SOLUCIONES MARZO 2020

PROBLEMAS PARA BACHILLERATO. PROBLEMAS DE LA CMO (Canadian Mathematical Olympiad)

(https://cms.math.ca/Competitions/CMO/)

Selección: Rafael Martínez Calafat. Profesor jubilado

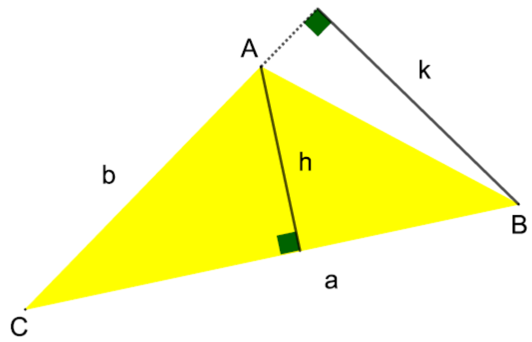
Marzo 1/8 (CMO 1970): ¿Qué naturales cumplen que el eliminar el dígito inicial lleva a un número que es un treintaicincoavo del natural inicial?

Solución: Sea N el número con primer dígito A y a continuación el número x con x con n dígitos (cuando N se representa en base 10). La exigencia del enunciado se transforma en la ecuación:

$$\frac{1}{35}N = x \;\Rightarrow\; N = 35x \;\Rightarrow\; A\cdot 10^n + x = 35x \;\Rightarrow\; A\cdot 2^n\cdot 5^n = 34x \;\Rightarrow\; A\cdot 2^{n-1}\cdot 5^n = 17x$$

De aquí, que, 17 divida a A. Pero esto es un absurdo pues A es un dígito. Luego no hay ningún natural de los solicitados por el enunciado

Marzo 2-3 (CMO 1970): Sea ΔABC un triángulo con a y b la medida de los lados opuestos a los ángulos $\angle A$ y $\angle B$.
Probar que si $\angle A$ es no agudo $a + h > b + k$.
Hallar, en qué condiciones, $a + h = b + k$



Solución: En primer lugar, tendremos:

$$\text{Área} = \frac{\text{base}\cdot\text{altura}}{2} = \begin{Bmatrix}\dfrac{b\cdot k}{2}\\ \dfrac{a\cdot h}{2}\end{Bmatrix} \;\Rightarrow\; b\cdot k = a\cdot h$$

Ahora, puesto que $\angle A$ es no agudo, tenemos:

$$a^2 \geq b^2 + k^2 = (b+k)^2 - 2bk = (b+k)^2 - 2ah \;\Rightarrow\; a^2 + 2ah \geq (b+k)^2$$

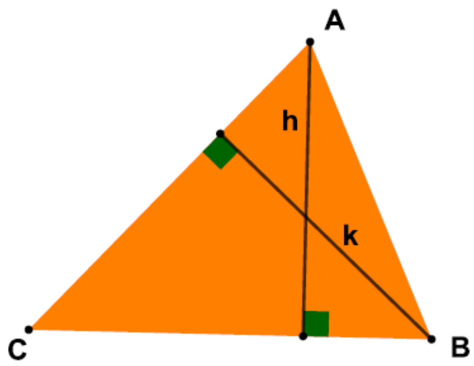
Y sumando a ambos lados h^2 (> 0), tenemos:

$$a^2 + h^2 + 2ah = (a+h)^2 \geq (b+k)^2 + h^2 > (b+k)^2 \;\Rightarrow\; (a+h)^2 > (b+k)^2$$

Por último, como $y = \sqrt{x}$ es estrictamente creciente: $a + h > b + k$

Respecto a, en qué condiciones $a + h = b + k$, tenemos: No se cumple la condición si $\angle A = 90°$, pues en este supuesto:

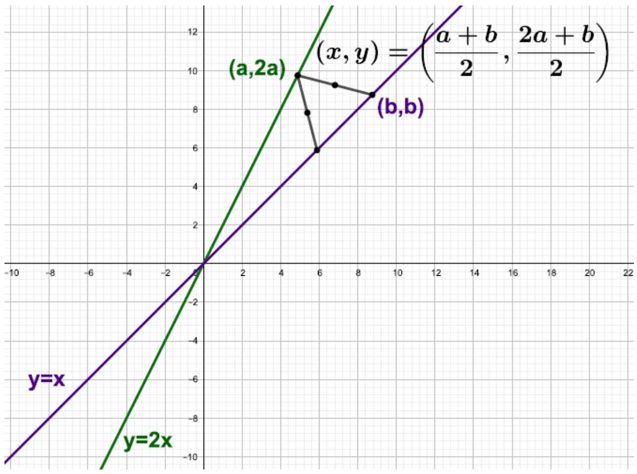
$$a^2 = b^2 + k^2 \;\Rightarrow\; a^2 + 2ah = (b+k)^2 \;\Rightarrow\; a^2 + 2ah + h^2 = (b+k)^2 + h^2 \;\Rightarrow\; (a+h)^2 > (b+k)^2$$



La igualdad se da si ∠A = ∠B, es decir si el triángulo es isósceles y estamos hablando de los lados iguales. En este caso:

$$\left.\begin{matrix} a = b \\ h = k \end{matrix}\right\} \Rightarrow \; a + h = b + k$$

<u>Marzo 4 (CMO 1970):</u> Consideremos los segmentos rectilíneos con un extremo situados sobre la recta y = x y el otro extremo situado en la recta y = 2x de longitud 4. Hallar la ecuación del lugar geométrico de los puntos medios de esos segmentos rectilíneos



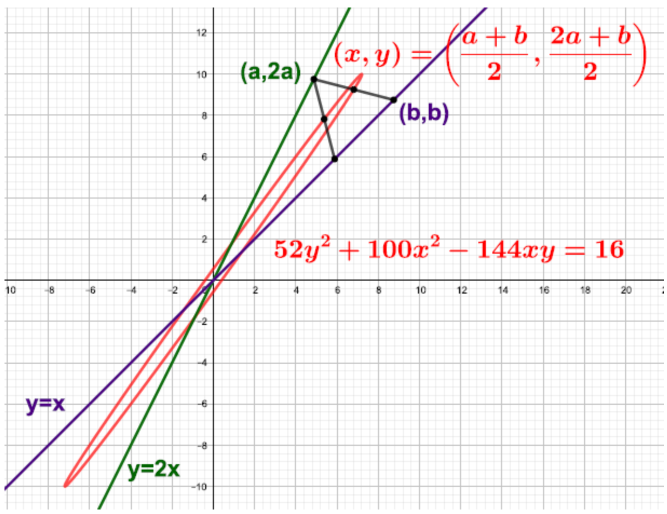
<u>Solución:</u> Tendremos

$$\left.\begin{matrix} 2x = a + b \\ 2y = 2a + b \end{matrix}\right\} \Rightarrow \begin{cases} a = 2y - 2x \\ b = 4x - 2y \end{cases} \quad (*)$$

