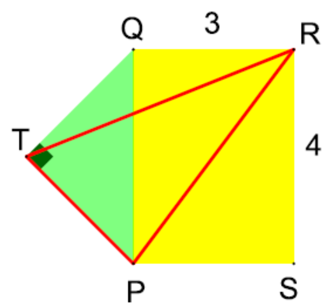
SOLUCIONES DICIEMBRE 2019

PROBLEMAS PARA SEGUNDO CICLO DE LA E.S.O. Autores: Colectivo "Concurso de Primavera" (https://www.concursoprimavera.es/#concurso). Comunidad de Madrid

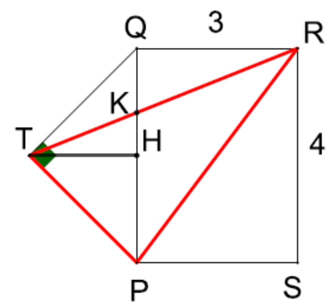


Diciembre 1-7-8: En el dibujo se puede observar un rectángulo PQRS y un triángulo rectángulo isósceles ΔPTQ. Si RS = 4 y QR = 3, hallar el área del triángulo ΔPTR

Solución 1: Para conseguir el área pedida, vamos a dividir el triángulo ΔPTR en dos triángulos ΔPKT y ΔPKR. Los dos tienen la misma base PK y las alturas son HT y QR.

Como el triángulo ΔPTQ es isósceles, la altura cae en la mitad de la hipotenusa y aplicando el teorema de la altura tenemos que $TH^2 = 2\cdot 2$, por tanto, TH = 2.

Ahora tenemos que ΔRQK ≅ ΔTHK ya que los dos son rectángulos y tienen ángulos opuestos por el vértice



$$\frac{TH}{QR} = \frac{HQ}{QK} = \frac{2}{3}$$

Como HK + QK = 2, tenemos:

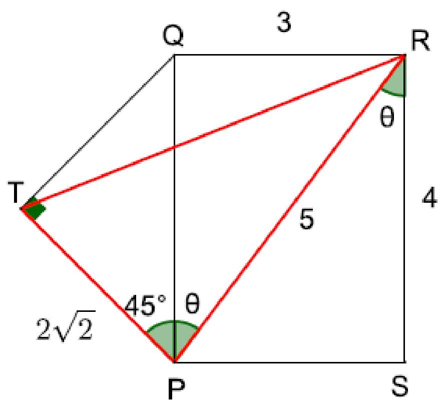
$$\frac{2}{3} = \frac{HK}{2 - HK} \quad \Rightarrow \quad HK = \frac{4}{5}$$

Por último:

$$PK = 2 + \frac{4}{5} = \frac{14}{5}$$

Y ya tenemos el área:

$$A = \frac{\frac{14}{5}\cdot 2}{2} + \frac{\frac{14}{5}\cdot 3}{2} = 7$$



Solución 2: Tendremos, fácilmente, las medidas de la ilustación adjunta.
En ΔRPS, tenemos:

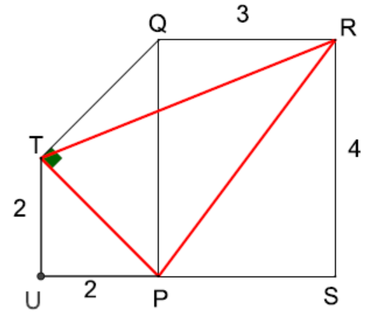
$$\text{sen}\theta = \frac{3}{5}, \qquad \cos\theta = \frac{4}{5}$$

Por lo que:

$$\text{sen}(\theta + 45) = \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{4}{5} + \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{3}{5} = \frac{7\sqrt{2}}{12}$$

Por último:

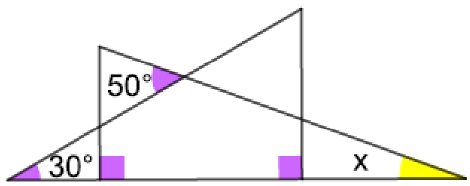
$$A_{\Delta PRT} = \frac{1}{2}\cdot 2\sqrt{2}\cdot 5\cdot \text{sen}(\theta + 45) = 7$$

