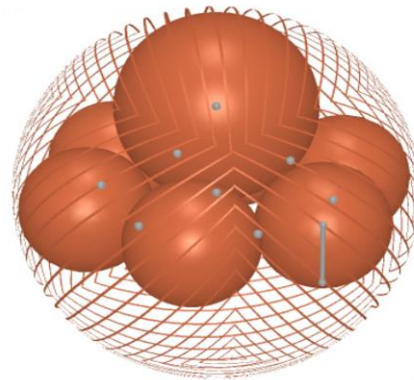


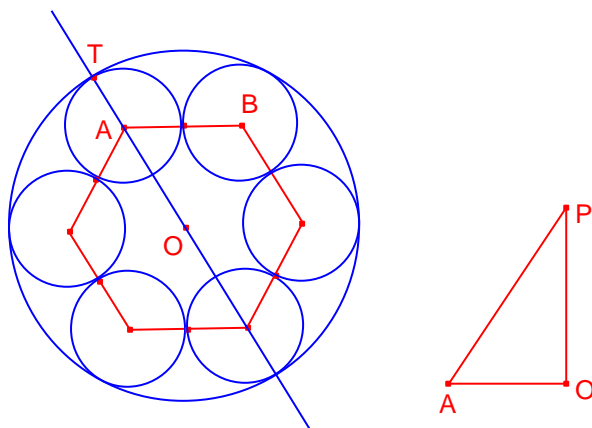
SOLUCIONES JUNIO 2020

PROBLEMAS PARA UTILIZAR PROGRAMAS GEOMÉTRICOS. Autor: RICARD PEIRÓ I ESTRUCH. IES "Abastos". València

Junio 1-2: Seis esferas de radio 1 están colocadas de manera que sus centros son los vértices de un hexágono regular. Las seis esferas son internamente tangentes a una esfera de centro el centro del hexágono. Una octava esfera es externamente tangente a las seis esferas de radio 1 e internamente tangente a la esfera más grande. Calcular el radio de la octava esfera.



Solución:



Consideremos A y B los centros de dos esferas tangentes de radios 1 y centros en un hexágono regular de centro O. $\overline{OA} = 2$. El radio de la esfera tangente exterior a las 6 esferas y de centro O es: $\overline{OT} = 3$. El centro de la octava esfera tiene el centro en la recta perpendicular al plano del hexágono regular que pasa por el centro O. Sea P el centro de la esfera y s su radio. $\overline{OP} = 3 - s$, $\overline{AP} = 1 + s$. Aplicando el teorema de Pitágoras al triángulo rectángulo $\triangle AOP$:

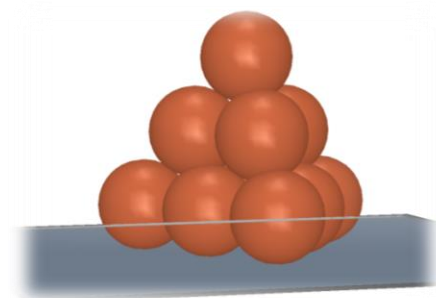
$$(s+1)^2 = 2^2 + (3-s)^2.$$

Simplificando: $8s = 12$.

Resolviendo la ecuación:

$$s = \frac{3}{2}.$$

Junio 3-4: Hemos colocado diez esferas de igual radio apiladas en tres pisos (mirar ilustración) sobre una superficie plana. Calcular la distancia desde el punto más alto del apilamiento a la superficie plana.



Solución:

Los centros de las cuatro esferas vértices del acopio son los vértices de un tetraedro regular de aristas $4r$. La distancia del punto más alto al plano tangente a las tres esferas es igual a $2r$ más la altura del tetraedro regular de arista $4r$.

Sean P , Q y R los centros de las esferas tangentes a la superficie plana.

$$\overline{PQ} = \overline{QR} = \overline{PR} = 4r.$$

Sea O el centro de la esfera superior. Sea A el centro de la cara PQR .

$$\overline{QR} = \frac{2}{3} 2\sqrt{3} r.$$

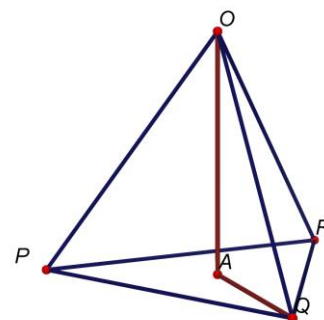
$$\overline{OQ} = 4r.$$

Aplicando el teorema de Pitágoras al triángulo rectángulo $\triangle OAQ$, la altura del tetraedro regular es:

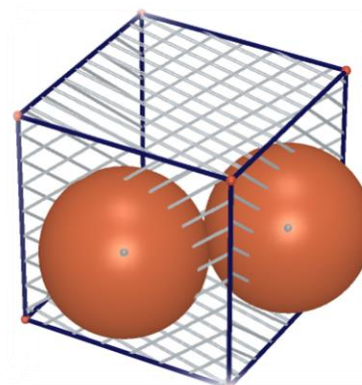
$$\overline{OA} = \sqrt{(4r)^2 - \left(\frac{4}{3}\sqrt{3}r\right)^2} = r\sqrt{\frac{8}{3}} = \frac{4r}{3}\sqrt{6}.$$

La distancia del punto más alto a la superficie plana es:

$$4r + \overline{OA} = \left(2 + \frac{4\sqrt{6}}{3}\right)r.$$



Junio 5-6: Calcular el radio de dos esferas iguales y tangentes que tienen sus centros en los centros de las caras adyacentes de un cubo de arista 1.



Solución: Sean P y Q los centros de las dos esferas tangentes.

Sea r su radio.

$$\overline{PQ} = 2r.$$

Sea M el punto medio de la arista común a las dos caras que contienen los centros P y Q .

$$\overline{PM} = \overline{QM} = \frac{1}{2}.$$

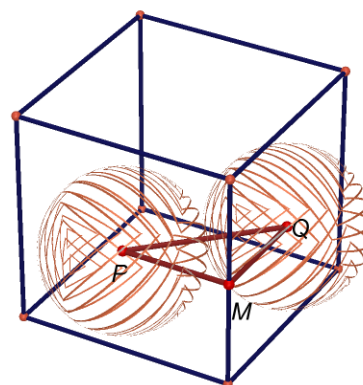
$$\angle AMQ = 90^\circ.$$

Aplicando el teorema de Pitágoras al triángulo rectángulo $\triangle PMQ$:

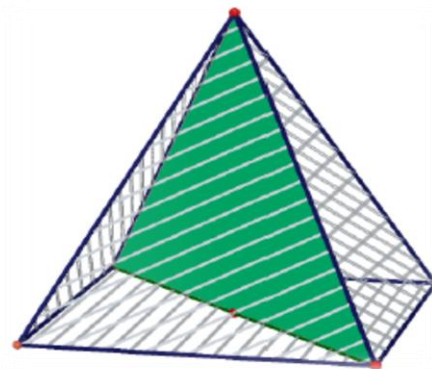
$$(2r)^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2$$

Resolviendo la ecuación:

$$r = \frac{\sqrt{2}}{4}.$$



Junio 7-14: El área de la figura que resulta de cortar una pirámide cuadrangular regular por dos aristas laterales opuestas es igual a 100 m^2 y la arista de la base es de 12 m . Determinar el área total de la pirámide.



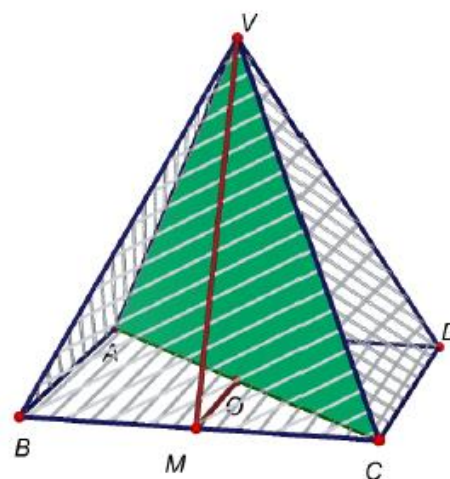
Solución: Sea $ABCDV$ la pirámide de base el cuadrado $ABCD$ de lado 12 . Sea O el centro del cuadrado, proyección del vértice V sobre la base. Sea $h = \overline{OV}$, la altura de la pirámide. EL área del triángulo isósceles $\triangle ACV$ es 100 m^2 .

$$100 = \frac{12\sqrt{2} \cdot h}{2}$$

$$h = \frac{25\sqrt{2}}{3}$$

Sea M el punto medio de la arista \overline{BC} . Sea $\overline{MV} = a$ la apotema de la pirámide. Aplicando el teorema de Pitágoras al triángulo rectángulo $\triangle MOV$:

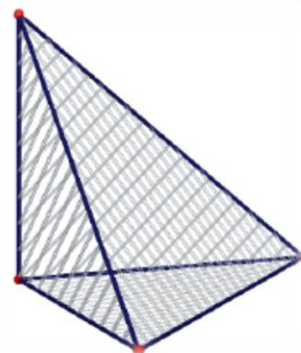
$$a = \sqrt{\left(\frac{25\sqrt{2}}{3}\right)^2 + 6^2} = \frac{\sqrt{1574}}{3}$$