Como la longitud de los segmentos es cuatro debe cumplirse:

$$\sqrt{(a-b)^2 + (2a-b)^2} = 4 \; (a-b)^2 + (2a-b)^2 = 16$$

Y sustituyendo, aquí, las igualdades (*), tenemos:



$$(2y - 2x - 4x + 2y)^2 + (4y - 4x - 4x + 2y)^2 = 16$$
$$(4y - 6x)^2 + (6y - 8x)^2 = 16$$
$$52y^2 + 100x^2 - 144xy = 16$$

<u>Marzo 5 (CMO 1970):</u> Hallar todos los naturales con dígito inicial 6 tales que el natural formado eliminando ese 6 es un veinticincoavo del natural original

<u>Solución:</u> Si N empieza (por la izquierda) con 6 y los demás dígitos forman el natural x debe cumplirse:

$$\frac{1}{25}N = x \;\Rightarrow\; N = 25x \;\Rightarrow\; 6 \cdot 10^n + x = 25x \;\Rightarrow 6 \cdot 10^n = 24x \;\Rightarrow 2 \cdot 3 \cdot 2^n \cdot 5^n = 2^3 \cdot 3 \cdot x$$
$$\Rightarrow\; 2^{n-2} \cdot 5^n = x \;\Rightarrow\; 25 \cdot 10^{n-2} = x$$

Luego los naturales buscados son:

$$N = 625 \cdot 10^{n-2}$$

Marzo 6-7 (CMO 1070): Dado el polinomio:

$$\mathbf{f(x) = x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2}+\cdots+ a_{n-1}x + a_n}$$

con coeficientes enteros a_1, a_2,...., a_n y dado que existen cuatro enteros distintos a, b, c y d tales que

$$\mathbf{f(a) = f(b) = f(c) = f(d) = 5}$$

probar que no hay entero k tal que f(k) = 8

Solución: Definimos h(x) = f(x) – 5. Entonces a, b, c y d son raíces de h(x). Por lo tanto, tendremos:

$$h(x) = (x - a)\cdot(x - b)\cdot(x - c)\cdot(x - d)\cdot g(x).$$

Pudiera ser que g(x) contenga a alguno de los primeros factores. Si es así, los sacamos fuera de la expresión de g(x). Es decir, podemos suponer que

$$h(x) = (x-a)^{\alpha}\cdot(x-b)^{\beta}\cdot(x-c)^{\delta}\cdot(x-d)^{\eta}\cdot g(x)$$

con g(x) sin contener ninguno de los primeros factores. Si suponemos que existe k con f(k) = 8 tendremos que h(k) = f(k) – 5 = 8 – 5 = 3, pero:

$$h(k) = (k-a)^{\alpha}\cdot(k-b)^{\beta}\cdot(k-c)^{\delta}\cdot(k-d)^{\eta}\cdot g(k) = 3 = (-3)\cdot 1(-1) = 3\cdot 1 = (-3)\cdot(-1) = 3$$

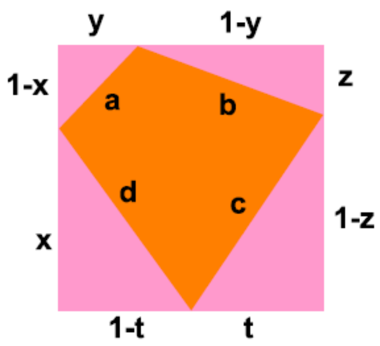
En la parte izquierda tenemos cinco naturales distintos con producto igual a 3 y esto contradice que 3 solamente se pueda expresar como el producto de tres, dos o un naturales distintos.

Marzo 9 (CMO 1970): Un cuadrilátero tiene cada uno de sus vértices en cada uno de los lados de un cuadrado de lado 1. Probar que las longitudes del cuadrilátero a, b, c y d satisfacen:

$$\mathbf{2 \leq a^2+b^2+c^2+d^2 \leq 4}$$

Solución: Tendremos, aplicando el teorema de Pitágoras a cada uno de los cuatro triángulos rectángulos que se generan:

$$a^2 = y^2 + (1-x)^2$$
$$b^2 = z^2 + (1-y)^2$$
$$c^2 = t^2 + (1-z)^2$$
$$d^2 = x^2 + (1-t)^2$$



Y sumando estas cuatro igualdades:

$$a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = y^2 + (1-y)^2 + z^2 + (1-z)^2 + t^2 + (1-t)^2 + x^2 + (1-x)^2$$

Y agrupando los sumandos del segundo miembro dos a dos:

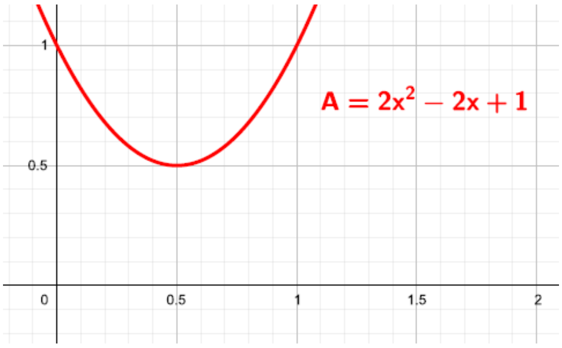
$$a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = (1 - 2y + 2y^2) + (1 - 2z + 2z^2) + (1 - 2t + 2t^2) + (1 - 2x + 2x^2) \quad (*)$$

Consideremos cada uno de los paréntesis: La expresión $A = 1 - 2x + 2x^2$ es una parábola dirigida hacia arriba (pues a = 2 > 0), con vértice

$$x_V = \frac{-b}{2a} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}; \quad y_V = \frac{2}{4} - 1 + 1 = \frac{1}{2}$$

que pasa por (0, 1) y por (1, 1). Por tanto, para $x \in [0, 1]$ se cumple:

$$\frac{1}{2} \leq 2x^2 - 2x + 1 \leq 1$$



Y esto es así para cada una de las expresiones del segundo miembro de (*). Por tanto:

$$2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \leq a^2 + b^2 + c^2 + d^2 \leq 1 + 1 + 1 + 1 = 4$$

