end{array} \right\} \overset{\text{lema}}{\Rightarrow} \left(\frac{a_1}{b_1}\right)^n = \frac{p_1 a_1^n + p_2 a_2^n}{p_1 b_1^n + p_2 b_2^n}$$

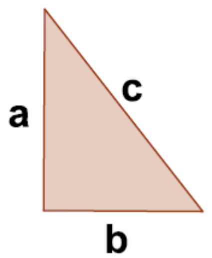
Si $p_3 = 0$, entonces

$$\left(\frac{a_1}{b_1}\right)^n = \frac{p_1 a_1^n + p_2 a_2^n}{p_1 b_1^n + p_2 b_2^n} = \frac{p_1 a_1^n + p_2 a_2^n + +p_3 a_3^n}{p_1 b_1^n + p_2 b_2^n + p_3 b_3^n}$$

Si $p_3 \neq 0$, entonces

$$\left(\frac{a_1}{b_1}\right)^n = \left\{ \begin{array}{r} = \dfrac{p_1 a_1^n + p_2 a_2^n}{p_1 b_1^n + p_2 b_2^n} \\ = \left(\dfrac{a_3}{b_3}\right)^n = \dfrac{a_3^n}{b_3^n} = \dfrac{p_3 a_3^n}{p_3 b_3^n} \end{array} \right\} \overset{\text{lema}}{\Rightarrow} \left(\frac{a_1}{b_1}\right)^n = \frac{p_1 a_1^n + p_2 a_2^n + p_3 a_3^n}{p_1 b_1^n + p_2 b_2^n + p_3 b_3^n}$$

Noviembre 30: Sea c la hipotenusa de un triángulo rectángulo con catetos a y b. Probar que $a + b \leq \sqrt{2}c$. ¿Cuándo se da la igualdad?



Solución: Tendremos:

$$(a + b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab = \{\text{Pitágoras}\} = c^2 + 2ab$$

Como la función $y = \sqrt{x}$ es inyectiva

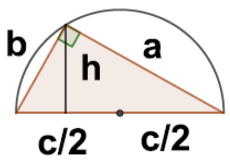
$$a + b = \sqrt{c^2 + 2ab} \qquad (*)$$

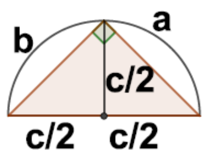
Ahora:

$$0 \leq (a - b)^2 = a^2 + b^2 - 2ab = c^2 - 2ab \;\Rightarrow\; c^2 - 2ab \geq 0 \;\Rightarrow\; c^2 \geq 2ab$$

Y por último en (*) tenemos, al ser $y = \sqrt{x}$ creciente:

$$a + b = \sqrt{c^2 + 2ab} \leq \sqrt{c^2 + c^2} = c\sqrt{2}$$





La igualdad se da cuando $c^2 = 2ab$. El área del triángulo puede calcularse como:

$$\frac{c \cdot h}{2} = \frac{ab}{2} \Rightarrow ch = ab$$

Si $c^2 = 2ab$

$$\frac{c^2}{2} = ch \;\Rightarrow\; h = \frac{c}{2}$$

Es decir, la igualdad se da, cuando el triángulo, aparte de ser rectángulo, es isósceles, es decir un triángulo 90°-45°-45°