El área total de la pirámide es igual a el área del cuadrado $ABCD$ más 4 veces el área del triángulo $\triangle BCV$:

$$S = 12^2 + 4 \cdot \frac{12 \cdot \frac{\sqrt{1574}}{3}}{2} = 144 + 8\sqrt{1574} \approx 461.39 \text{ m}^2$$

Junio 8-15: La base de una pirámide es un triángulo rectángulo isósceles de hipotenusa 8 m . La arista lateral que contiene al vértice del ángulo recto de esta base es perpendicular a la base y mide 5 m . Hallar el área total de la pirámide



Solución: Sea la pirámide $ABCD$ de base el triángulo rectángulo isósceles $\triangle ABC$, $\angle A = 90^\circ$. $\overline{BC} = 8$. Entonces:

$$\overline{AB} = \overline{AC} = \frac{\sqrt{2}}{2} \overline{BC} = 4\sqrt{2}$$

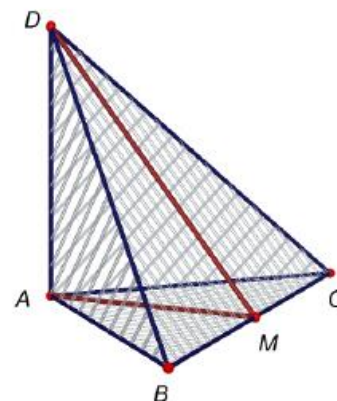
Sea M el punto medio de la hipotenusa del triángulo $\triangle ABC$.

$$\overline{AM} = \overline{BM} = 4.$$

Aplicando el teorema de Pitágoras al triángulo rectángulo $\triangle MAD$

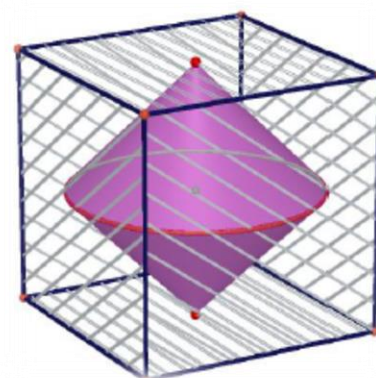
$$\overline{DM} = \sqrt{5^2 + 4^2} = \sqrt{41}.$$

El área total de la pirámide es:



$$S_{ABCD} = S_{ABC} + 2 \cdot S_{ABD} + S_{BCD} = \frac{1}{2}(4\sqrt{2})^2 + 2 \cdot \frac{1}{2} 4\sqrt{2} \cdot 5 + \frac{1}{2} \cdot 8 \cdot \sqrt{41} = 16 + 20\sqrt{2} + 4\sqrt{41} \approx 69.90 \text{ m}^2$$

Junio 9-10: Un cubo de arista 10 cm tiene inscrito un doble cono que tiene los vértices en los centros de dos caras opuestas y sus bases comunes son tangentes a las otras cuatro caras. Calcular la diferencia entre los volúmenes de los dos sólidos



Solución: Sea a la arista del cubo. El volumen del cubo es:

$$V_{\text{cub}} = a^3.$$

El volumen del doble cono es igual al volumen del cono de radio $\frac{1}{2}a$ y altura a .

$$V_{\text{con}} = \frac{1}{3} \pi \left(\frac{1}{2}a \right)^2 a = \frac{\pi}{12} a^3$$

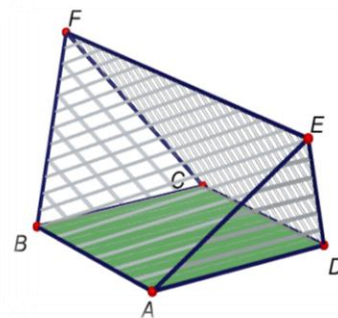
La diferencia entre los volúmenes de los dos sólidos es:

$$V = V_{\text{cub}} - V_{\text{con}} = \left(1 - \frac{\pi}{12} \right) a^3.$$

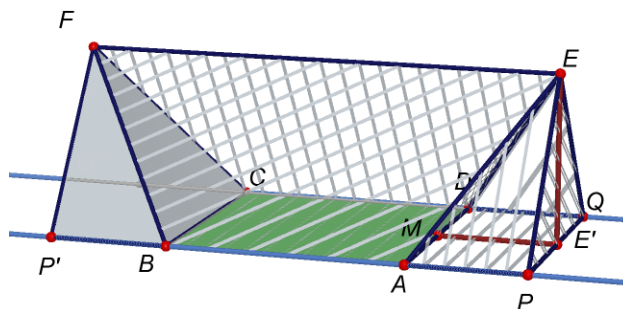
Si $a = 10$:

$$V = \left(1 - \frac{\pi}{12} \right) 10^3 \approx 738.2 \text{ cm}^3.$$

Junio 11-12: En la figura, ABCD es un cuadrado de lado $6\sqrt{2}$. EF es paralelo al cuadrado y tiene longitud $12\sqrt{2}$. Las caras BCF y ADE son triángulos equiláteros. Calcular el volumen del sólido ABCDEF



