

## SOLUCIONS SETEMBRE 2019

Problemes per a primer i segon de l'ESO. Autors: "Col·lectiu Concurs de Primavera".  
Comunitat de Madrid. XX Concurs de Primavera. 2016.

<https://www.concursprimavera.es/#concurso>

**Setembre 1-8:** Completa els buits perquè la multiplicació estiga ben feta.

$$\begin{array}{r}
 \square 58 \\
 \times 4\square \\
 \hline
 2\square 06 \\
 1\square 32 \\
 \hline
 1\square\square 26
 \end{array}$$

**Solució:** Busquem les unitats del segon factor preguntant-nos que xifra multiplicada per 8 dona un número amb unitats la xifra 6. Ens ixen dos candidats:  $8 \times 2 = 16$  i  $8 \times 7 = 56$ . La xifra 2 no pot ser, perquè col·locada en la multiplicació proporcionada fa aparéixer  $58 \times 2 = 116 \neq \square 06$ . Per tant, han de ser 7 les unitats del segon factor. Amb això

$$\begin{array}{r}
 \square 58 \\
 \times 47 \\
 \hline
 2\square 06 \\
 1\square 32 \\
 \hline
 1\square\square 26
 \end{array}$$

Després de multiplicar el 7 per 5, en portem 4. Busquem ara una xifra z que complisca  $7 \cdot z + 4 = \text{vint i poc}$ . Per tanteig obtenim que l'únic valor possible és  $z = 3$ . I ara només queda obtenir la resta de les xifres:

$$\begin{array}{r}
 3\square 58 \\
 \times 47 \\
 \hline
 2506 \\
 1432 \\
 \hline
 16826
 \end{array}$$

**Setembre 2-3:** En cadascuna de les cares d'un dau apareix un i només un dels números -3, -2, -1, 0, 1, 2 sense faltar ni repetir cap. Si ho llancem dues vegades i multipliquem els números que apareixen en la cara superior, quina és la probabilitat que el producte siga negatiu?

**Solució:** La matriu de resultats possibles de l'experiment és:

	-3	-2	-1	0	1	2
-3	9	6	3	0	-3	-6
-2	6	4	2	0	-2	-4
-1	3	2	1	0	-1	-2
0	0	0	0	0	0	0
1	-3	-2	-1	0	1	2
2	-6	-4	-2	0	2	4

Cada cel·la té les mateixes possibilitats de verificar-se. Com hi ha dotze cel·les que donen resultat negatiu, tindrem que la probabilitat sol·licitada és:

$$\frac{12}{36} = \frac{1}{3}$$

**Setembre 4:** Hui compleixen anys Dani i la seua tia Amparo: Dani compleix 13 anys i Amparo 31. Quants anys han de passar, perquè, per tercera vegada, les dues mateixes xifres indiquen els seus anys?

**Solució:** Siga  $x$  els anys que han de passar. Aleshores si  $\overline{yz}$  és l'edat de Dani i  $\overline{zy}$  la d'Amparo, deu complir-se:

$$\left. \begin{aligned} 13 + x &= 10y + z \\ 31 + x &= 10z + y \end{aligned} \right\}$$

Restant la primera de la segona obtenim:

$$18 = 9z - 9y = 9 \cdot (z - y) \Rightarrow z - y = 2$$

$z$	$y = z - 2$	Edat Dani: $\overline{yz}$	Edat Amparo: $\overline{zy}$	
2	0	2	20	
3	1	13	31	Primera vegada
4	2	24	42	Segona vegada
5	3	35	53	Tercera vegada
6	4	46	64	
7	5	57	75	
8	6	68	86	
9	7	79	97	

Cada 11 anys permuten les xifres. Han de passar  $(35 - 13 =)$  22 anys perquè, per tercera vegada, les dues mateixes xifres indiquen els seus anys

**Setembre 5-6:** Dani i Aitana han decidit estalviar. Dani estalvia 30 cèntims cada dia i Aitana decideix estalviar 1 cèntim el primer dia, 2 cèntims el segon dia, 3 cèntims el tercer dia i així successivament. Quants dies han de passar perquè l'estalviat per Aitana siga doble de l'estalviat per Dani?

