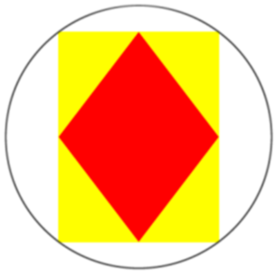
# SOLUCIONES ABRIL 2020

PROBLEMAS PARA PREPARAR LA OLIMPIADA MATEMÁTICA DE SEGUNDO CICLO DE LA E.S.O. DE LA FESPM EN 2002 Y 2003.

Organizador: JOSÉ COLÓN LACALLE. Profesor jubilado

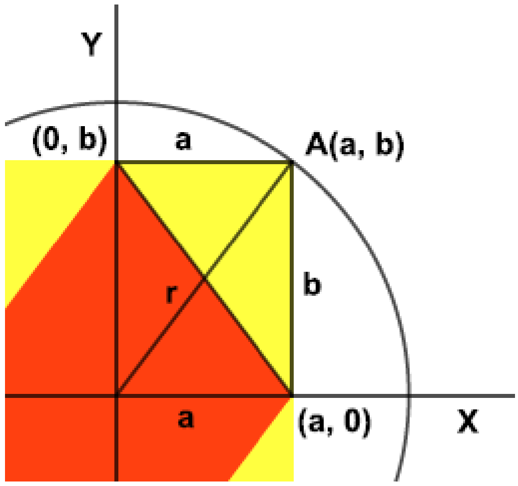
**Abril 1-2:** En una circunferencia hemos inscrito un rectángulo y en él, un rombo, tomando los puntos medios de los lados del rectángulo. Probar que el perímetro del rombo es independiente del rectángulo inscrito en la circunferencia



**Solución:** Sea A un punto de la circunferencia (de radio r) elegido vértice del rectángulo. Consideremos el sistema de ejes coordenados formado por los puntos medio del rectángulo. Si en ese sistema de referencia las coordenadas de A son (a, b), tendremos, al aplicar Pitágoras:

$$a^2 + b^2 = r^2 \quad \Rightarrow \quad \text{lado del rombo} = r \quad \Rightarrow \quad P_{\text{rombo}} = 4r$$

con lo que tendremos que el perímetro del rombo es función del radio de la circunferencia inicial




**Abril 3-4:** Rafael, Dani, Laia y Aitana han tomado un aperitivo en un bar. Pagan a partes iguales y observan que, aunque todos han pagado lo mismo; Rafael ha puesto el 10% de lo que tenía al principio, Dani el 20%, Laia el 30% y Aitana el 40%. Averigua, razonadamente, la cantidad mínima de dinero que tenía cada uno, sabiendo que al principio todos tenían un número entero de euros

**Solución:** Sean x = dinero que tiene Rafael; y = dinero que tiene Dani; z = dinero que tiene Laia; t = dinero que tiene Aitana. Del enunciado tenemos:

$$\frac{10}{100}x = \frac{20}{100}y = \frac{30}{100}z = \frac{40}{100}t \quad \Rightarrow \quad 0{,}1x = 0{,}2y = 0{,}3z = 0{,}4t$$

que se transforma en el sistema:

$$\left.\begin{aligned} x &= 2y \\ 2y &= 3z \\ 3z &= 4t \end{aligned}\right\} \qquad \Rightarrow \qquad \left.\begin{array}{rcl} x - 2y & = & 0 \\ 2y - 3z & = & 0 \\ 3z - 4t & = & 0 \end{array}\right\}$$

que es un sistema de tres ecuaciones con cuatro incógnitas. De la última tendremos, al expresar z en función de t:

$$z = \frac{4}{3}t$$

De la segunda, sustituyendo z y despejando y en función de t:

$$y = \frac{4}{2}t = 2t$$

De la primera, sustituyendo y y despejando x en función de t:

$$x = 4t$$

Para que z, y y x sean números naturales el menor valor de t debe de ser 3. En este caso z = 4, y = 6, x =12 y t =3. La cantidad mínima de dinero que tenía cada uno es: Rafael tenía 12 €, Dani tenía 6 €, Laia tenía 4 € y Aitana tenía 3 €.

**Abril 5:** Hallar el menor natural que cumple: da resto 24 al dividirlo entre 57, da resto 73 al dividirlo entre 106 y da resto 126 al dividirlo entre 159.

**Solución:** Tendremos:

$$\left.\begin{array}{r} n = 57k + 24 \\ n = 106k' + 73 \\ n = 159k'' + 126 \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{array}{c} n + 33 = 57k + 57 = 57(k+1) \\ n + 33 = 106k' + 106 = 106(k'+1) \\ n + 33 = 159k'' + 159 = 159(k''+1) \end{array}\right\}$$

es decir, n + 33 es múltiplo de 57, de 106 y de 159 y por tanto n + 33 es múltiplo de mcm (57, 106, 159) = 3·2·53·19 = 6042. El valor más pequeño posible de n es el que cumple n + 33 = 6042, es decir n = 6009

**Abril 6:** Hallar los números de 4 cifras que son cuadrados perfectos y que tienen las dos primeras cifras iguales y las dos últimas cifras iguales.