Solución:



Sean las rectas AB y CD. Sea M el punto medio de la arista \overline{AD} . Sea E' la proyección de E sobre el plano ABCD. El plano perpendicular a la recta AB que pasa por E corta las rectas AB y CD en los puntos P y Q, respectivamente. El plano perpendicular a la recta AB que pasa por F corta a las rectas AB y CD en los puntos P' y Q', respectivamente.

$$\overline{PP'} = \overline{EF} = 12\sqrt{2}$$

$$\overline{AP} = \overline{BP'} = \frac{1}{2}(\overline{EF} - \overline{AB}) = 3\sqrt{2}.$$

El volumen del sólido ABCDEF es igual al volumen del prisma PQEP'Q'F menos dos veces el volumen de la pirámide APQDE. Aplicando el teorema de Pitágoras al triángulo rectángulo $\triangle AME$:

$$\overline{EM} = \sqrt{(6\sqrt{2})^2 - (3\sqrt{2})^2} = 3\sqrt{6}.$$

Aplicando el teorema de Pitágoras al triángulo rectángulo $\triangle ME'E$:

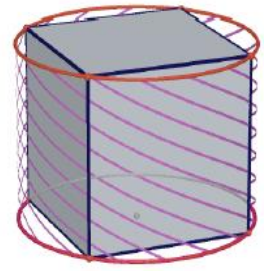
$$\overline{EE'} = \sqrt{(3\sqrt{6})^2 - (3\sqrt{2})^2} = 6.$$

El volumen del sólido ABCDEF es:

$$S_{ABCDEF} = \left(\frac{1}{2} \overline{PQ} \cdot \overline{EE'} \cdot \overline{EF} \right) - 2 \left(\frac{1}{3} \overline{AP} \cdot \overline{PQ} \cdot \overline{EE'} \right).$$

$$S_{ABCDEF} = \left(\frac{1}{2} 6\sqrt{2} \cdot 6 \cdot 12\sqrt{2} \right) - 2 \left(\frac{1}{3} 3\sqrt{2} \cdot 6\sqrt{2} \cdot 6 \right) = 288.$$

Junio 13: Un cilindro de 1 m de diámetro está circunscrito en un cubo. Calcular el volumen de los dos cuerpos.



Solución: Sea a la arista del cubo. El volumen del cubo es:

$$V_{\text{cubo}} = a^3.$$

La diagonal de una cara del cubo es igual al diámetro del cilindro: $a\sqrt{2} = 1 \Rightarrow a = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

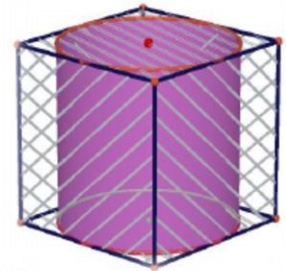
El cilindro tiene radio $\frac{1}{2}$ y altura a . El volumen del cilindro es:

$$V_{\text{cilindro}} = \pi \left(\frac{1}{2}\right)^2 a = \frac{\pi\sqrt{2}}{8}.$$

El volumen del cubo es:

$$V_{\text{cubo}} = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^3 = \frac{\sqrt{2}}{4}.$$

Junio 16: Un cubo de arista 1m está circunscrito a un cilindro. Calcular el volumen de los dos sólidos



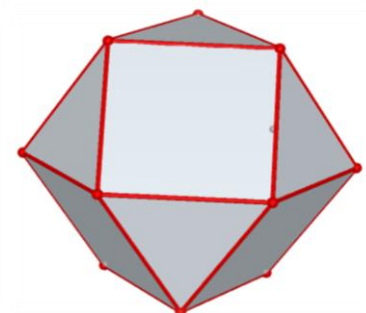
Solución: El radio del cilindro es igual a la mitad de la arista del cubo y la altura es igual a la arista.

$$V_{\text{cilindro}} = \pi \left(\frac{1}{2}\right)^2 \cdot 1 = \frac{\pi}{4}$$

El volumen del cubo es:

$$V_{\text{cubo}} = 1^3 = 1$$

Junio 17-18: Un cuboctaedro es un poliedro semirregular formado por 8 triángulos equiláteros y 6 cuadrados de lados iguales. Si el cuboctaedro tiene aristas de 1 cm, calcular la distancia entre dos caras triangulares opuestas.