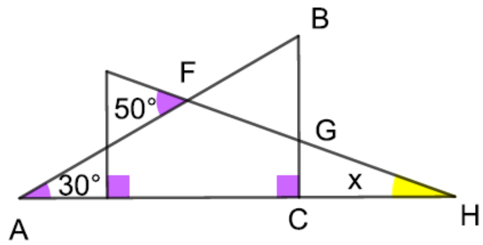


Solución 3 (Ignacio Larrosa Cañestro): Tendremos, fácilmente, las medidas de la ilustación adjunta. Y entonces:

$$A_{\Delta TPR} = A_{TUSR} - A_{\Delta TUP} - A_{\Delta PSR} = \frac{2+4}{2}\cdot 5 - \frac{2\cdot 2}{2} - \frac{4\cdot 3}{2}$$
$$= 3\cdot 5 - 2\cdot 1 - 2\cdot 3 = 7$$

Diciembre 2: ¿Cuál es el valor de x?





Solución: En ΔABC tenemos que ∠B = 60°. En ΔFGB tenemos ∠F = 50° (por opuestos por el vértice). Luego ∠G = 70°. En ΔCHG, tenemos: ∠G = 70° (por opuestos por el vértice) y como ∠C = 90°, tendremos por fín x = 20°

Diciembre 3: ¿Cuántos enteros n con 5000 ≤ n ≤ 6000 verifican que el producto de sus cifras es cero?

Solución: Contaremos los que empiezan por 5 y no tienen ningún cero. El 5 es la única posibilidad para las unidades de millar. Para las centenas, decenas y unidades tenemos 9 posibilidades (1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9). Por lo tanto, hay: 1·9·9·9 = 729 números entre 5000 y 6000 sin ceros en sus cifras. Por lo tanto, números entre 5000 y 6000, con algún cero en sus cifras hay (1001 – 729 =) 272

Diciembre 4: Halla todos los naturales x tales que al dividir 109 entre x da resto 4.

Solución: Sea q uno de los naturales buscados. Tendremos: qx + 4 = 109 (con q > 4) o equivalentemente qx = 105 = 3·5·7. Los divisores de 105, mayores que 4, son 5, 7, 15, 21, 35 y 105. Hay por tanto 6 naturales que al dividir a 109 dan resto 4

Diciembre 5-6: En una bolsa hay dos bolas rojas y dos azules y en una segunda bolsa hay dos rojas, dos azules y x verdes. Se saca de cada una de las dos bolsas dos bolas, sin reemplazamiento y resulta que la probabilidad de que las dos bolas sean del mismo color es igual en una bolsa que en la otra. Hallar el valor de x

Solución: La probabilidad de sacar dos bolas del mismo color de la primera bolsa es:

$$\mathrm{P(obtener\ dos\ rojas\ o\ dos\ azules)} = \frac{2}{4}\cdot\frac{1}{3} + \frac{2}{4}\cdot\frac{1}{3} = \frac{1}{3}$$

En la segunda bolsa, la probabilidad de sacar dos bolas del mismo color es:

$$\mathrm{P(obtener\ dos\ rojas\ o\ dos\ azuleso\ dos\ verdes)} = \frac{2}{4+x}\cdot\frac{1}{3+x}+\frac{2}{4+x}\cdot\frac{1}{3+x}+\frac{x}{4+x}\cdot\frac{x-1}{3+x}$$
$$= \frac{x^2-x+4}{(4+x)(3+x)}$$

Resolviendo la ecuación que se obtiene al igualar las dos probabilidades, obtenemos que x = 0 o x = 5.

Diciembre 9: Resolver en el conjunto de los enteros la ecuación: **x + xy = 391**

Solución: Tendremos:

$$x(1+y) = 391 = 17\cdot 23$$

Y de acuerdo con la unicidad de la factorización en número primos, tenemos:

x	1+y	y
1	391	390
-1	-391	-392
17	23	22
-17	-23	-24
23	17	16
-23	-17	-18
391	1	0
-391	-1	-2

Diciembre 10-11: Recorriendo el mismo camino, Dani hace la primera mitad a 6 km/h y el resto a 12 km/h, mientras que Laia en el primer tercio camina sólo a 5 km/h, pero el resto lo hace a 15 km/h. Si Dani tardó x horas en hacer todo el camino y Laia tardó y horas, ¿cuál es el cociente x/y?