**Solución:** Sea uuvv el número buscado. Tendremos:

uuvv = u·1100 + v·11 = 11·(u·100 + v)

como el número buscado es un cuadrado perfecto, tendremos que u·100 + v es un múltiplo de 11 y como u y v son dígitos, que u + v = 11. Además, como uuvv acaba en v $\Rightarrow$ v$\in${0, 1, 4, 5, 6, 9} pues:

| si un número acaba en | | su cuadrado acaba en |
|---|---|---|
| 0 | ……… | 0 |
| 1, 9 | ……… | 1 |
| 2, 8 | ……… | 4 |
| 3, 7 | ……… | 9 |
| 4, 6 | ……… | 6 |
| 5 | ……… | 5 |

Si v = 0, como u + v = 11 debe ser u = 11 que no es una cifra.

Si v = 1, como u + v = 11 debe ser u = 10 que no es una cifra.

Si v = 4, como u + v = 11 debe ser u = 7 y una solución será 7744 = $88^2$.

Si v = 5, como u + v = 11 debe ser u = 6 pero como 6655 no es un cuadrado perfecto no aparece solución.

Si v = 6, como u + v = 11 debe ser u = 5 pero como 5566 no es un cuadrado perfecto no aparece solución.

Si v = 9, como u + v = 11 debe ser u = 2 pero como 2299 no es un cuadrado perfecto no aparece solución.

El único número que cumple el enunciado es 7744 = $88^2$.

**Abril 7-8:** Un grupo de 5 amigos cursa estudios de primaria y secundaria. El lunes van al cine cuatro de ellos cuyas edades suman 38 años. El martes van a patinar cuatro cuyas edades suman 35 años. El miércoles van al parque de atracciones cuatro cuyas edades suman 36 años. El jueves van cuatro a la piscina cuyas edades suman 36 años. El viernes van cuatro a una biblioteca cuyas edades suman 38 años. El sábado van a un partido de futbol cuatro cuyas edades suman 39. Si ninguno salió en las seis ocasiones, calcula la edad de cada uno de los amigos.

**Solución:** Sean $x_1$, $x_2$, $x_3$, $x_4$, $x_5$ las edades (ordenadas de menor a mayor) de las cinco personas. Hay cinco subconjuntos de cuatro elementos:

$$\{x_1, x_2, x_3, x_4\};\ \{x_1, x_2, x_3, x_5\};\ \{x_1, x_2, x_4, x_5\};\ \{x_1, x_3, x_4, x_5\};\ \{x_2, x_3, x_4, x_5\}$$

Además, los subconjuntos están ordenados desde menor suma (el primer subconjunto es el que forman los más jóvenes) hasta el de mayor suma (el último es el que forman los más mayores). Como han salido un total de seis veces, algún grupo ha salido dos veces en la misma semana (el miércoles y el jueves (36 años) o el lunes y el viernes (38 años)). En la primera posibilidad, tenemos:

$$\begin{aligned}
\{x_1, x_2, x_3, x_4\} &\Rightarrow x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 35\\
\{x_1, x_2, x_3, x_5\} &\Rightarrow x_1 + x_2 + x_3 + x_5 = 36\\
\{x_1, x_2, x_4, x_5\} &\Rightarrow x_1 + x_2 + x_4 + x_5 = 38\\
\{x_1, x_3, x_4, x_5\} &\Rightarrow x_1 + x_3 + x_4 + x_5 = 38\\
\{x_2, x_3, x_4, x_5\} &\Rightarrow x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 39
\end{aligned}$$

Y sumando las cinco igualdades tenemos:

$$4 \cdot (x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5) = 186 \ \Rightarrow \ \sum x_i = \frac{186}{4} = 46{,}5 \notin \mathbb{N}$$

Con la segunda posibilidad tenemos:

$$\begin{aligned}
\{x_1, x_2, x_3, x_4\} &\Rightarrow x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 35\\
\{x_1, x_2, x_3, x_5\} &\Rightarrow x_1 + x_2 + x_3 + x_5 = 36\\
\{x_1, x_2, x_4, x_5\} &\Rightarrow x_1 + x_2 + x_4 + x_5 = 36\\
\{x_1, x_3, x_4, x_5\} &\Rightarrow x_1 + x_3 + x_4 + x_5 = 38\\
\{x_2, x_3, x_4, x_5\} &\Rightarrow x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 39
\end{aligned}$$