Marzo 10-11 (CMO 1970): Tenemos algunas bolas en una urna. Cada bola es de color rojo o azul y hay al menos una de cada color. Cada bola pesa 5 g o 10 g y hay al menos una de cada peso. Probar que hay al menos dos bolas con color diferente y peso diferente

Solución: Supongamos la siguiente tabla de contingencia:

	rojo	azul	
5 g	x	z	x + z ≥ 1 (*)
10 g	y	t	y + t ≥ 1 (**)
	x + y ≥ 1 (***)	z + t ≥ 1 (****)	

(*) y (**) porque hay al menos una bola de cada peso

(***) y (****) porque hay al menos una bola de cada color

Los diferentes casos que se pueden dar son:

$$\begin{cases} x = 0 \begin{cases} t = 0 & (A) \\ t \neq 0 & (B) \end{cases} \\ x \neq 0 \begin{cases} t = 0 & (C) \\ t \neq 0 & (D) \end{cases} \end{cases}$$

En el caso (A) de (*) z ≥ 1 y de (***) y ≥ 1 y ya tenemos que hay al menos dos bolas con diferentes color y peso (al menos una bola azul y de 5 g y al menos una bola roja de 10 g)

En el caso (B) de (*) z ≥ 1 y de (***) y ≥ 1 y ya tenemos que hay al menos dos bolas con diferentes color y peso (al menos una bola azul y de 5 g y al menos una bola roja de 10 g)

En el caso (C) de (****) tendremos z ≥ 1 y de (**) y ≥ 1 y ya tenemos que hay al menos dos bolas con diferentes color y peso (al menos una bola azul y de 5 g y al menos una bola roja de 10 g)

En el caso (D) ya tenemos que hay al menos y ya tenemos que hay al menos dos bolas con diferentes color y peso (al menos una bola roja de 5 g y una bola azul de 10 g)

Marzo 12 (CMO 1970): Dados 3 puntos no alineados A, B y C, construir un círculo de centro C tal que una de las tangentes desde A y una de las tangentes desde B al círculo, sean paralelas

Solución: Los pasos a seguir son:

1.- Dibujar los tres puntos: A, B y C

2.- Dibujar el segmento f, que une A y B

3.- Hallar el punto medio C' del segmento AB

4.- Dibujar el segmento g, que une C y C'

5.- Dibujar h, paralela a g que pase por A.

6.- Dibujar i, paralela a g que pase por B.

7.- Dibujar j, perpendicular a h (y a i) que pase por C.

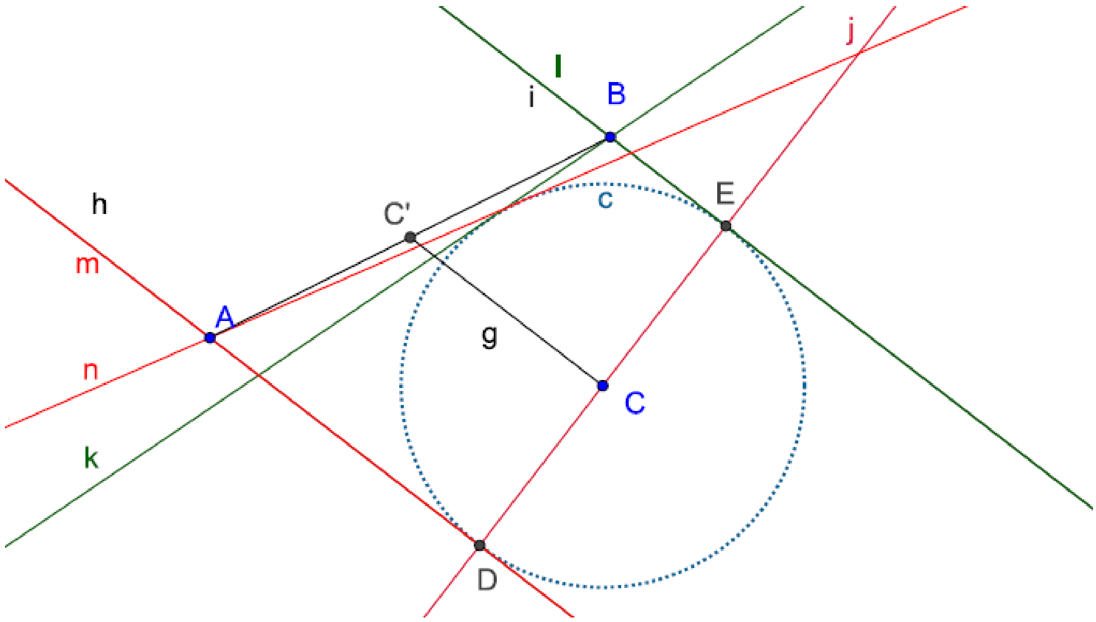
8.- Obtener la intersección de j con h y con i: D = j∩h; E = j∩i.

9.- Dibujar la circunferencia c, con centro C que pasa por D (o por E)

Comprobación:

10.- Dibujar las bisectrices a c por B: verde: k y l

11.- .- Dibujar las bisectrices a c por A: rojo: m y n (m = h; i = l)



Marzo 13 (CMO 1970): Probar que, dados cinco enteros positivos, no necesariamente distintos, siempre podemos escoger tres, cuya suma sea divisible por 3

Solución: Dados los cinco enteros positivos pueden ocurrir dos posibilidades: O bien hay tres o más enteros positivos que dan el mismo resto al dividirlos por tres o bien uno de los enteros positivos da un resto al dividirlo por tres, hay otros dos que dan otro resto al dividirlos por tres y otros dos que dan el último resto posible al dividirlos por tres.

Si hay tres o más enteros positivos con el mismo resto, tendremos:

$$\text{Si } x, y, z = 0(3) \Rightarrow x + y + z = 0(3)$$

$$\text{Si } x, y, z = 1(3) \Rightarrow x + y + z = 0(3)$$

$$\text{Si } x, y, z = 2(3) \Rightarrow x + y + z = 0(3)$$

Si hay un entero positivo que da un resto, dos enteros positivos que dan otro resto y dos últimos enteros positivos que dan el último resto posible, es suficiente coger un sumando en cada uno de estos tres grupos.

$$\text{Si } \begin{Bmatrix} x = 0(3) \\ y = 1(3) \\ z = 2(3) \end{Bmatrix} \Rightarrow \quad x + y + z = 0(3)$$

Marzo 15 (CMO 1970): Encontrar todas las ternas (x, y, z) tales que cualquiera de estos números añadido al producto de los otros dos, da como resultado 2.