Solución: Recordemos que:

$$\mathrm{tiempo} = \frac{\mathrm{distancia}}{\mathrm{velocidad}}$$

El tiempo que tarda Dani es:

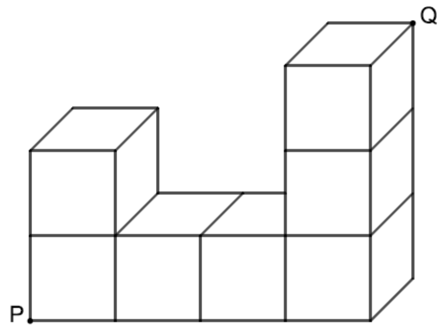
$$x = \frac{\frac{d}{2}}{6}+\frac{\frac{d}{2}}{12} = \frac{d}{8}$$

El tiempo que tarda Laia es:

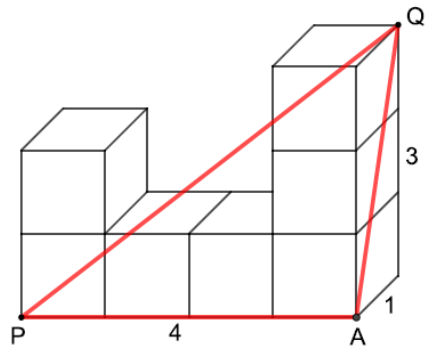
$$y = \frac{\frac{d}{3}}{5}+\frac{\frac{2d}{3}}{15} = \frac{d}{9}$$

Luego:

$$\frac{x}{y} = \frac{\frac{d}{8}}{\frac{d}{9}} = \frac{9}{8}$$



Diciembre 12-13: En la figura, cada uno de los siete cubos tiene arista
1. Hallar la distancia desde P hasta Q



Solución: Tendremos

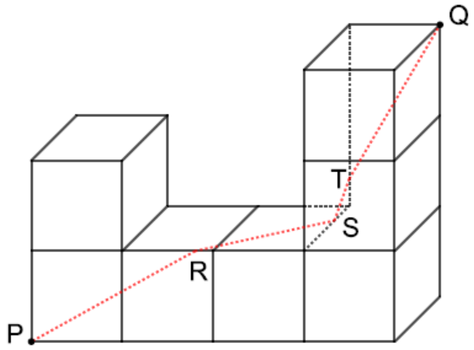
$$AQ = \sqrt{3^2 + 1^2} = \sqrt{10}$$

$$PQ = \sqrt{PA^2 + AQ^2} = \sqrt{16 + 10} = \sqrt{26}$$

Si hubiese que calcular la mínima distancia entre los puntos P y Q, pudiendose trasladarse unicamente por el exterior de los siete cubos, tendríamos:

1.- Podemos prescindir del cubo que está encima del cubo al que pertenece el punto P, pues sólo aumenta la distancia el considerarlo.

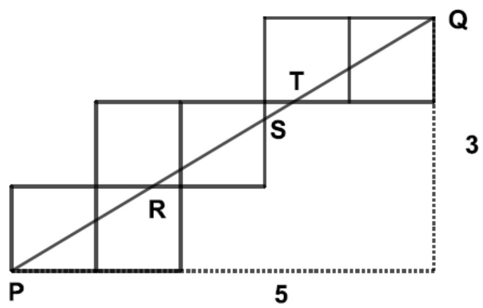
2.- Trasladándonos por aristas de los cubos la distancia sería 8



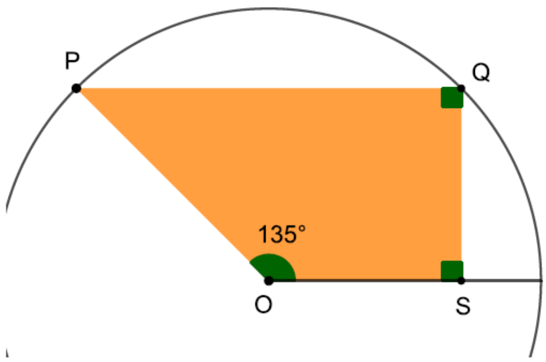
3.- La menor distancia se conseguirá con un camino como el marcado en la figura