Solución: Sea $\triangle ABC$ una cara triangular equilátera del cuboctaedro: $\overline{AB} = 1$. El cuboctaedro está inscrito en un cubo, tal que los vértices del cuboctaedro son los puntos medios de las aristas del cubo. Sean D y D' vértices opuestos del cubo tal que la recta DD' es perpendicular a la cara $\triangle ABC$ del cuboctaedro. La recta DD' corta la cara $\triangle ABC$ en el punto P. Aplicando el teorema de Pitágoras al triángulo rectángulo $\triangle ABD$:

$$\overline{AD} = \frac{\sqrt{2}}{2} \overline{AB} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

La arista del cubo es: $a = 2 \cdot \overline{AD} = \sqrt{2}$. La diagonal $\overline{DD'}$ del cubo mide:

$$\overline{DD'} = a\sqrt{3} = \sqrt{6}.$$

P es el centro del triángulo equilátero $\triangle ABC$:

$$\overline{BP} = \frac{\sqrt{3}}{3} \overline{AB} = \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

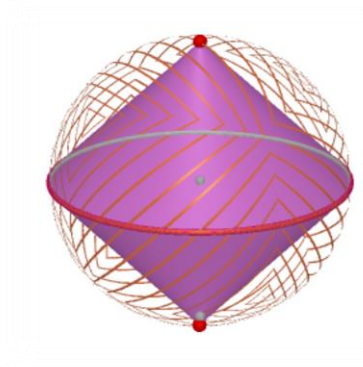
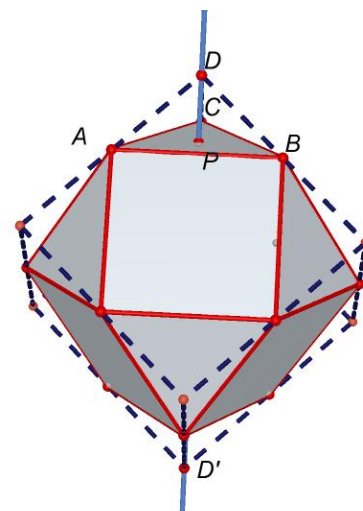
Aplicando el teorema de Pitágoras al triángulo rectángulo $\triangle BPD$:

$$\overline{PD} = \sqrt{\overline{AD}^2 - \overline{BP}^2} = \sqrt{\frac{1}{2} - \frac{1}{3}} = \frac{\sqrt{6}}{6}.$$

La distancia entre dos caras triangulares opuestas del cuboctaedro es:

$$d = \overline{DD'} - 2 \cdot \overline{PD} = \sqrt{6} - 2 \cdot \frac{\sqrt{6}}{6} = \frac{2}{3} \sqrt{6}.$$

La distancia entre dos caras cuadradas opuestas es igual a la arista del cubo.



Junio 19-20: En una esfera de radio R se ha inscrito un doble cono. Calcular la proporción entre los volúmenes y las áreas del doble cono y la esfera

Solución: Empezamos con los volúmenes. El cono de radio R y altura R tiene volumen:

$$V_{\text{con}} = \frac{1}{3} \pi R^3.$$

El volumen del doble cono es:

$$V_{2\text{con}} = \frac{2}{3} \pi R^3 .$$

El volumen de la esfera es:

$$V_{\text{esfera}} = \frac{4}{3} \pi R^3 .$$

La proporción entre los volúmenes del doble cono y la esfera es:

$$\frac{V_{2\text{con}}}{V_{\text{esfera}}} = \frac{\frac{2}{3} \pi R^3}{\frac{4}{3} \pi R^3} = \frac{1}{2} .$$

Seguimos con las áreas. Aplicando el teorema de Pitágoras, la generatriz del cono de radio R y altura R es:

$$g = R\sqrt{2} .$$

El área lateral del cono de radio R y altura R es:

$$S_{L\text{con}} = \pi Rg = \pi\sqrt{2}R^2$$

El área del doble cono es:

$$S_{2L\text{con}} = \pi Rg = 2\pi\sqrt{2}R^2 .$$

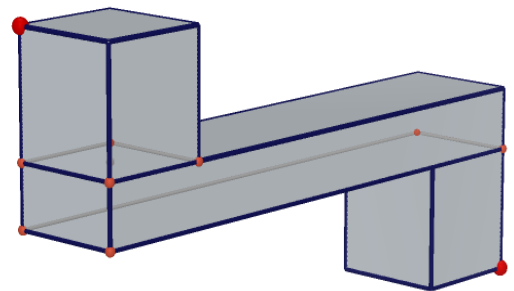
El área de la esfera es:

$$S_{\text{esfera}} = 4\pi R^2$$

La proporción entre las áreas del doble cono y la esfera es.

$$\frac{S_{2L\text{con}}}{S_{\text{esfera}}} = \frac{2\pi\sqrt{2}R^2}{4\pi R^2} = \frac{\sqrt{2}}{2} .$$

Junio 21-28: En la figura hay representado un conducto de aire de dimensiones 1x2x10 y en sus extremos dos cubos de dimensiones 2x2x2. El conducto está completamente vacío y hecho con chapa. Una araña va por el interior desde un extremo (punto rojo) hasta el otro extremo (punto rojo). Averiguar la distancia del camino más corto que puede recorrer la araña (Cruz Mathematicorum CC327)



Solución: El camino más corto es el formado per la línea poligonal ABCDE.