Solución: La expresión algebraica del requerimiento del enunciado es:

$$\left.\begin{array}{r} x+yz=2 \\ y+zx=2 \\ z+xy=2 \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{array}{r} yz=2-x \\ zx=2-y \\ xy=2-z \end{array}\right\} \quad (*)$$

Ningún miembro de ninguna de las ecuaciones puede anularse. Por ejemplo, si el primer miembro de la primera ecuación es cero, entonces y = 0 o z = 0. Si y = 0 entonces el sistema queda:

$$\left.\begin{array}{r} x=2 \\ zx=2 \\ z=2 \end{array}\right\}$$

pero, la segunda ecuación está en contradicción con la primera y la tercera ecuación.

Aprovechando que x ≠ 0, tenemos:

$$(*) \Leftrightarrow \left.\begin{array}{r} yz=2-x \\ z=\dfrac{2-y}{x} \\ xy=2-z \end{array}\right\}$$

Sustituyendo z en la primera y tercera ecuación:

$$\left.\begin{array}{r} y\dfrac{2-y}{x}=2-x \\ xy=2-\dfrac{2-y}{x} \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{array}{r} 2y-y^2=2x-x^2 \\ x^2y-2x+2-y=0 \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{array}{c} (x+y)\cdot(x-y)=2(x-y) \\ x^2y-2x+2-y=0 \end{array}\right\} \quad (**)$$

De la primera ecuación tenemos: x – y = 0 (i. e. x = y) o x + y = 2.

Si x = y, la segunda ecuación de (**) queda:

$$x^3-3x+2=0=(x-1)^2\cdot(x+2)$$

	1	0	-3	2
1		1	1	-2
	1	1	-2	0
1		1	2	
	1	2	0	

Por tanto, x = 1 o x = - 2. Si x = 1, tendremos y = 1 y

$$z=\frac{2-1}{1}=1$$

Es decir, una solución del problema es (1, 1, 1)

Si x = - 2, tendremos que y = - 2 y

$$z=\frac{2-(-2)}{-2}=-2$$

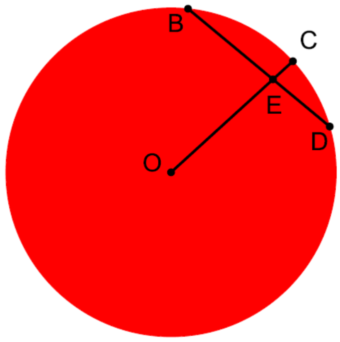
Es decir, otra solución es (- 2, - 2, -2)

Si y = 2 – x, la segunda ecuación de (**) queda:

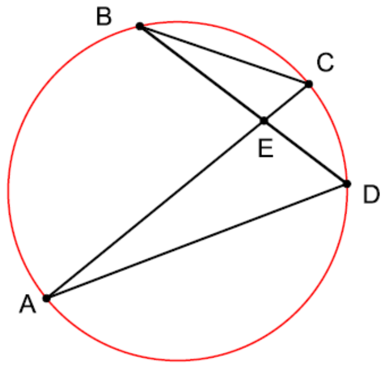
$$x^2(2-x)-2x+2-2+x=0 \Leftrightarrow x^3-2x^2+x=0 \Leftrightarrow x(x-1)^2=0 \underbrace{\Leftrightarrow}_{x\neq 0} x=1$$

Si x = 1 tendremos, y = 2 – 1 = 1 y

$$z=\frac{2-1}{1}=1$$

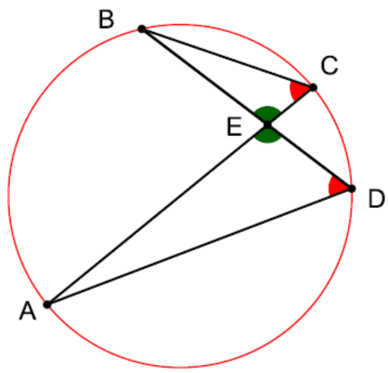


Marzo 16-17 (CMO 1971): DEB es una cuerda de un círculo tal que DE = 3 y EB = 5. Sea O el centro del círculo. Extendemos OE hasta cortar al círculo en C (ver ilustración). Dado que EC = 1, hallar el radio del círculo



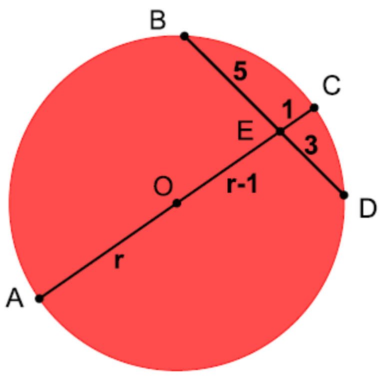
Solución: Lema previo: Sean AB y CD dos cuerdas de un círculo que se intersectan en E. Entonces:

$$\frac{\mathrm{BC}}{\mathrm{DA}}=\frac{\mathrm{CE}}{\mathrm{ED}}=\frac{\mathrm{BE}}{\mathrm{EA}} \quad \equiv \quad \begin{cases}\mathrm{BC}\cdot\mathrm{ED}=\mathrm{DA}\cdot\mathrm{CE}\\ \mathrm{CE}\cdot\mathrm{EA}=\mathrm{ED}\cdot\mathrm{BE}\end{cases}$$



Demostración: Los ángulos color verde son iguales por ser opuestos por el vértice y los ángulos color rojo también son iguales por abarcar el mismo arco (el arco $\widehat{\mathrm{BA}}$). Por lo tanto, $\Delta\mathrm{AED}\cong\Delta\mathrm{BCE}$ y de aquí:

$$\frac{\mathrm{BC}}{\mathrm{DA}}=\frac{\mathrm{CE}}{\mathrm{ED}}=\frac{\mathrm{BE}}{\mathrm{EA}}$$



Vayamos al problema. Si trazamos el diámetro por C, tendremos la ilustración a la derecha y aplicando a ella el lema tendremos:

BE·ED = EC·EA $\Rightarrow$ 5·3 = 1·(2r – 1) $\Rightarrow$ r = 8

Marzo 18 (CMO 1970): Sea f(n) la suma de los primeros n términos de la sucesión: 0, 1, 1, 2, 2, 3, 3, 4, 4, 5, 5, ... Dar una fórmula para f(n) y probar que f(s + t) – f(s – t) = st donde s y t son enteros positivos y s > t

Solución: Podemos ordenar la colección de naturales de la siguiente forma:

1°	2°	3°	4°	5°	6°	7°	8°	9°	10°	11°	12°	13°	14°	15°	.....		
0		1		2		3		4		5		6		7	......	I	términos impares de f(n)
	1		2		3		4		5		6		7		......	P	términos pares de f(n)