**Solució:** Després de  $x$  dies, Dani tindrà estalviat  $30 \cdot x$  i Aitana tindrà estalviat:

$$1 + 2 + 3 + \dots + x = \frac{(x + 1) \cdot x}{2}$$

Com que l'estalviat per Aitana ha de ser doble de l'estalviat per Dani, ha de complir-se:

$$\frac{(x + 1) \cdot x}{2} = 60x$$

Resolent aquesta equació arribem a  $x = 119$  dies.

**Setembre 7:** Si tres quarts de  $a$ , és igual a cinc huitens de  $b$ , quant val la raó entre  $a$  i  $b$ ?

**Solució:** Tindrem, de l'exigit en l'enunciat i suposant que  $b \neq 0$  (Si  $b = 0$  necessàriament  $a = 0$  i no té sentit parlar de la raó entre  $a$  i  $b$ ):

$$\frac{3}{4}a = \frac{5}{8}b \Rightarrow \frac{a}{b} = \frac{5 \cdot 4}{3 \cdot 8} = \frac{5}{6}$$

**Setembre 9:** Si 6 gossos i 4 gats mengen el mateix que 7 gossos i dos gats, és cert que 6 gossos i 4 gats mengen el mateix que 5 gossos i 6 gats?

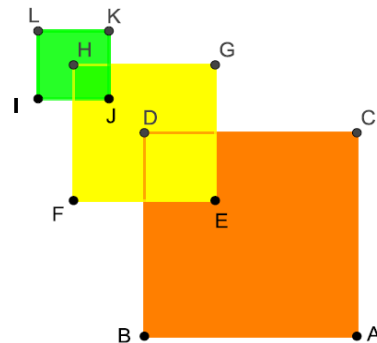
**Solució:** Si representem per  $p$  el que menja un gos i per  $g$  el que menja un gat, tindrem:

$6p + 4g = 7p + 2g$  (i llevant de cada membre el que consumeixen 6 gossos)  $4g = 1p + 2g$  (i llevant de cada membre el que consumeixen 2 gats)  $2g = 1p$

Ara:  $6p + 4g = 5p + 1p + 4g = 5p + 2g + 4g = 5p + 6g$

Per tant 6 gossos i 4 gats consumeixen el mateix que 5 gossos i 6 gats.

**Setembre 10-11:** Laia té 3 quadrats, un de 2 cm de costat, un altre de 4 cm de costat i el tercer de 6 cm de costat. Els ha col·locats amb els costats paral·lels i els vèrtexs dels grans en els centres dels xicotets, com es veu en la figura. Quina és l'àrea de la figura que ha format?



**Solució:** Sumant les àrees dels tres quadrats obtenim  $(22 + 42 + 62 =) 56 \text{ cm}^2$ . Però així hem sumat dues vegades l'àrea dels quadrats en els quals se solapen els quadrats inicials. Devem, doncs, restar  $(1^2 + 2^2 =) 5 \text{ cm}^2$ . L'àrea de la figura és:  $(56 - 5 =) 51 \text{ cm}^2$ .

**Setembre 12:** El producte de 3 naturals consecutius és  $2^3 \cdot 3^3 \cdot 7 \cdot 13$ , quant val la suma dels 3 números?

**Solució:** Pel fet que, entre tres naturals consecutius només un és múltiple de tres, apareix com un candidat del trio el número  $(3^3 =) 27$ , Com  $(2 \cdot 13 =) 26$  ja tenim un altre candidat.

Finalment queda  $2^2 \cdot 7$ , que és 28 i completem els tres naturals consecutius. Per tant, la solució al problema és:  $26 + 27 + 28 = 81$

**Setembre 13-14:** En un gran banquet s'han servit el doble de plats de pollastre que de titot. Dos terços dels plats de pollastre eren de cuixes i la resta de pits. En canvi, dels plats de titot només un quart va ser de cuixes i la resta de pits de titot. Quina fracció dels plats de pits eren de polit?