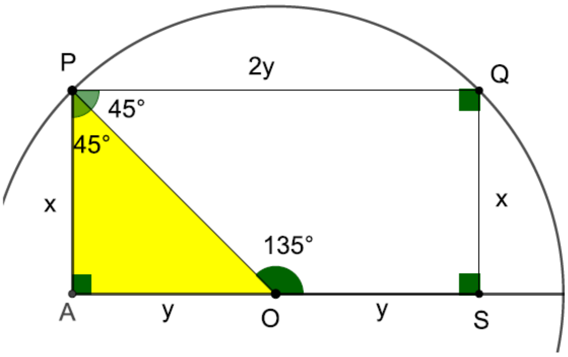
4.- La menor distancia(por el exterior) será:

$$PQ = \sqrt{5^2 + 3^2} = \sqrt{34}$$



<u>Diciembre 14-15:</u> En la ilustración de la derecha la circunferencia de centro O tiene radio 12 cm. Averiguar el área del trapecio POSQ





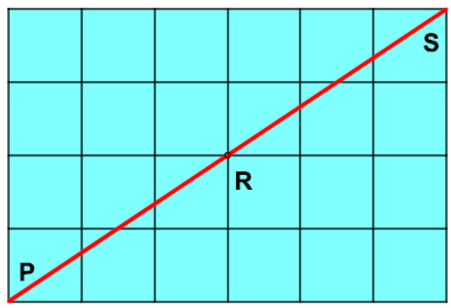
<u>Solución:</u> En OPQS, tendremos ∠OPQ = 45° (= 360 – (90 + 90 + 135)). Si A es el pie de la perpendicular por P al diámetro que contiene a o y a S, tendremos ∠OAP = 90° y ∠OPA = 45° ⇒ ΔOAP es rectángulo isósceles ⇒ x = y. Como, además, OP = 12:

$$x^2 + x^2 = 12^2 \quad \Rightarrow \quad x = 6\sqrt{2}$$

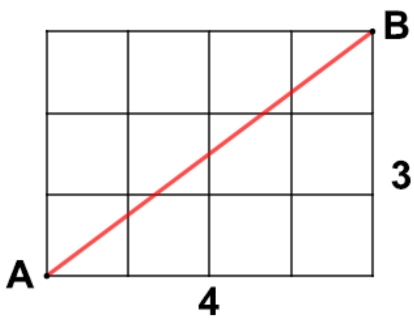
Y, por último:

$$A_{OPQS} = \frac{6\sqrt{2} + 12\sqrt{2}}{2} \cdot 6\sqrt{2} = 108$$

<u>Diciembre 16-17:</u> Se observa una cuadrícula 6x4. Una diagonal del rectángulo pasa por sólo tres vértices de la cuadrícula: P, R y S. Si el rectángulo fuera de 60x45, ¿por cuántos vértices de la cuadrícula pasaría una diagonal?



<u>Solución:</u> Tenemos: mcd (60, 45) = 15. Y como 60 x 45 = (4 x 15) x (3 x 15), tenemos que una cuadrícula 60 x45 puede entenderse formada por 15 retículos de 4x3, en lo que respecta a las celdas cercanas a la diagonal. (De otra manera: La pendiente de la diagonal es 45/60 = ¾. Es decir, si estamos en un punto de la diagonal y nos trasladamos a la derecha cuatro unidades en el eje de las X y subimos tres unidades en el eje de las Y estamos otra vez en un punto de la diagonal)



Cada uno de estos retículos contiene un punto de la diagonal (el punto inferior) salvo el último que contiene dos puntos (el inferior y el superior). Por tanto, 16 puntos de la diagonal son vértices de la cuadrícula.

Diciembre 18: Halla el valor de x, y y z que son dígitos diferentes y no nulos, para que la suma de la derecha esté bien realizada

$$\begin{array}{r} x\ x\ x \\ y\ y\ y \\ +\ z\ z\ z \\ \hline z\ y\ y\ x \end{array}$$

Solución: Empecemos por z. Mirando la suma, z sólo puede ser 1, ya que, si fuese 2 o superior, $x + y + z \geq 20$, solo podría ser si x = y = 9, pero esto no es posible ya que el enunciado dice que $x \neq y \neq z$. Por tanto, z = 1. Miremos las unidades: x + y + 1 =10 + x. Por lo tanto y = 9. Por último, de la columna de las decenas, tenemos: x + 9 + 1 + 1 =19. De donde, x = 8

Diciembre 19: ¿Cuántos números capicúas de cinco cifras existen que cumplan la condición de que cuatro de ellas sean iguales y la otra diferente?