Por ejemplo: f(10) lo obtendríamos de la siguiente manera:

1°	2°	3°	4°	5°	6°	7°	8°	9°	10°	11°	12°	13°	14°	15°	……		
0		1		2		3		4		5		6		7	….	I	términos impares de f(n)
	1		2		3		4		5		6		7		……	P	términos pares de f(n)

$$f(10)=\left\{\begin{matrix}\text{suma de los números situados}\\ \text{debajo y a la izquierda de }10^\circ\end{matrix}\right\}=0+1+2+3+4+1+2+3+4+5=25$$

A partir de esta disposición tenemos:

Si n = 2m

$$f(n)=\sum_{1}^{m-1} I+\sum_{1}^{m} P=\left\{\begin{matrix}\text{suma en la fila I}\\ \text{hasta } m-1+\text{suma}\\ \text{en la fila P hasta m}\end{matrix}\right\}=\frac{0+m-1}{2}m+\frac{1+m}{2}m=m^2=\frac{n^2}{4}$$

Si n = 2m + 1

$$f(n)=\sum_{1}^{m} I+\sum_{1}^{m} P=\left\{\begin{matrix}\text{suma en la fila I}\\ \text{hasta } m+\text{suma}\\ \text{en la fila P hasta m}\end{matrix}\right\}=\frac{0+m}{2}(m+1)+\frac{1+m}{2}m=m(m+1)=\frac{n^2-1}{4}$$

Para la segunda parte del problema distinguimos los siguientes casos:

1.- s y t pares

2.- s par y t impar

3.- s impar y t par

4.- s y t impares

Para 1 y 4, tenemos:

$$\left.\begin{matrix}f(s+t)=\dfrac{(s+t)^2}{4}\\ f(s-t)=\dfrac{(s-t)^2}{4}\end{matrix}\right\}\ \Rightarrow\ f(s+t)-f(s-t)=\frac{(s+t)^2}{4}-\frac{(s-t)^2}{4}=\frac{4st}{4}=st$$

Para 2 y 3, tenemos:

$$\left.\begin{matrix}f(s+t)=\dfrac{(s+t)^2-1}{4}\\ f(s-t)=\dfrac{(s-t)^2-1}{4}\end{matrix}\right\}\ \Rightarrow\ f(s+t)-f(s-t)=\frac{(s+t)^2-1}{4}-\frac{(s-t)^2-1}{4}=\frac{4st}{4}=st$$

<u>Marzo 19 (CMO 1971):</u> Sean x e y reales positivos tales que x + y = 1. Probar que:

$$\left(\mathbf{1}+\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{x}}\right)\left(\mathbf{1}+\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{y}}\right)\geq \mathbf{9}$$

<u>Solución:</u> Tenemos sucesivamente:

$$\left(1+\frac{1}{x}\right)\cdot\left(1+\frac{1}{y}\right)=\left(\frac{x+1}{x}\right)\cdot\left(\frac{y+1}{y}\right)=\frac{xy+x+y+1}{xy}=1+\frac{x+y+1}{xy}=\{x+y=1\}=1+\frac{2}{xy}\ (*)[$$

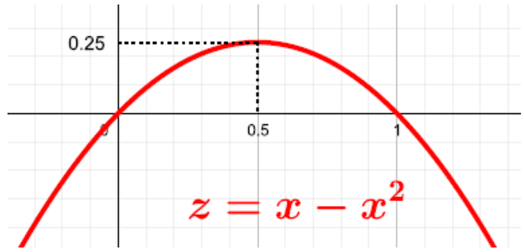
Consideremos la expresión xy con x + y = 1

$$z = z \cdot y = x \cdot (1 - x) = x - x^2$$

es una parábola dirigida hacia abajo con vértice:

$$x_V = \frac{-b}{2a} = \frac{1}{2}; \ z_V = \frac{1}{2} - \frac{1}{4} = \frac{1}{4}$$

que pasa por (0, 0) y por (1, 0). Por tanto, si $x \in [0, 1]$ entonces $x - x^2 = xy \leq \frac{1}{4} \ \Rightarrow \ \frac{1}{xy} \geq 4 \ \Rightarrow \ \frac{2}{xy} \geq 8$

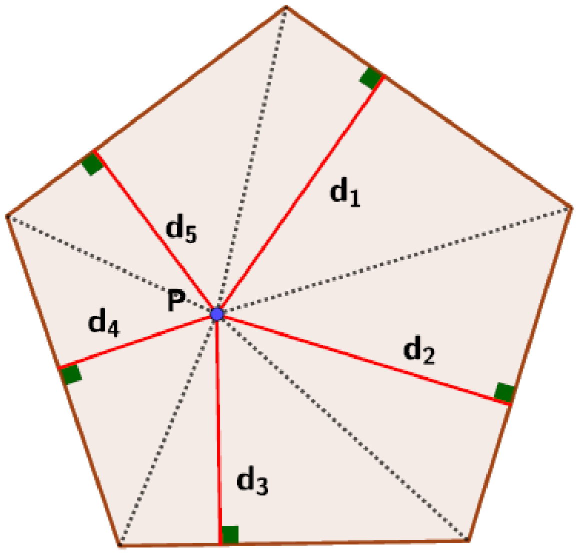


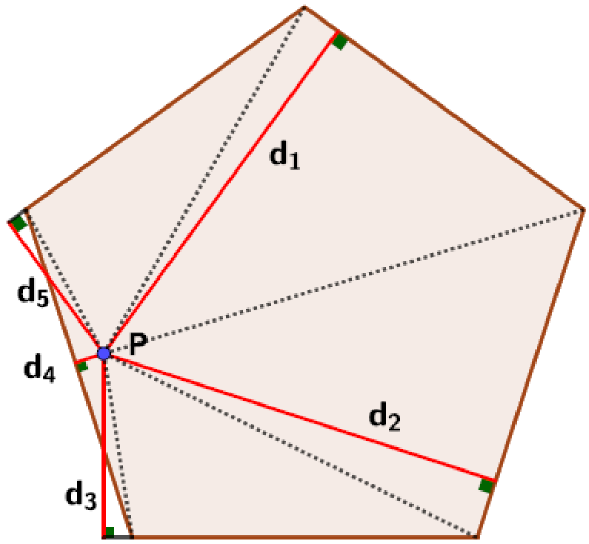
Por tanto, en (*) tenemos (x e y reales positivos tales que x + y = 1):

$$\left(1 + \frac{1}{x}\right) \cdot \left(1 + \frac{1}{y}\right) 1 + \frac{2}{xy} \geq 1 + 8 = 9$$