**Solució:**

Anirem emplenant la taula de doble entrada adjunta amb la informació proporcionada en l'enunciat

	cuixes	pits	
pollastre			
titot			

	cuixes	pits	
pollastre			$2x$
titot			$x$
			$3x$

s'han servit el doble de plats de pollastre que de titot

	cuixes	pits	
pollastre	$\frac{2}{3} \cdot 2x$	$\frac{1}{3} \cdot 2x$	$2x$
titot			$x$
			$3x$

dos terços dels plats de pollastre eren de cuixes i la resta de pits de pollastre

	cuixes	pits	
pollastre	$\frac{2}{3} \cdot 2x$	$\frac{1}{3} \cdot 2x$	$2x$
titot	$\frac{x}{4}$	$\frac{3}{4} \cdot x$	$x$
			$3x$

dels plats de polit només un quart va ser de cuixes i la resta de pits

Per últim, tenim:

	cuixes	pits	
pollastre	$\frac{2}{3} \cdot 2x$	$\frac{1}{3} \cdot 2x$	$2x$
titot	$\frac{x}{4}$	$\frac{3}{4} \cdot x$	$x$
	$\frac{19x}{12}$	$\frac{17x}{12}$	$3x$

I per a concloure:

$$\frac{\frac{3x}{4}}{\frac{17x}{12}} = \frac{9}{17}$$

**Setembre 15:** En una bossa hi ha 60 boles, algunes roges, altres verdes i altres blaves. Si trac una bola a l'atzar, la probabilitat que siga roja és  $\frac{1}{2}$ , i que siga blava,  $\frac{3}{10}$ . Quantes boles verdes hi ha?

**Solució:** El nombre de boles verdes s'obté restant del total de boles, les boles roges i les blaves.

De color roig hi ha  $((\frac{1}{2}) \cdot 60 =)$  30. De color blau hi ha  $((\frac{3}{10}) \cdot 60 =)$  18. Per tant, de color verd hi ha  $(60 - 30 - 18 =)$  12

**Setembre 16-17:** Amb glaçons idèntics he construït un gran bloc en forma de rajola. Després he decidit llevar els 65 glaçons exteriors d'una de les cares del bloc i després he llevat els 30 glaçons exteriors d'una altra de les cares. Quants glaçons queden ara en el bloc?

**Solució:** Suposem que les dimensions de la rajola són:  $a \times b \times c$ , on  $a$  és l'altura,  $b$  la longitud i  $c$  la profunditat. Si la primera capa que llevem és la superior tindrem que  $c \times b = 65 = 65 \cdot 1 = 13 \cdot 5$ , que proporciona (per la unicitat de la descomposició factorial en primers) dues possibles solucions:

$$c = 65 \text{ i } b = 1$$

$$c = 13 \text{ i } b = 5$$

Si suposem ara, que la segona capa que llevem és la davantera, la primera solució aporta  $(a - 1) \cdot 1 = 30 \Rightarrow a = 31$ . Per tant, una solució és:  $31 \times 1 \times 65$ .

La segona solució aporta  $(a - 1) \cdot 5 = 30 \Rightarrow a = 7$ . D'ací que, la segona solució és:  $7 \times 5 \times 13$

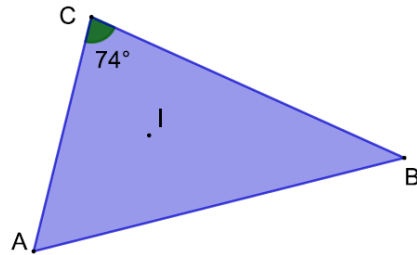
Per a la primera solució queden  $(31 \cdot 1 \cdot 65 - 65 - 30 =)$  1920 glaçons

Per a la segona solució queden  $(7 \cdot 5 \cdot 13 - 65 - 30 =)$  360 glaçons

**Setembre 18:** Quants números de l'1 al 1000 compleixen que la suma de les seues xifres és igual a 4?

**Solució:** D'una xifra està només el 4. De dues xifres estan el 13, el 22, el 31 i el 40. De tres xifres estan el 112 (i les seues permutacions, el 121 i el 211), el 130 (i les seues permutacions, el 103, el 301 i el 310), el 220 (i les seues permutacions, el 202) i el 400. En total  $(1 + 4 + 10 =)$  15 números

**Setembre 19-20:** L'incentre, I, és el punt en què es tallen les bisectrius interiors d'un triangle  $\triangle ABC$ . Si  $\angle ACB=74^\circ$ , quant mesura l'angle  $\angle AIB$ ?