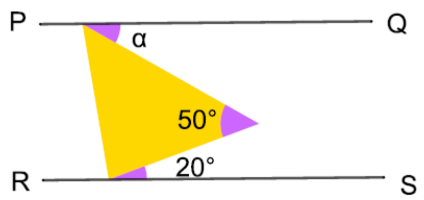
Solución: Como estamos hablando de capicúas de cinco cifras, está claro que la cifra diferente ha de ser la central y las otras cuatro todas iguales.

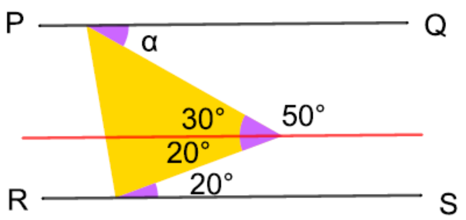
Si la cifra central es 0, hay nueve capicúas: 11011, 22022, 33033, ···· , 99099

Si la cifra central es x ($\in\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$) hay ocho capicúas. Por ejemplo, si x = 3, los capicúas son: 11311, 22322, 44344, ···· , 88388, 99399:

En total, hay (9 + 9·8 =) 81 capicúas

Diciembre 20: En la figura PQ//RS. Hallar el ángulo α





Solución: Obviamente $\alpha = 30°$. Solamente hay que dibujar una paralela a RS que pase por el vértice del ángulo que mide 50° y recordar la igualdad de ángulos alternos internos

Diciembre 21-22: Para el número $\overline{\mathrm{abcd}}$ ($a \neq 0$) se genera $\Sigma = \overline{\mathrm{abcd}} + \overline{\mathrm{bcd}} + \overline{\mathrm{cd}} + \overline{\mathrm{d}}$, por ejemplo, para el número 4089 tenemos Σ = 4089 + 089 + 89 + 9 = 4276. Hallad los números que cumplen Σ = 2014

Solución: Tendremos:

$$\overline{\mathrm{abcd}} = \mathrm{a} \cdot 1000 + \mathrm{b} \cdot 100 + \mathrm{c} \cdot 10 + \mathrm{d}$$

con lo que:

$$\begin{aligned} \Sigma = \overline{\mathrm{abcd}} + \overline{\mathrm{bcd}} + \overline{\mathrm{cd}} + \overline{\mathrm{d}} &= \mathrm{a} \cdot 1000 + \mathrm{b} \cdot 100 + \mathrm{c} \cdot 10 + \mathrm{d} + \mathrm{b} \cdot 100 + \mathrm{c} \cdot 10 + \mathrm{d} + \mathrm{c} \cdot 10 + \mathrm{d} + \mathrm{d} \\ &= \mathrm{a} \cdot 1000 + \mathrm{b} \cdot 200 + \mathrm{c} \cdot 30 + 4\mathrm{d} = 2014 \end{aligned}$$

Por lo tanto, 4d termina en 4. Repasando la tabla de multiplicar del 4 tendremos que 4d = 4 o 4d = 24, es decir d = 1 o d = 6. Si d = 6, 3c acabaría en 9 y (repasando la tabla de multiplicar del 3) esto solo puede ser si c = 3. En este caso 2b debería de acabar en 9 y esto es imposible pues 2b acaba en cifra par.

Si d = 1, 3c acabaría en 1 y esto ocurre sii c = 7. Y en este caso 2b debería de acabar en 8 y repasando la tabla de multiplicar del dos tenemos que b = 4 o b = 9. Si b = 9, entonces a = 0 y esto es imposible. Por tanto, b = 4 y además que a = 1.

Solo obtenemos el número 1471.

Diciembre 23: Si

$$\frac{(n+3)!}{n!} = 2^3 \cdot 3^3 \cdot 7 \cdot 13$$

¿cuál es el factor primo más grande de n?