Y sumando las cinco igualdades tenemos:

$$4 \cdot (x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5) = 184 \ \Rightarrow \ \sum x_i = \frac{184}{4} = 46$$

Por lo tanto, se da esta última posibilidad y entonces:

$$\begin{array}{lll}
x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 35 & x_1 = 35 - x_2 - x_3 - x_4 \ (*) & \\
x_1 + x_2 + x_3 + x_5 = 36 & \longrightarrow & x_5 - x_4 = 1 \ (**)\\
x_1 + x_2 + x_4 + x_5 = 36 & \longrightarrow & x_5 - x_3 = 1 \ (***)\\
x_1 + x_3 + x_4 + x_5 = 38 & \longrightarrow & x_5 - x_2 = 3 \ (****)\\
x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 39 & & x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 39 \ (*****)
\end{array}$$

Sumando las ecuaciones (**), (***), (****) y (*****) tenemos: $x_5 = 11$. Sustituyendo este valor en (**), (***), (****) y (*) tenemos: $x_4 = x_3 = 10$; $x_2 = 8$ y $x_1 = 7$

**Abril 9-10:** Un capitán de barco premia a 3 marineros con entre 200 y 300 monedas. Durante la noche, un marinero se despertó y separó las monedas en tres montones iguales, tirando al mar una moneda que sobraba. Cogió un montón y, juntando los otros dos que quedaban, se fue a la cama. Esto mismo hicieron los otros marineros, cada uno de los cuales realizó exactamente la misma operación. A la mañana siguiente el contramaestre reparte lo que queda en tres montones, y se queda con una moneda que sobraba en pago a su trabajo. ¿Cuántas monedas hay inicialmente? ¿Cuántas monedas recibe cada marinero?

**Solución:** Sea x el número de monedas del principio. Tenemos: 200 < x < 300. El primer marinero tira una al agua y quedan x – 1, que es un múltiplo de tres (pues se generan tres montones iguales): 199 < x – 1 = 3n < 299. El menor valor de n es ($\lfloor 199/3 \rfloor$ + 1 =) 67 y el mayor valor de n es ($\lfloor 299/3 \rfloor$ =)99. Por tanto, hay 33 posibilidades para n, donde n es el número de monedas que se lleva el primer marinero; y dejando este 2n monedas. De estas una, va al agua y 2n – 1 es un múltiplo de tres (pues se generan tres montones iguales): 2·67 – 1 = 133 < 2n – 1 = 3k < 197 = 2·99 – 1. El menor valor de k es ($\lfloor 133/3 \rfloor$ + 1 =) 45 y el mayor valor de k es ($\lfloor 197/3 \rfloor$ =)65. Hay, por tanto, 21 posibilidades para k, donde k en el número de monedas que se lleva el segundo marinero; y dejando este 2k monedas. De estas una, va al agua y 2k – 1 es un múltiplo de tres (pues se generan tres montones iguales): 2·45 – 1 = 89 < 2k – 1 = 3r < 129 = 2·65 – 1. El menor valor de r es ($\lfloor 89/3 \rfloor$ + 1 =) 30 y el mayor valor de r es ($\lfloor 129/3 \rfloor$ =)43. Hay, por tanto, 14 posibilidades para r, donde r en el número de monedas que se lleva el tercer marinero; y dejando este 2r monedas. De estas una, se la lleva el contramaestre y 2r – 1 es un múltiplo de tres (pues se generan tres montones iguales): 2·30 – 1 = 59 < 2r – 1 = 3s < 85 = 2·43 – 1. El menor valor de s es ($\lfloor 59/3 \rfloor$ + 1 =) 20 y el mayor valor de s es ($\lfloor 85/3 \rfloor$ =)28. Hay, por tanto, 9 posibilidades para s, donde s en el número de monedas que se lleva cada uno de los tres marineros. Recapitulando: el primer marinero se lleva n + s monedas, el segundo marinero se lleva k + s monedas y el tercer marinero se lleva r + s monedas

| s | $r = \frac{3s+1}{2}$ | $k = \frac{3r+1}{2}$ | $n = \frac{3k+1}{2}$ |
|---|---|---|---|
| 20 | 30,5 | | |
| 21 | 32 | 48,5 | |
| 22 | 33,5 | | |
| **23** | **35** | **53** | **80** |
| 24 | 36,5 | | |
| 25 | 38 | 57,5 | |
| 26 | 39,5 | | |
| 27 | 41 | 62 | 93,5 |
| 28 | 42,5 | | |

Luego el primer marinero recibe (n + s = 80 + 23 =) 103 monedas, el segundo marinero recibe (k + s = 53 + 23 =) 76 monedas, el tercer marinero recibe (r + s = 35 + 23 =) 58 monedas, al agua van 3 monedas y el contramaestre recibe una moneda; dando un total de 241 monedas.