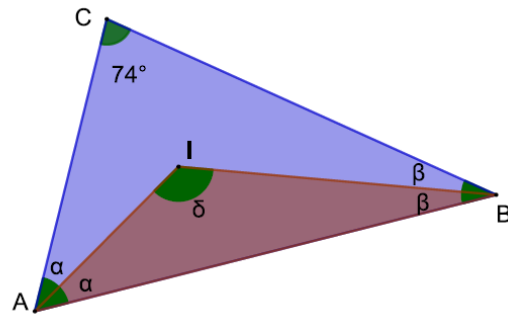


**Solució:** En el triangle  $\triangle ABC$  tenim:

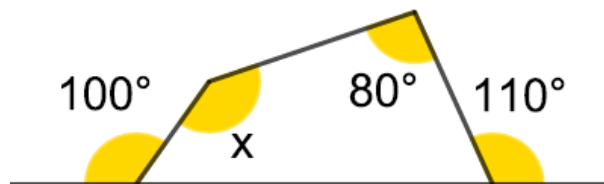
$$2\alpha + 2\beta + 74^\circ = 180^\circ \Rightarrow \alpha + \beta = 53^\circ$$

En el triangle  $\triangle AIB$  tenim:

$$\alpha + \beta + \delta = 180^\circ \Rightarrow \delta = 180^\circ - (\alpha + \beta) = 180^\circ - 53^\circ = 127^\circ$$

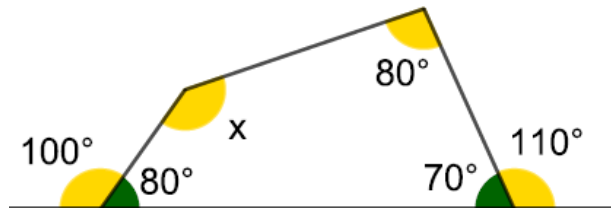


**Setembre 21:** Quant val l'angle x?



**Solució:** Tindrem (mirar figura) que la suma dels angles interiors del quadrilàter sumen ( $2 \cdot 180 =$ )  $360^\circ$ . Per tant:

$$x = 360^\circ - (80^\circ + 80^\circ + 70^\circ) = 130^\circ$$



**Setembre 22:** Si 7 melons d'Alger i 1 meló pesen el mateix que 3 melons d'Alger i 7 melons, quants melons d'Alger pesen el mateix que 9 melons?

**Solució:** Si representem per  $\Delta$  (el pes d') un meló d'Alger i per  $\square$  (el pes d'un) meló tenim la següent successió de balances equilibrades:

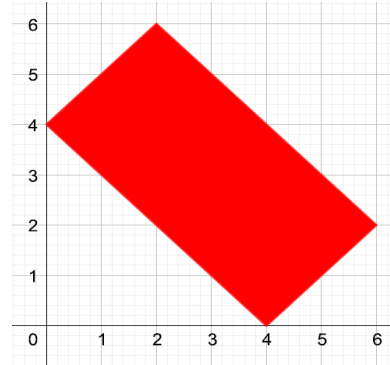
$$7\Delta + 1\square = 3\Delta + 7\square \Rightarrow (\text{llevant de cada plat un meló}) 7\Delta = 3\Delta + 6\square \Rightarrow (\text{llevant de cada plat de la balança 3 melons d'Alger}) 4\Delta = 6\square \Rightarrow 2\Delta = 3\square \Rightarrow 6\Delta = 9\square$$

És a dir 9 melons pesen el mateix que 6 melons d'Alger.

També podem plantejar una proporció:

$$\frac{4 \text{ melons d'Alger}}{6 \text{ melons}} = \frac{x \text{ melons d'Alger}}{9 \text{ melones}} \Rightarrow x = \frac{4 \cdot 9}{6} = 6 \text{ melons d'Alger}$$

**Setembre 23:** Quina fracció del quadrat està acolorida de roig?



**Solució:** Per a calcular l'àrea del rectangle roig, a l'àrea del quadrat gran de costat 6 li restarem l'àrea dels dos triangles rectangles isòsceles de catets 2 unitats i l'àrea dels dos triangles rectangles isòsceles de catets 4 unitats:

$$\text{Àrea} = 6^2 - 2 \cdot 2 - 4 \cdot 4 = 16.$$

La proporció sol·licitada és:

$$\frac{16}{36} = \frac{4}{9}$$

**Setembre 24:** Dividim un quadrat en cinc rectangles iguals i cadascun d'ells té 72 cm de perímetre, quants cm mesura el costat del quadrat?