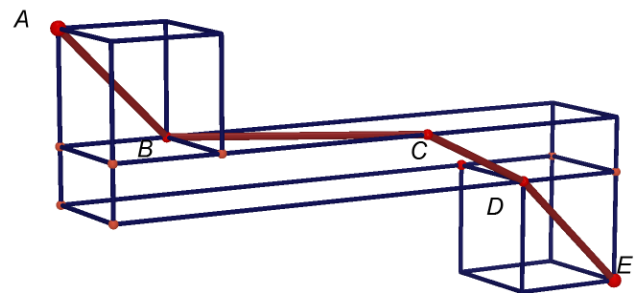
Haciendo el desarrollo plano del conducto:

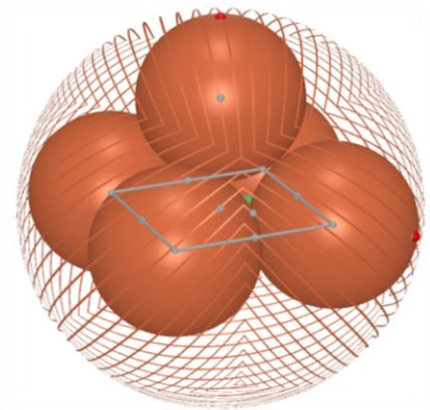
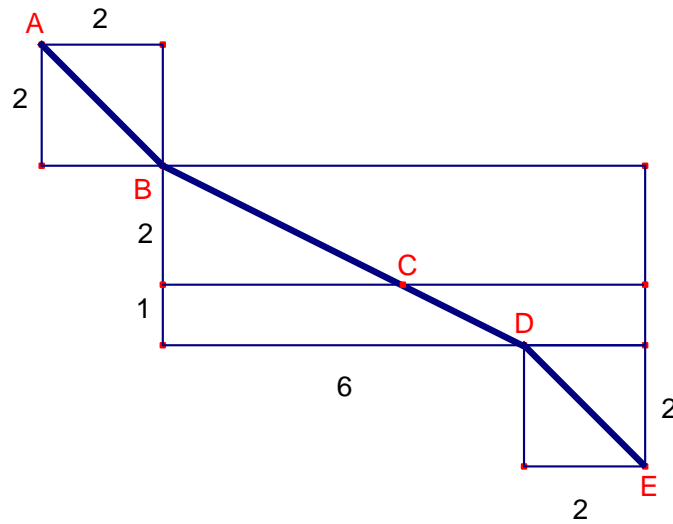
Aplicando el teorema de Pitágoras:

$$\overline{AB} = \overline{DE} = 2\sqrt{2} .$$

$$\overline{BD} = 3\sqrt{5} .$$

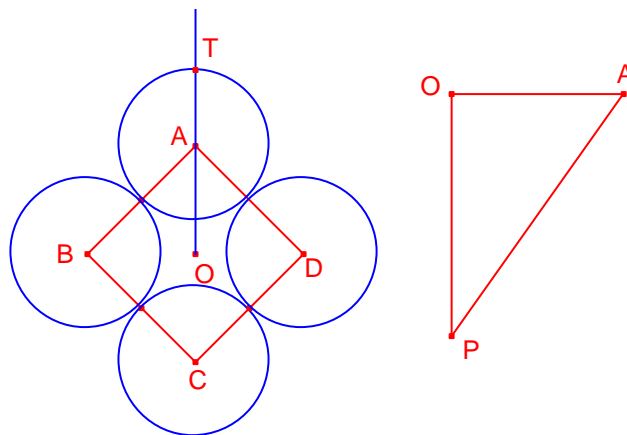
$$\overline{AB} + \overline{BD} + \overline{DE} = 4\sqrt{2} + 3\sqrt{5} = \sqrt{32} + \sqrt{45} .$$





Junio 22-23: Cuatro esferas de radio 1 se posicionan de manera que sus centros están en los vértices de un cuadrado de lado 2. Las cuatro esferas son internamente tangentes a una esfera más grande con centro el centro del cuadrado. Una sexta esfera es externamente tangente a las cuatro más pequeñas e internamente tangente a la más grande. Calcular el radio de esta sexta esfera

Solución:



Consideremos A, B, C y D los centros de las cuatro esferas tangentes de radios 1 y vértices de un cuadrado de centro O.

$$\overline{OA} = \sqrt{2} .$$

El radio de la esfera tangente exterior a las esferas y de centro O es:

$$\overline{OT} = 1 + \sqrt{2} .$$

El centro de la sexta esfera está en la recta perpendicular al plano del cuadrado que pasa por el centro O. Sea P el centro de esa esfera y s su radio.