**Abril 11-12:** Una empresa produce semanalmente 300 bicicletas de montaña que vende íntegramente al precio de 600 € cada una. Tras un análisis de mercado observa que, si varía el precio, también varían sus ventas según la siguiente proporción: por cada 7 € que aumente o disminuya el precio de sus bicicletas, disminuye o aumenta la venta en 3 unidades. Hallar el número de bicicletas y el precio unitario que aportan los mayores ingresos

**Solución:** Si x es el número de bicicletas producidas e y es el precio unitario de cada bicicleta, tendremos que los ingresos son:

$$\mathrm{I(n)} = \mathrm{x} \cdot \mathrm{y} = (300 + 3\mathrm{n}) \cdot (600 - 7\mathrm{n})$$

Desarrollando, tendremos:

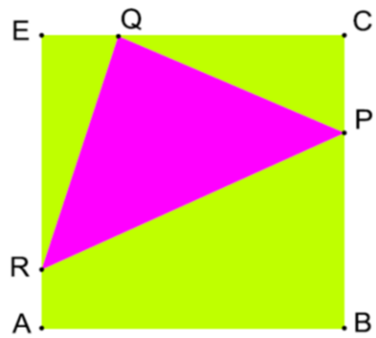
$$\mathrm{I(n)} = 180000 - 300\mathrm{n} - 21\mathrm{n}^2$$

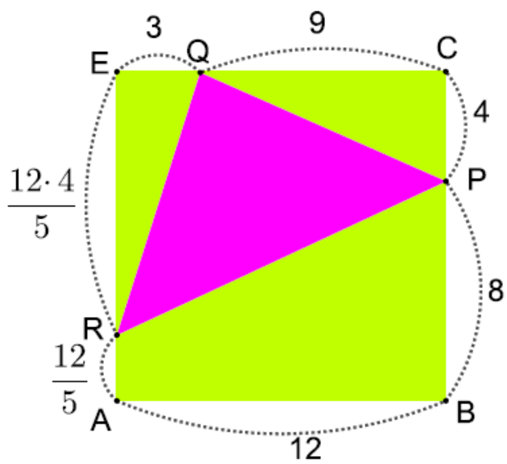
que es una parábola invertida hacia abajo (pues el coeficiente de $n^2$ es negativo), que alcanza su máximo en el vértice de la parábola, es decir en:

$$n_V = \frac{-b}{2a} = \frac{300}{2\cdot(-21)} = -7{,}42\,\ldots$$

Por lo tanto, el máximo ingreso surge cuando se producen (300 – 3·7 = 300 – 21 =) 279 bicicletas con un precio unitario de (600 – 7·(- 7) = 600 + 49 =) 649 €, generándose unos ingresos de (279·649 =) 181.071 €

**<u>Abril 13-14:</u>** El cuadrado ABCE tiene 144 $cm^2$ de área. Calcular el área del triángulo ΔPQR si BC = 3·PC, CE = 4·EQ y AE = 5·AR




**<u>Solución:</u>** Como el área del cuadrado es 144 $cm^2$, su lado mide $\left(\sqrt{144}=\right)$ 12 cm. En la figura adjunta tenemos lo que mide cada segmento de cada lado. Ahora:

$$A_{\Delta REQ} = \frac{3\cdot\frac{12\cdot 4}{5}}{2} = \frac{72}{5}\,cm^2$$

$$A_{\Delta QCP} = \frac{4\cdot 9}{2} = 18cm^2$$

$$A_{RABP} = \frac{\frac{12}{5}+8}{2}\cdot 12 = \frac{312}{5}\,cm^2$$

con lo que:

$$A_{\Delta RQP} = 144 - \left(\frac{72}{5} + 18 + \frac{312}{5}\right) = \frac{246}{5}\,cm^2$$

**<u>Abril 15:</u>** Varias persones deciden realizar un viaje para lo que alquilan una furgoneta cuyo coste es 522 € que pagarán a partes iguales. El día de salida no se presentan 3 y los que quedan han de pagar 29 € más. ¿Cuántas personas tenían pensado realizar el viaje?