**Solució:** L'única manera que cinc rectangles iguals formen un quadrat és que els rectangles estiguen un al costat d'un altre, és a dir si un rectangle té per dimensions a x b, ha de complir-se que  $5 \cdot a = b$ . Amb això queda generat el sistema:

$$\left. \begin{array}{l} 2a + 2b = 72 \\ 5a = b \end{array} \right\}$$

que té per solució:  $a = 6$  i  $b = 30$ . Amb això el costat del quadrat és de 30 cm.

**Setembre 25:** Trobeu tots els números de dues xifres de manera que són iguals al quàdruple de la suma de les seues xifres.

**Solució:** Siguen  $\overline{ab} = 10 \cdot a + b$ , les xifres buscades. De l'enunciat tindrem:

$$10 \cdot a + b = 4 \cdot (a + b) \Rightarrow 6 \cdot a = 3 \cdot b \Rightarrow 2a = b$$

I donant valors a a tenim:

a	b = 2a	10·a + b = $\overline{ab}$
1	2	12
2	4	24
3	6	36
4	8	48

**Setembre 26:** La diferència entre l'angle major i el mitjà d'un triangle és  $23^\circ$ , i entre el major i el xicotet és  $31^\circ$ , quant mesuren els seus angles?

**Solució:** Si  $\alpha$  designa la mesura de l'angle major,  $\alpha - 23$  serà la mesura de l'angle mitjà i  $\alpha - 31$  serà la mesura de l'angle petit. Com que la suma dels tres angles interiors d'un triangle dona  $180^\circ$ , tindrem:

$$\alpha + \alpha - 23 + \alpha - 31 = 180 \Rightarrow \alpha = 78^\circ$$

Els angles mesuren, doncs:  $78^\circ$ ,  $55^\circ$  y  $47^\circ$

**Setembre 27-28:** Entre dues impressores s'han d'imprimir 440 cartells. En un minut, la ràpida imprimeix 7 cartells i la lenta només 6. Comencen juntes a funcionar i al cap d'una estona la ràpida es queda sense paper pel que la lenta continua treballant 17 minuts més. Quants cartells va imprimir la ràpida?

**Solució:** Primer treballen totes dues m minuts, en aquest temps la ràpida va imprimir 7m cartells i la lenta va imprimir 6m cartells, en total 13 m cartells. Després la lenta va treballar 17 minuts més, produint  $(17 \cdot 6 =)$  102 cartells. Tindrem, llavors:

$$13m + 102 = 440 \Rightarrow m = 26$$

La ràpida va imprimir  $(26 \cdot 7 =)$  182 cartells.

**Setembre 29:** Quants números capicues de cinc xifres complisquen la condició que quatre d'elles siguin iguals i l'altra diferent?

**Solució:** En treballar amb capicues de cinc xifres és clar que la xifra diferent ha de ser la central i les altres quatre, iguals.

Si la xifra central és 0, les altres quatre poden ser uns, dosos, tresos, ... , nous. És a dir, hi ha 9 capicues dels considerats amb xifra central 0.

Si la xifra central és x (amb  $x \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ ) hi ha 8 números capicues dels considerats. Per exemple, si  $x = 3$ , els capicues són: 11311, 22322, 44344, 55355, 66366, 77377, 88388 i 99399.

En total hi ha  $(9 + 9 \cdot 8 =)$  81 capicues amb les condicions requerides.

**Setembre 30:** Si en un calaix caben 7 quilos d'arròs, quants quilos caben en un altre les arestes dels quals són el doble de les del primer calaix?



**Solució:** Si les dimensions del primer calaix són  $a \times b \times c$ , les dimensions del segon calaix són  $2a \times 2b \times 2c$ . Per tant, si el volum del primer calaix és  $V$ , el volum del segon calaix és  $8V$ . D'ací, que, si en el primer calaix caben 7 quilos d'arròs, en el segon caben  $(7 \cdot 8 =)$  56 quilos d'arròs