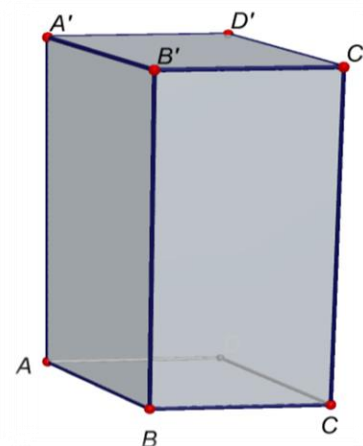
$$\overline{OP} = 1 + \sqrt{2} - s , \overline{AP} = 1 + s .$$

Aplicando el teorema de Pitágoras al triángulo rectángulo $\overset{\Delta}{AOP}$:

$$(s+1)^2 = (\sqrt{2})^2 + (1+\sqrt{2}-s)^2.$$

Resolviendo la ecuación: $s = 1$.

Junio 24-25: La base de un paralelepípedo recto es un rombo de lado 12 cm. Uno de los ángulos de la base mide 120° y la arista lateral del paralelepípedo mide 25 cm. Calcular las longitudes de las diagonales, el área total y el volumen del paralelepípedo.



Solución:

Sea $ABCA'B'C'D'$ el paralelepípedo recto de base el rombo $ABCD$

$$\overline{AB} = 12, \angle B = \angle D = 120^\circ, \angle A = \angle C = 60^\circ$$

y arista lateral $\overline{AA'} = 25$.

$$\overline{AC} = 12\sqrt{3}, \overline{BD} = 12.$$

$$S_{ABCD} = \frac{12 \cdot 12\sqrt{3}}{2} = 72\sqrt{3} \approx 124.71 \text{ cm}^2.$$

El volumen del paralelepípedo es:

$$V = S_{ABCD} \cdot \overline{AA'} = 25 \cdot 72\sqrt{3} = 1800\sqrt{3} \approx 3117.69 \text{ cm}^3.$$

El área total del paralelepípedo es:

$$S = 2 \cdot S_{ABCD} + 4 \cdot S_{ABBA'} = 2 \cdot 72\sqrt{3} + 4 \cdot 12 \cdot 25 = 1200 + 144\sqrt{3} \approx 1449.42 \text{ cm}^2.$$

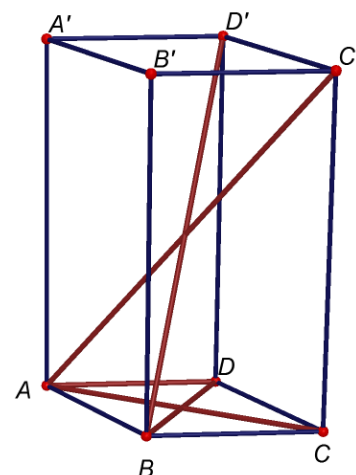
Sean $\overline{AC'}$ la diagonal mayor, $\overline{BD'}$ la diagonal menor.

Aplicando el teorema de Pitágoras al triángulo rectángulo $\triangle ACC'$:

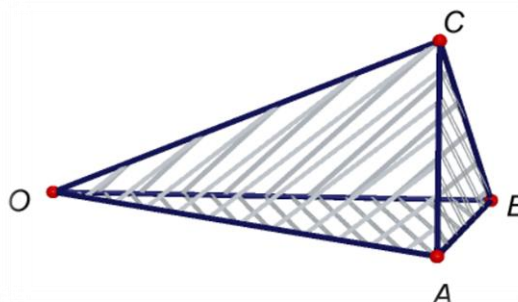
$$\overline{AC'} = \sqrt{(12\sqrt{3})^2 + 25^2} = \sqrt{1057} \approx 32.51 \text{ cm}.$$

Aplicando el teorema de Pitágoras al triángulo rectángulo $\triangle BDD'$:

$$\overline{BD'} = \sqrt{12^2 + 25^2} = \sqrt{769} \approx 27.73 \text{ cm}.$$



Junio 26-27: El vértice O de un triedro, forma con las tres caras iguales ángulos de 30° y las tres aristas que salen del vértice miden 12 cm. Calcular el área total y el volumen del tetraedro que se forma



Solución: Las tres caras que formen el triedro de vértice O son triángulos isósceles, por lo tanto, el tetraedro (de base el $\triangle ABC$) es recto. Además, el triángulo $\triangle ABC$ es equilátero.