**<u>Solución:</u>** Sea x el número de personas que tenían pensado realizar el viaje e y el coste del viaje por persona, entonces del enunciado:

$$\left.\begin{array}{r} xy = 522 \\ (x-3)\cdot(y+29) = 522 \end{array}\right\}$$

De la primera ecuación:

$$y = \frac{522}{x}$$

(pues, obviamente x ≠ 0) y sustituyendo en la segunda:

$$(x-3)\cdot\left(\frac{522}{x}+29\right)=522;\ -1566+29x^2-87x=0;\ \ x=\frac{87\pm\sqrt{87^2+4\cdot 29\cdot 1566}}{2\cdot 29}=\begin{cases}9\\-6\end{cases}$$

Como la solución x = - 6 no tiene sentido, concluimos que el viaje lo esperaban hacer 9 personas y cada una de ellas debía aportar $\left(y=\frac{522}{9}=\right)$ 58 €

**Abril 16:** En una fiesta hay 15 mujeres y algunos hombres; todos ellos viven en A o en B. Primero cada mujer le regala un bombón cada hombre que vive en A y estos se los comen. Después cada hombre que vive en B le regala un bombón a cada mujer. En total se regalan 240 bombones. ¿Cuántos hombres hay en la fiesta?

**Solución:** Tendremos la siguiente tabla de contingencia, donde M (H) indica sexo femenino (masculino) y A (B) indica residente en la ciudad A (B)

| | M | H | |
|---|---|---|---|
| A | n | p | n + p |
| B | 15 - n | q | 15 – n + q |
| | 15 | p + q | 15 + p + q |

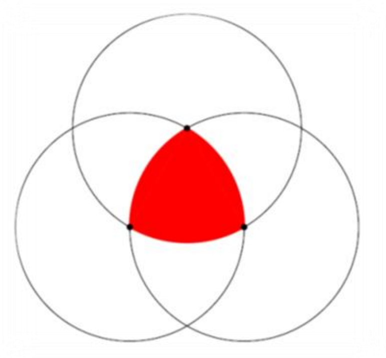
Las afirmaciones: "Primero cada mujer le regala un bombón cada hombre que vive en A y estos se los comen. Después cada hombre que vive en B le regala un bombón a cada mujer. En total se regalan 240 bombones." se traducen en: 15p + 15q = 240.

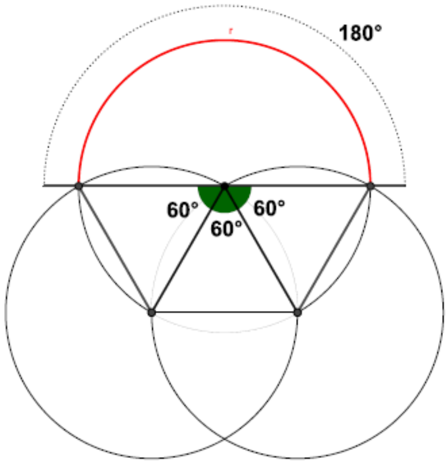
De esta última igualdad:

$$p+q=\frac{240}{15}=16$$

es decir, en la reunión había 16 hombres

**Abril 17-18:** En la figura hay tres circunferencias iguales de radio 5 con centros en los puntos donde se intersectan dos de ellas. Hallar el área de la zona común a las tres y el perímetro exterior a las tres circunferencias



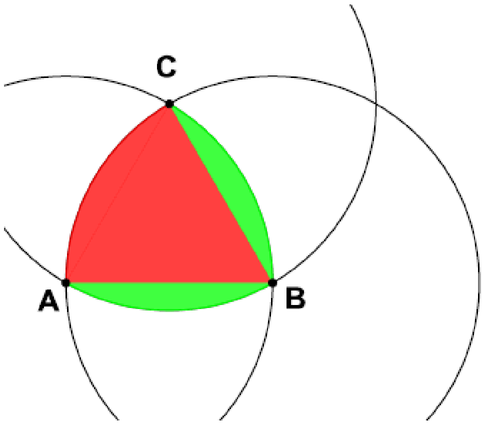


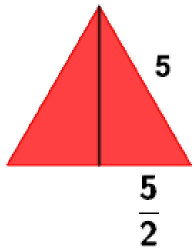

**Solución:** Si nos fijamos en la circunferencia superior, tenemos que quedan formados tres triángulos equiláteros (pues sus lados coinciden con el radio de la circunferencia) en la zona interior. Los tres forman un ángulo de (60·3 =) 180°. Por tanto, el perímetro exterior provocado por esta circunferencia es:

$$\left(\frac{2\pi r}{2}=\right)\pi\cdot r=5\pi$$

Por simetría, cada circunferencia aporta el mismo perímetro exterior. De aquí, que, el perímetro exterior sea:

$$3\cdot 5\pi=15\pi\ \text{cm}$$




$$\mathbf{h} = \sqrt{25 - \frac{25}{4}} = \frac{5\sqrt{3}}{2}$$

Para el área tenemos:

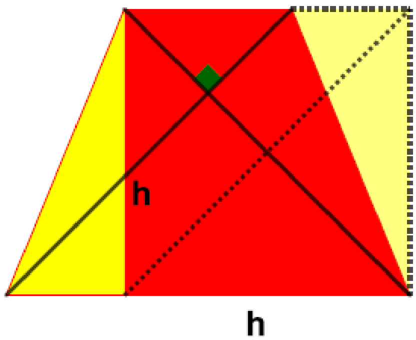
$$\text{Área} = \begin{Bmatrix} \text{área sector} \\ \text{circular ACB} \end{Bmatrix} + 2\begin{Bmatrix} \text{área segmento} \\ \text{circular CB} \end{Bmatrix} = \frac{5^2\pi}{6} + 2\left\{\frac{5^2\pi}{6} - A_{\Delta ABC}\right\} = \frac{5^2\pi}{6} - 2\left(\frac{5^2\pi}{6} - \frac{5\cdot\frac{5\sqrt{3}}{2}}{2}\right)$$

$$= \frac{25}{2}(\pi - \sqrt{3})$$

**<u>Abril 19:</u>** De un trapecio isósceles se sabe que sus diagonales son perpendiculares y su área es igual a 98. Hallar la altura del trapecio.

**<u>Solución (Petar P. 3 ESO. “Almadraba”. Tarifa (Cádiz)):</u>** Trazamos la altura h, desde el vértice superior izquierdo con lo cual se nos forma un triángulo rectángulo a nuestra izquierda. Si lo cortamos encaja perfectamente a nuestra derecha, dando lugar a un cuadrado de lado h(pues sus diagonales son perpendiculares e iguales) cuya área sigue siendo 98. Por lo tanto, tendremos:

$$h^2 = 98 \;\Rightarrow\; h = 7\sqrt{2}$$




**<u>Solución (@Bannu16750368):</u>** Los triángulos $\Delta AEB$ y $\Delta DEC$ son rectángulos isosceles y aplicando Pitágoras se obtienen las medidas de los segmentos de la figura adjunta. Una vez hecho esto, tenemos:

$$A = \text{semisuma bases} \cdot \text{altura}$$

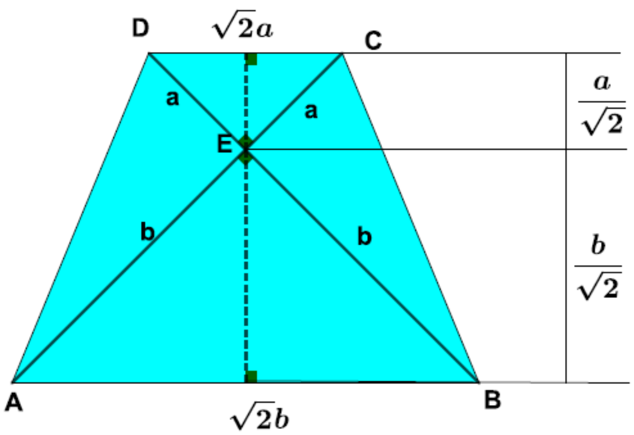
$$= \frac{\sqrt{2}a + \sqrt{2}b}{2} \cdot \left(\frac{a}{\sqrt{2}} + \frac{b}{\sqrt{2}}\right) = 98$$

de donde:

$$(a+b)^2 = 2 \cdot 98 \;\Rightarrow\; a + b = 14$$

y, por último:

$$\text{altura} = \frac{a+b}{\sqrt{2}} = \frac{14}{\sqrt{2}} = 7\sqrt{2}$$



**Abril 20:** Calcular el exponente de la potencia máxima de 3 que sea divisor de 100!

**Solución:** Recordemos que:

$$100! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 10 \cdot 1\,1 \cdot 12 \cdot \cdots \cdot 95 \cdot 96 \cdot 97 \cdot 98 \cdot 99 \cdot 100$$

Cada 3 factores sucesivos contienen un factor tres. Por tanto, hay $\left(\left\lfloor\frac{100}{3}\right\rfloor =\right)$ 33 factores 3.

Cada 9 (= $3^2$) factores sucesivos existe un factor 3 (no contabilizado). Por tanto, hay $\left(\left\lfloor\frac{100}{9}\right\rfloor =\right)$ 11 factores 3 ha añadir.

Cada 27 (= $3^3$ ) factores sucesivos existe un factor 3 (no contabilizado). Por tanto, hay $\left(\left\lfloor\frac{100}{27}\right\rfloor =\right)$ 3 factores 3 ha añadir.

Cada 81 (= $3^4$) factores sucesivos existe un factor 3 (no contabilizado). Por tanto, hay $\left(\left\lfloor\frac{100}{81}\right\rfloor =\right)$ 1 factor 3 ha añadir.

En total hay (33 + 11 + 3 + 1 =) 48 factores 3 en 100!