<u>Marzo 20-21 (CMO 1971):</u> Un pentágono regular está inscrito en un círculo de radio r. P es cualquier punto dentro del pentágono. Son dibujadas perpendiculares desde P a los lados o a las prolongaciones de los lados del pentágono. Probar que la suma de longitudes de esas perpendiculares es constante y expresar esa constante en función de r

<u>Solución:</u> Visualicemos el problema:



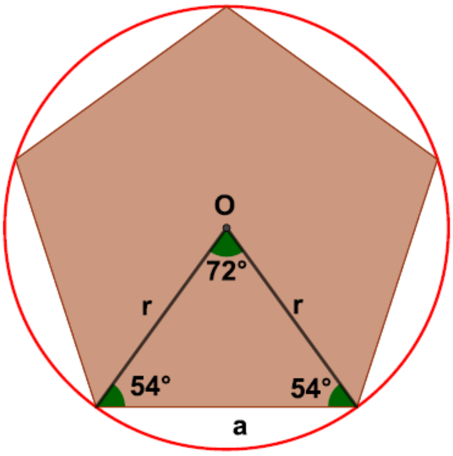


Hemos de probar que $\sum_{i=1}^{5} d_i$ es la misma independientemente de la posición del punto P y hallar esa cantidad únicamente en función del radio de la circunferencia en la que está inscrito el pentágono regular.

Los vértices del pentágono junto con el punto P, dividen el pentágono en cinco triángulos de base a (el lado del pentágono) y altura d_i. Tendremos entonces:

$$A = \left\{ \begin{array}{c} = \frac{15}{12} a^2 \sqrt{\frac{5 + 2\sqrt{5}}{5}} \\ = \frac{a \cdot d_1}{2} + \frac{a \cdot d_2}{2} + \frac{a \cdot d_3}{2} + \frac{a \cdot d_4}{2} + \frac{a \cdot d_5}{2} = \frac{a}{2} \sum_{1=1}^{5} d_i \end{array} \right\} \Rightarrow \sum_{i=1}^{5} d_i = \frac{15}{6} a \sqrt{\frac{5 + 2\sqrt{5}}{6}}$$

Para la segunda parte del problema tenemos:



El ángulo central correspondiente a una arista del pentágono es $\left(\frac{360}{5} =\right)$ 72°, y aplicando el teorema de los cosenos al triángulo de la figura:

$$a^2 = r^2 + r^2 - 2r \cdot r\cos(72°) = 2r^2\big(1 - \cos(72°)\big)$$

De donde:

$$a = r\sqrt{2}\sqrt{1 - \cos(72°)}$$

Por lo tanto:

$$\sum_{i=1}^{5} d_i = \frac{15}{6} a \sqrt{\frac{5 + 2\sqrt{5}}{6}} = \frac{15r\sqrt{2}}{6}\sqrt{1 - \cos\,(72°)}\sqrt{\frac{5 + 2\sqrt{5}}{6}}$$

<u>Marzo 22-29 (CMO 1971):</u> Sea:

$$\mathbf{P(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_{n-1}x + a_n}$$

donde los coeficientes a_i son enteros. Si P(0) y P(1) son ambos impares, probar que P(x) no tiene raíces enteras

<u>Solución:</u> Del enunciado tenemos:

$$\left.\begin{array}{r} P(0) = a_n \text{ es impar} \\ P(1) = \displaystyle\sum_{i=0}^{n} a_i \quad \text{es impar} \end{array}\right\} \Rightarrow \; P(1) - P(0) = \sum_{i=0}^{n-1} a_i \;\text{ es par}$$

Supongamos que el polinomio tiene una raíz entera. Caben dos posibilidades: que la raíz sea par o que sea impar.

Supongamos que la raíz es par. Entonces

$$a_i x^{n-i} \text{ es par } \forall i \in \{0, 1, 2, \cdots, n-1\} \;\Rightarrow\; \sum_{i=0}^{n-1} a_i x^{n-i} \;\text{ es par}$$

y como a_n es impar, tendremos que

$$0 = P(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^{n-i} \rightarrow\; 0 \text{ es (par + impar =) impar}$$

que es un absurdo.

Supongamos que la raíz es impar. Consideremos J el conjunto de subíndices de {0, 1, 2, ⋯ , n-1} para los que los coeficientes son impares

$$j \in J \quad \Leftrightarrow \quad a_j \text{ es impar}$$

$$i \in \bar{J} \quad \Leftrightarrow \quad a_i \text{ es par}$$

Como $\sum_{i=0}^{n-1} a_i$ es par tendremos que J tiene cardinalidad par. Además:

1.- para $j \in J$, $a_j x^{n-j}$ (impar · impar) es impar y como J tiene cardinalidad par:

$$\sum_{j\in J} a_j x^{n-j} \;\text{ es par}$$

2.- para $j \in \bar{J}$, $a_j x^{n-j}$ (par · impar) es par y, por tanto:

$$\sum_{j\in \bar{J}} a_j x^{n-j} \;\text{ es par}$$

luego:

$$\sum_{j\in J} a_j x^{n-j} + \sum_{j\in \bar{J}} a_j x^{n-j} = \sum_{i=0}^{n-1} a_i x^{n-i} \text{ es par}$$

y como a_n es impar, tendremos que

$$0 = P(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^{n-i} \to \text{ 0 es (par + impar =) impar}$$

que es un absurdo.