Solución: Tenemos:

$$\frac{(n+3)!}{n!} = (n+3)(n+2)(n+1) = 2^3 \cdot 3^3 \cdot 7 \cdot 13$$

Puesto que entre tres naturales consecutivos solo uno es múltiplo de tres, de entre n +1, n + 2 y n + 3 solo uno contiene a 3^3 = 27. Tenemos entonces, por tanteo, que como:

$$\frac{2^3 \cdot 7 \cdot 13}{26} = \frac{728}{26} = 28$$

Los tres naturales consecutivos son: 26, 27 y 28. Por tanto n = 25 = 5^2. Luego la contestación a la pregunta es 5

Solución 2 (Isabel Font @asitnof): Tenemos:

$$\frac{(n+3)!}{n!} = (n+3)(n+2)(n+1) = 2^3 \cdot 3^3 \cdot 7 \cdot 13$$

Es decir:

$$(n+3)(n+2)(n+1) = 6^3 \cdot 91$$

Puesto que $y = \sqrt[3]{x}$ es creciente, hay que buscar posibles factores entre

$$6 \cdot 4 = 24 < 6 \cdot \sqrt[3]{91} < 6 \cdot 5 = 30$$

Toda cuadra si tomamos n + 2 = 27. Así, que n = 25 = 5^2. Y 5 es la contestación a la pregunta del problema.

Diciembre 24: Un comerciante desea saber a qué precio debe etiquetar un producto que compró por 200 € para que al hacer una rebaja del 20% obtenga un beneficio del 25% sobre el precio al que compró el producto.

Solución: Si x es el precio al que ha de etiquetar la prenda, se debe cumplir que una rebaja del 20% de x ha de producir como resultado (200 + 25% de 200 =) 250. Por lo tanto:

$$x \cdot \left(1 - \frac{20}{100}\right) = 250 \quad \Rightarrow \quad x = \frac{250}{0{,}8} = 312{,}50$$

Diciembre 25: En una bolsa metemos los primeros 20 números primos y luego sacamos, simultáneamente, dos, ¿cuál es la probabilidad de que la suma de ellos sea par?

Solución: Los casos posibles son las formas de escoger (no importa el orden y no se pueden repetir) dos números de un total de 20, es decir los casos posibles son C_2^{20}.

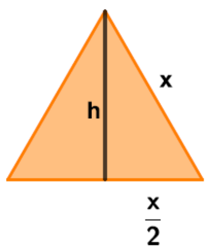
Para que la suma de dos números sea par, los dos han de tener la misma paridad (es decir los dos han de ser pares o los dos impares). Como el único primo par es 2, tendremos que la única posibilidad de que la suma de primos sea par es que los dos sean impares. En definitiva, los casos favorables son C_2^{19}. En definitiva:

$$\frac{C_2^{19}}{C_2^{20}} = \frac{\binom{19}{2}}{\binom{20}{2}} = \frac{9}{10}$$

Diciembre 26: El área de un hexágono regular en cm^2 viene dado por el mismo número que su perímetro en cm, ¿cuántos cm mide su lado?

Solución: El hexágono regular se compone de seis triángulos equiláteros. Por tanto, tendremos que si x es el lado del hexágono su perímetro es 6x y su área es:

$$6 \cdot \frac{\text{base} \cdot \text{altura}}{2} = 6 \cdot \frac{x^2\sqrt{3}}{4}$$



$$h = \sqrt{x^2 - \frac{x^2}{4}} = \frac{x\sqrt{3}}{2}$$

Por tanto, se plantea la ecuación:

$$6x = 6 \cdot \frac{x^2\sqrt{3}}{4}$$

cuya solución es:

$$x = \frac{4}{\sqrt{3}}$$

Diciembre 27-28: Consideremos el conjunto de todas las fracciones x/y siendo x e y naturales primos entre sí, ¿cuántas de estas fracciones verifican que aumentando una unidad el numerador y el denominador, el valor de la fracción aumenta un 10%?