**Abril 21-22:** En un bloque de 5 viviendas viven 5 matrimonios con dos hijos cada uno de ellos y cuyas edades son todas distintas y van desde los 4 a los 13 años. Las sumas de edades de las parejas de hermanos son 10, 13, 17, 22 y 23 años respectivamente. Clara tiene 7 años. Determinar la edad de su hermano.

**Solución:** Las posibles edades de los (5·2 =) 10 niños son: 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12 y 13. De, entre estos, solo el par 4 y 6 suman 10. Es decir, las edades de dos hermanos son {4, 6}. De las edades que quedan, solo 5 y 8 suman 13. Es decir, las edades de dos hermanos son {5, 8}. De las edades que quedan, solo 10 y 7 suman 17. Es decir, las edades de dos hermanos son {7, 10}. De las edades que quedan, solo 9 y 13 suman 22. Es decir, las edades de dos hermanos son {9, 13}. Y nos quedan 11 y 12 que suman 23. En definitiva, las edades de los hermanos son: {4, 6}; {5, 8}; {7, 10}; {9, 13} y {11, 12}. Por tanto, el hermano de Clara tiene 10 años.

**Abril 23-24:** En un edificio de apartamentos, la mitad de las ventanas tiene cortinas, la cuarta parte de las ventanas tienen maceteros y la sexta parte tiene cortinas y maceteros. Hay 375 ventanas que no tienen cortinas ni maceteros. Además, se sabe que 1/5 de los apartamentos tienen 5 ventanas, 2/5 de los apartamentos tienen 3 ventanas y los demás tienen 2 ventanas. ¿Cuántos apartamentos tiene el edificio?

**Solución:** Sea x el número de ventanas. Del enunciado tenemos:

$$\frac{x}{2} \rightarrow \text{ cortinas; } \frac{x}{4} \rightarrow \text{ maceteros; } \frac{x}{6} \rightarrow \text{ cortinas y maceteros; } 375 \rightarrow \text{ sin cortinas ni maceteros}$$

Luego:

$$\frac{x}{2}+\frac{x}{4}-\frac{x}{6}+375 = x;\ \ 7x + 450012x;\ \ x = 900$$

es decir, en el edificio hay 900 ventanas. Sea ahora, y el número de apartamentos. Entonces:

$$\frac{y}{5}\cdot 5+\frac{2}{5}y\cdot 3+\left(y-\frac{y}{5}-\frac{2y}{5}\right)\cdot 2 = 900;\ \ \frac{15y}{5} = 900;\ \ y = 300$$

Es decir, en el edificio hay 300 apartamentos.

**Abril 25-26:** Un joyero llegó a Bagdad a vender joyas y prometió pagar a Salim 20 dinares si vendía las joyas por 100 dinares y 35 dinares si vendía las joyas por 200 dinares. Al cabo de unos días vendió las joyas por

140 dinares y el joyero y Salim calcularon por separado el importe del hospedaje. El joyero opinó que debía pagar 24 dinares y medio y Salim opinó que debía pagar 28 dinares. ¿Hay alguna solución más acertada que las propuestas por el joyero y por Salim?

**Solución:** Sea y el coste del hospedaje y x el precio de venta de las joyas. Podemos asumir que el coste del hospedaje es suma de una constante (que no depende de la otra variable considerada) y de otro sumando que es directamente proporcional al precio de venta de las joyas. Es decir que y = n + mx. Del enunciado tenemos, que (100, 20) y (200, 35) son puntos de ella. Entonces:

$$\left.\begin{array}{l} 20 = n + 100m \\ 35 = n + 200m \end{array}\right\} \Rightarrow \quad m = 0{,}15; \;\; n = 5 \;\; y = 0{,}15x + 5$$

Si el joyero vende las joyas por 140 dinares, debe pagar por el hospedaje: y = 0,15·140 + 5 = 26 dinares.

Las soluciones aportadas por Salim y por el joyero son no adecuadas ya que no aplican bien la proporcionalidad directa entre los incrementos de las magnitudes coste de hospedaje y dinero conseguido por las joyas.

Salim razona:

$$\left.\begin{array}{ccc} \text{precio joyas} & ---- & \text{coste hospedaje} \\ 100 & ---- & 20 \\ 140 & ---- & z \end{array}\right\} z = \frac{20 \cdot 140}{100} = 28 \text{ dinares}$$

El joyero razona:

$$\left.\begin{array}{ccc} \text{precio joyas} & ---- & \text{coste hospedaje} \\ 200 & ---- & 35 \\ 140 & ---- & z \end{array}\right\} z = \frac{35 \cdot 140}{200} = 24{,}5 \text{ dinares}$$

Cuando el razonamiento correcto es:

$$\left.\begin{array}{ccc} \nabla \text{ precio joyas} & ---- & \nabla \text{coste hospedaje} \\ 100\ (= 200 - 100) & ---- & 15\ (= 35 - 20) \\ 40\ (= 140 - 100) & ---- & z \end{array}\right\} z = \frac{40 \cdot 15}{100} = 6 \text{ dinares}$$

Con lo que se debe de pagar por el hospedaje (20 + 6 =) 26 dinares, como hemos hallado antes.