Aplicando el teorema del coseno al triángulo $\triangle OAB$:

$$\overline{AB}^2 = 12^2 + 12^2 - 2 \cdot 12 \cdot 12 \cdot \cos 30^\circ .$$

$$\overline{AB}^2 = 144(2 - \sqrt{3}) .$$

El área del triángulo equilátero $\triangle ABC$ es:

$$S_{ABC} = \frac{\sqrt{3}}{4} \overline{AB}^2 = 36(-3 + 2\sqrt{3}) .$$

El área del triángulo $\triangle OAB$ es:

$$S_{OAB} = \frac{1}{2} 12 \cdot 12 \cdot \sin 30^\circ = 36 .$$

El área total del tetraedro OABC es:

$$S = S_{ABC} + 3 \cdot S_{OAB} = 36(-3 + 2\sqrt{3}) + 3 \cdot 36 = 72\sqrt{3} \approx 124.71 \text{cm}^2 .$$

La proyección del vértice O sobre la base $\triangle ABC$ es el baricentro G del triángulo equilátero.

Sea M el punto medio del lado \overline{AB} .

$$\overline{CM} = \frac{\sqrt{3}}{2} \overline{AB} = 6\sqrt{6 - 3\sqrt{3}} .$$

Aplicando la propiedad del baricentro:

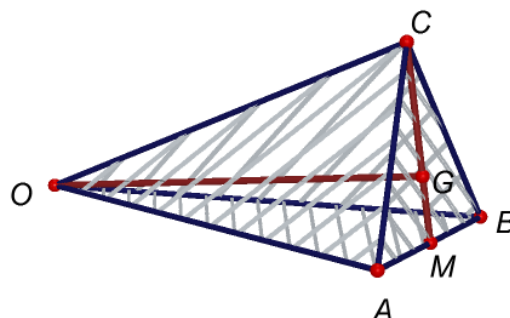
$$\overline{CG} = \frac{2}{3} \overline{CM} = 4\sqrt{6 - 3\sqrt{3}} .$$

Aplicando el teorema de Pitágoras al triángulo rectángulo $\triangle OPC$:

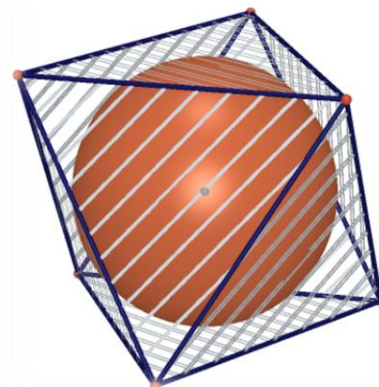
$$\overline{OP} = \sqrt{12^2 - \left(4\sqrt{6 - 3\sqrt{3}}\right)^2} = 4\sqrt{3 + 3\sqrt{3}} .$$

El volumen del tetraedro es:

$$V = \frac{1}{3} S_{ABC} \cdot \overline{OP} = \frac{1}{3} 36(-3 + 2\sqrt{3}) 4\sqrt{3 + 3\sqrt{3}} = 48(-3 + 2\sqrt{3})\sqrt{3 + 3\sqrt{3}} \approx 63.78 \text{cm}^3 .$$



Junio 29-30: La arista de un octaedro regular mide 12 cm. Calcular el radio y el área de la esfera inscrita en él.



Solución: Cuatro vértices del octaedro (que determinan un plano), determinan un cuadrado de lado 12. El centro O de este cuadrado es el centro de la esfera inscrita y circunscrita al octaedro. La diagonal de este cuadrado es igual al diámetro de la esfera circunscrita. Entonces el radio de la esfera circunscrita es:

$$R = \overline{OA} = 6\sqrt{2}$$

Consideremos la cara $\triangle ABC$ del octaedro regular. La proyección del centro O sobre la cara $\triangle ABC$ es el baricentro G del triángulo equilátero $\triangle ABC$. El radio de la esfera inscrita al octaedro es $r = \overline{OG}$

$$\overline{AG} = \frac{\sqrt{3}}{3} \overline{AB} = 4\sqrt{3}.$$

Aplicando el teorema de Pitágoras al triángulo rectángulo $\triangle AGO$:

$$r = \sqrt{(6\sqrt{2})^2 - (4\sqrt{3})^2} = 2\sqrt{6}.$$

El área de la esfera inscrita al octaedro es:

$$S = 4\pi r^2 = 96\pi \approx 3018.59\text{cm}^2.$$