Solución: Tendremos del enunciado:

$$\frac{x+1}{y+1} = 1{,}1\frac{x}{y}$$

Simplificando la ecuación:

$$\frac{10x+10}{y+1} = \frac{11x}{y} \ \Rightarrow\ 10xy + 10y = 11xy + 11x \ \Rightarrow\ 0 = xy + 11x - 10y \ \Rightarrow\ 0 = x(y+11) - 10y$$
$$\Rightarrow\ 0 = x(y+11) - 10y - 110 + 110 \ \Rightarrow\ 0 = x(y+11) - 10(y+11) + 110$$
$$\Rightarrow\ -110 = (x-10)(y+11) \ \Rightarrow -2 \cdot 5 \cdot 11 = (x-10)\cdot(y+11)$$

Es decir:

$$2 \cdot 5 \cdot 11 = (10 - x)(y + 11)$$

Por la unicidad de la descomposición factorial en producto de primos tenemos tres posibles valores para el primer paréntesis:

$$10 - x \in \{1, 2, 5\}$$

ya que los demás valores posibles para el primer paréntesis (10, 11, 22, 55y 110) hacen que x sea negativo o cero en contra de que x sea natural.

Si $10 - x = 1 \ \Rightarrow\ x = 9 \ \Rightarrow\ y + 11 = 110 \ \Rightarrow\ y = 99$ en contra de que x e y no tengan factores comunes.

Si $10 - x = 2 \;\Rightarrow\; x = 8 \;\Rightarrow\; y + 11 = 55 \;\Rightarrow\; y = 44$ en contra de que x e y no tengan factores comunes.

Si $10 - x = 5 \;\Rightarrow\; x = 5 \;\Rightarrow\; y + 11 = 22 \;\Rightarrow\; y = 11$ que es la única solución a la cuestión planteada

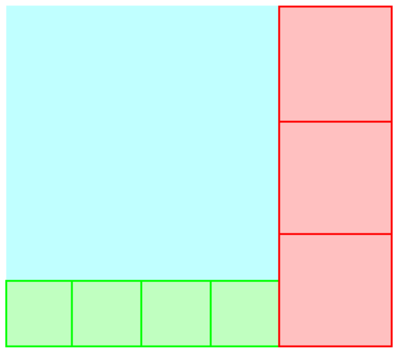
Diciembre 29: Una lista de cinco enteros positivos verifica que el único número que aparece más de una vez es el 8, la mediana es 9 y la media es 10. ¿Cuál es el mayor valor posible de todos ellos?

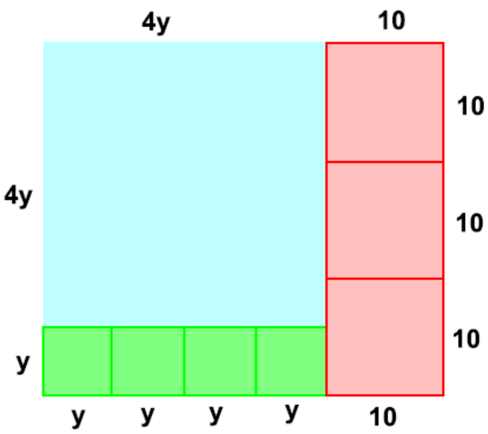
Solución: Como hay cinco (un número impar) datos, la mediana es un valor de la variable. Además, según el enunciado, como hay cinco datos y la mediana es 9, el 8 solo puede estar dos veces. De aquí, que, los datos (ordenados de menor a mayor) han de ser: 8, 8, 9, x, y. Como la media ha de ser 10, tenemos:

$$\frac{8+8+9+x+y}{5} = 10 \;\Rightarrow\; x + y = 25$$

Como x ha de ser mayor que 9 tendremos que los posibles valores de x e y son: 10 y 15 o 11 y 14 o 12 y 13. El mayor valor posible de los datos es, pues, 15.

Diciembre 30-31: Un rectángulo está dividido en 8 cuadrados, como indica la figura. Si el lado de los cuadrados de color rojo mide 10 cm, calcular el lado del cuadrado grande.





Solución: Del enunciado tendremos que los cuadrados rojos tiene lado 10. Si los cuadrados verdes tienen lado y, el lado (inferior) del cuadrado azul mide 4y (que coincide con el lado superior y el lado izquierdo). Al igualar la medida izquierda y derecha del rectángulo total tenemos

$$5y = 30 \;\Rightarrow\; y = 6$$

Por lo tanto el lado del cuadrado azul es (4·6 =) 24 cm