**Abril 27-28:** Dani y Laia apuestan una cena. Para ello un amigo de ambos prepara 6 sobres, uno de los cuales contiene una tarjeta negra y los otros una tarjeta verde cada uno. Empieza Dani eligiendo un sobre, si dentro está la tarjeta negra, pagará la cena. En caso contrario el sobre elegido por Dani se retira y ahora es Laia la que elige un sobre de los 5 restantes. Si el elegido por ella contiene la tarjeta negra, ella paga la cena. En caso contrario se retira el sobre elegido y continua el juego en las mismas condiciones, hasta que uno de los dos elige el sobre con la tarjeta negra. ¿Es el juego equitativo? ¿Ocurriría lo mismo si se jugara con 5 sobres con 4 tarjetas verdes y una negra?

**Solución:** Representaremos por $N_i$ ($V_j$) sacar tarjeta negra (verde) en la extracción i-ésima (j-ésima). Tendremos:

P(pierde Dani) = P ($N_1$ o ($V_1$ y $V_2$ y $N_3$) o ($V_1$ y $V_2$ y $V_3$ y $V_4$ y $N_5$)) = P ( $N_1$) + P($V_1$ y $V_2$ y $N_3$) + P($V_1$ y $V_2$ y $V_3$ y $V_4$ y $N_5$)

puesto que los sucesos son incompatibles.

Y entonces:

$$\text{P(pierde Dani)} = \frac{1}{6} + \frac{5}{6} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{1}{4} + \frac{5}{6} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{1}{2}$$

y el juego es equitativo.

Si sólo se preparar cinco sobres, tenemos:

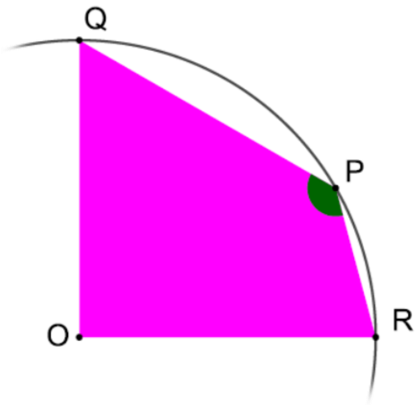
P(pierde Dani) = P ($N_1$ o ($V_1$ y $V_2$ y $N_3$) o ($V_1$ y $V_2$ y $V_3$ y $V_4$ y $N_5$)) = P ( $N_1$) + P($V_1$ y $V_2$ y $N_3$) + P($V_1$ y $V_2$ y $V_3$ y $V_4$ y $N_5$)

y entonces:

$$\mathrm{P(pierde\ Dani)} = \frac{1}{5} + \frac{4}{5} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{3} + \frac{4}{5} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot 1 = \frac{1}{5} + \frac{1}{5} + \frac{1}{5} = \frac{3}{5}$$

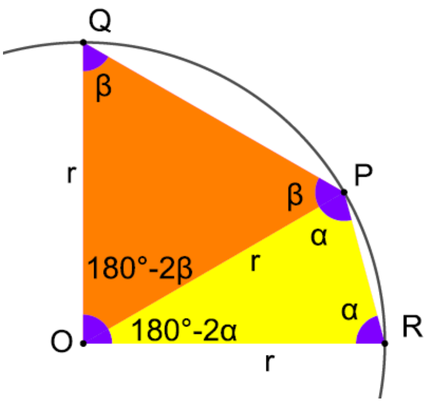
y el juego no es equitativo.

**Abril 29-30:** Sea OQR un cuadrante de circunferencia de radio OQ. Sea P un punto cualquiera del cuadrante. Hallar el ángulo ∠QPR




**Solución 1:** El ángulo central de 270° lleva asociado el ángulo inscrito ∠QPR (pues ambos abarcan el arco QP'R sindo P' el simétrico de P respecto al punto O centro de la circunferencia). Luego:

$$\angle \mathrm{QPR} = \frac{270°}{2} = 135°$$




**Solución 2:** Dado el punto P, se generan los triángulos ΔPOR y ΔPOQ. Ambos son isósceles pues OR = OP = OQ = radio de la circunferencia = r. De aquí se tienen los ángulos reflejados en la figura adjunta. Como:

$$90 = 180° - 2\alpha + 180° - 2\beta \;\Rightarrow\; 270° = 2(\alpha + \beta)$$

por lo tanto:

$$\angle \mathrm{QPR} = \alpha + \beta = \frac{270°}{2} = 135°$$