Marzo 23 (CMO 1971): Probar que, para todos los enteros n

$$n^2 + 2n + 12$$

no es múltiplo de 121

Solución: Estudiemos congruencias módulo 11

$$n = 0(11) \Rightarrow n\cdot(n+2) = 0(11) \Rightarrow n\cdot(n+2) + 12 = n^2 + 2n + 12 = 1(11)$$
$$n = 1(11) \Rightarrow n\cdot(n+2) = 3(11) \Rightarrow n\cdot(n+2) + 12 = n^2 + 2n + 12 = 4(11)$$
$$n = 2(11) \Rightarrow n\cdot(n+2) = 8(11) \Rightarrow n\cdot(n+2) + 12 = n^2 + 2n + 12 = 9(11)$$
$$n = 3(11) \Rightarrow n\cdot(n+2) = 4(11) \Rightarrow n\cdot(n+2) + 12 = n^2 + 2n + 12 = 5(11)$$
$$n = 4(11) \Rightarrow n\cdot(n+2) = 2(11) \Rightarrow n\cdot(n+2) + 12 = n^2 + 2n + 12 = 3(11)$$
$$n = 5(11) \Rightarrow n\cdot(n+2) = 2(11) \Rightarrow n\cdot(n+2) + 12 = n^2 + 2n + 12 = 3(11)$$
$$n = 6(11) \Rightarrow n\cdot(n+2) = 4(11) \Rightarrow n\cdot(n+2) + 12 = n^2 + 2n + 12 = 5(11)$$
$$n = 7(11) \Rightarrow n\cdot(n+2) = 8(11) \Rightarrow n\cdot(n+2) + 12 = n^2 + 2n + 12 = 9(11)$$
$$n = 8(11) \Rightarrow n\cdot(n+2) = 3(11) \Rightarrow n\cdot(n+2) + 12 = n^2 + 2n + 12 = 4(11)$$
$$n = 9(11) \Rightarrow n\cdot(n+2) = 0(11) \Rightarrow n\cdot(n+2) + 12 = n^2 + 2n + 12 = 1(11)$$
$$n = 10(11) \Rightarrow n\cdot(n+2) = 10(11) \Rightarrow n\cdot(n+2) + 12 = n^2 + 2n + 12 = 0(11)$$

Los únicos aspirantes a ser divisibles por 121 son los enteros n = 10(11). Pero, para estos, tenemos:

$$N = n^2 + 2n + 12 = (11k-1)^2 + 2(11k-1) + 12 = 121k^2 + 11 \neq \overset{\bullet}{\widehat{121}}$$

Marzo 24 (CMO 1971): Hallar los reales a tales que los polinomios $x^2 + ax + 1$ y $x^2 + x + a$ tengan al menos una raíz común

Solución: Si a = 1, entonces los dos polinomios no solo tienen una raíz en común (en este caso complejas, pues el discriminante de la ecuación es negativo) sino las dos.

Supongamos $a \neq 1$. Si x_1 es la raíz común a las dos ecuaciones tenemos:

$$\left.\begin{matrix} x_1^2 + ax_1 + 1 = 0 \\ x_1^2 + x_1 + a = 0 \end{matrix}\right\} \underbrace{\Rightarrow}_{\text{restando}} (a-1)x_1 + (1-a) = 0 \underbrace{\Rightarrow}_{a\neq 1} x_1 = \frac{a-1}{a-1} = 1$$

Si x_0 es la otra raíz de la primera ecuación y x_2 es la otra raíz de la segunda ecuación, por las relaciones de Cardano-Vietà, tendremos:

$$\left.\begin{matrix} -a = x_0 + 1 \\ 1 = x_0 \cdot 1 \end{matrix}\right\} \Rightarrow a = -2$$

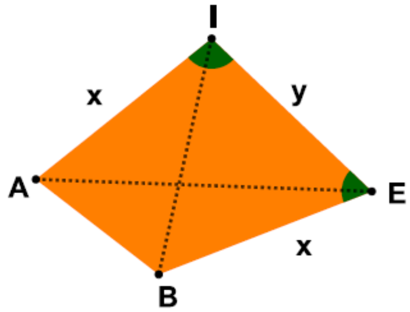
$$\left.\begin{array}{r} -1 = x_2 + 1 \\ a = x_2 \cdot 1 \end{array}\right\} \Rightarrow \ a = -2$$

Es decir, para a = 1 y a = - 2 se cumple el enunciado

Marzo 25 (CMO 1971): ABEI es un cuadrilátero convexo con AI = BE. Si el ángulo Î es mayor que el ángulo Ê, probar que AE > BI

Solución: Hemos de demostrar:

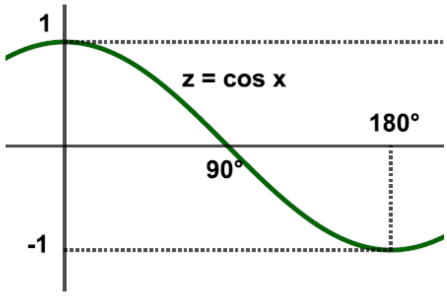
$$\hat{I} > \hat{E} \ \Rightarrow \ AE > BI$$



Tendremos al aplicar la ley de los cosenos a AE (en ΔAIE) y a BI (en ΔIBE)

$$AE^2 = x^2 + y^2 - 2xy\cos\hat{I}$$

$$BI^2 = x^2 + y^2 - 2xy\cos\hat{E}$$



Caben ahora tres posibilidades con los ángulos Ê y Î

1.- $0^\circ < \hat{E} < \hat{I} \leq 90^\circ$

2.- $\hat{E} \leq 90^\circ < \hat{I}$

3.- $90^\circ < \hat{E} < \hat{I} < 180^\circ$

Tendremos:

Para 1:

$$\cos\hat{E} > \ \cos\hat{I} \ \Rightarrow \ 2xy\cos\hat{E} > 2xy\cos\hat{I} \ \Rightarrow \ -2xy\cos\hat{E} \ < \ -2xy\cos\hat{I} \ \Rightarrow \ BI^2 < AE^2 \ \underbrace{\Rightarrow}_{z=\sqrt{x}\uparrow} \ BI < AE$$

Para 2:

$$\cos\hat{E} > 0, \qquad \cos\hat{I} < 0 \ \Rightarrow \ -2xy\cos\hat{E} \ < \ -2xy\cos\hat{I} \ \Rightarrow \ BI^2 < AE^2 \ \underbrace{\Rightarrow}_{z=\sqrt{x}\uparrow} \ BI < AE$$

Para 3:

$$0 > \cos\hat{E} > \cos\hat{I} \ \Rightarrow \ -2xy\cos\hat{E} \ < \ -2xy\cos\hat{I} \ \Rightarrow \ BI^2 < AE^2 \ \underbrace{\Rightarrow}_{z=\sqrt{x}\uparrow} \ BI < AE$$

Marzo 26-27 (CMO 1971): Supongamos que n personas conocen cada una de ellas un pedazo de información y que todos los n pedazos son diferentes. Cada vez que una persona A telefonea a otra B, A comunica a B todo lo que sabe, mientras que B no dice nada a A. ¿Cuál es el mínimo número de llamadas telefónicas entre pares de personas necesario para que todas lo conozcan todo? Prueba que tu contestación es un mínimo

Solución: Sean A_1, A_2, A_3, ···· , A_{n-1}, A_n las personas del colectivo. Si A_i telefonea a A_{i+1} $\forall$i, tenemos que la totalidad de información es conocida por A_n. Si ahora cada A_i telefonea a A_{i-1} $\forall$i, entonces toda la información es conocida por A_{n-1}, A_{n-2}, ···· , A_2, A_1. Por tanto, son necesarias y suficientes $2\cdot(n-1)$ llamadas telefónicas.

Marzo 28 (CMO 1971): Sea n un número de 5 cifras y sea m el número que resulta de eliminar en n la cifra central. Determinar todos los n para los que n/m es un entero.

Solución: Sea $n = \overline{abycd}$ $(a\cdot 10000 + b\cdot 1000 + y\cdot 100 + c\cdot 10 + d)$, entonces $m = \overline{abcd}$. Se nos pide todos los n tales que n = k·m con k∈ℕ.

Desde luego si k = 10

$$\overline{abycd} = k\cdot\overline{abcd} = 10\cdot\overline{abcd} = \overline{abcd0}$$

y la igualdad lleva como consecuencia que y = c, c = d y d = 0, es decir y = c = d = 0. Por lo tanto, una solución al problema es:

$$n = \overline{ab000},\qquad m = \overline{ab00},\qquad k = 10$$

donde a y b son cualesquiera (a ≠ 0).

Si k = 11 tendríamos:

$$k\cdot\overline{abcd} = (10+1)\cdot\overline{abcd} = \left\{\begin{array}{ccccc} a & b & c & d & 0\\ & a & b & c & d\\ & \vee & & & \\ & b & & & \end{array}\right\} > \overline{abycd}$$

Si k > 11

$$k\cdot\overline{abcd} > 11\cdot\overline{abcd} > \overline{abycd}$$

Si k = 9

$$\overline{abycd} = 9\cdot\overline{abcd} = (10-1)\cdot\overline{abcd} = \overline{abcd0} - \overline{abcd} \;\;\Rightarrow\;\; \overline{abcd0} = \overline{abycd} + \overline{abcd}$$

que es un absurdo pues las unidades de millar de $\overline{abycd} + \overline{abcd}$ son superiores a b, que es la unidad de millar de $\overline{abycd}$

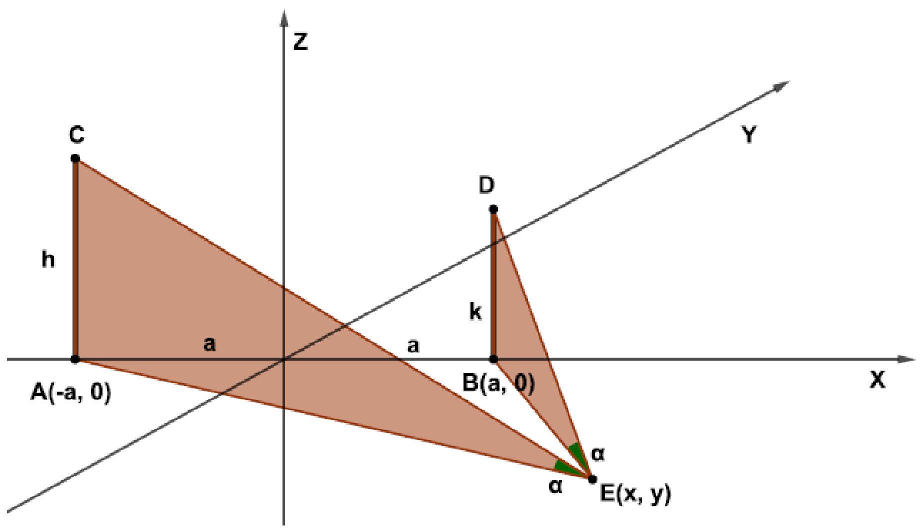
Una demostración similar sirve para k∈{8,7,6,5,4,3,2,1}. Luego la única solución es:

$$n = \overline{ab000},\qquad m = \overline{ab00},\qquad k = 10$$

donde a y b son cualesquiera (a ≠ 0).

Marzo 30-31: Dos postes de alturas h y k están separados 2a unidades en un plano nivelado. Hallar el lugar geométrico de los puntos de plano nivelado de manera que los ángulos de elevación a los extremos de los postes son iguales

Solución: Establecemos el origen del sistema de coordenadas en el punto medio entre los dos postes y el eje X es el eje que une los puntos de apoyo de los postes. Supondremos que el de mayor altura es el de altura h y que está situado a la izquierda. Sea E(x, y) un punto del lugar geométrico buscado.



Tendremos entonces, que los triángulos ΔACE y ΔBED son semejantes (pues ambos son rectángulos y el ángulo en E es el mismo). Por lo tanto:

$$\frac{d(A,E)}{d(B,E)} = \frac{h}{k} \quad \Rightarrow \quad \frac{d^2(A,E)}{d^2(B,E)} = \frac{h^2}{k^2}$$

pero:

$$d^2(A,E) = d^2\big((-a,0),(x,y)\big) = (x+a)^2 + y^2$$

$$d^2(B,E) = d^2\big((a,0),(x,y)\big) = (x-a)^2 + y^2$$

con lo que:

$$k^2[(x+a)^2 + y^2] = h^2[(x-a)^2 + y^2]$$

y desarrollando:

$$0 = (h^2 - k^2)x^2 - 2ax(h^2 + k^2) + a^2(h^2 - k^2) + y^2(h^2 - k^2)$$

Si h ≠ k, podemos dividir la expresión por $h^2 - k^2$ y con ello:

$$0 = x^2 + a^2 + y^2 - 2ax\frac{h^2 + k^2}{h^2 - k^2}$$

$$0 = x^2 + a^2 + y^2 - 2ax\frac{h^2 + k^2}{h^2 - k^2} + a^2\frac{(h^2 + k^2)^2}{(h^2 - k^2)^2} - a^2\frac{(h^2 + k^2)^2}{(h^2 - k^2)^2}$$

$$0 = \left(x - a\frac{h^2 + k^2}{h^2 - k^2}\right)^2 - a^2\left(\frac{(h^2 + k^2)^2}{(h^2 - k^2)^2} - 1\right) + y^2$$

$$a^2\left(\frac{(h^2 + k^2)^2}{(h^2 - k^2)^2} - 1\right) = \left(x - a\frac{h^2 + k^2}{h^2 - k^2}\right)^2 + y^2$$

$$a^2\frac{4h^2k^2}{(h^2 - k^2)^2} = \left(x - a\frac{h^2 + k^2}{h^2 - k^2}\right)^2 + y^2$$

es decir, una circunferencia de centro

$$\left(a\frac{h^2 + k^2}{h^2 - k^2}, 0\right)$$

y radio

$$a\frac{2hk}{h^2 - k^2}$$

Si h = k (y con ello $h^2 - k^2 = 0$), la ecuación del lugar geométrico se reduce a $0 = -2ax(h^2 + k^2)$ es decir, x = 0, o en otras palabras el eje Y