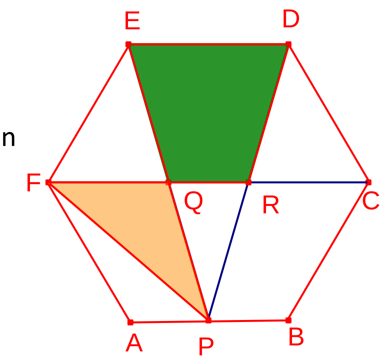
SOLUCIONS OCTUBRE 2019

PROBLEMES PER A UTILITZAR PROGRAMES GEOMÈTRICS. Autor: Ricard Peiró i Estruch. IES "Abastos". València



Octubre 1-2: Siga l'hexàgon regular ABCDEF. Siga P el punt mig del costat $\overline{AB}$.

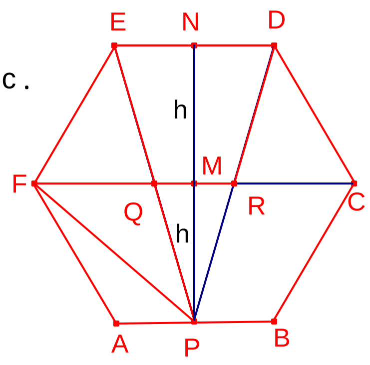
El segment $\overline{EP}$ talla la diagonal $\overline{FC}$ en el punt Q. El segment $\overline{EP}$ talla la diagonal $\overline{FC}$ en el punt R.

Calculeu la proporció entre les àrees del quadrilàter DEQR i del triangle $\overset{\Delta}{FPQ}$.

Solució: Siga $\overline{AB} = c$ costat de l'hexàgon regular ABCDEF.

Siga M el punt mig de la diagonal $\overline{FC}$, M és el centre de l'hexàgon.

$\overline{MF} = \overline{MC} = c$. Siga N el punt mig del costat $\overline{DE}$. Siga $h = \overline{PM} = \overline{MN}$.



$\overline{QR}$ és paral·lela mitjana del triangle $\overset{\Delta}{DEP}$. Aleshores, $\overline{QR} = \frac{1}{2}\overline{DE} = \frac{1}{2}c$.

$$\overline{FQ} = \frac{\overline{FC} - \overline{QR}}{2} = \frac{2c - \frac{1}{2}c}{2} = \frac{3}{4}c .$$

L'àrea del trapezi DEQR és:

$$S_{DEQR} = \frac{c + \frac{1}{2}c}{2}h = \frac{3}{4}ch .$$

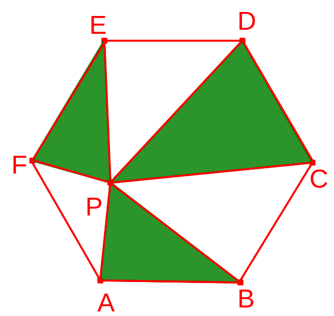
L'àrea del triangle $\overset{\Delta}{FPQ}$ és:

$$S_{FPQ} = \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}c\cdot h = \frac{3}{8}ch .$$

La proporció entre les àrees del quadrilàter DEQR i del triangle $\overset{\Delta}{FPQ}$ és:

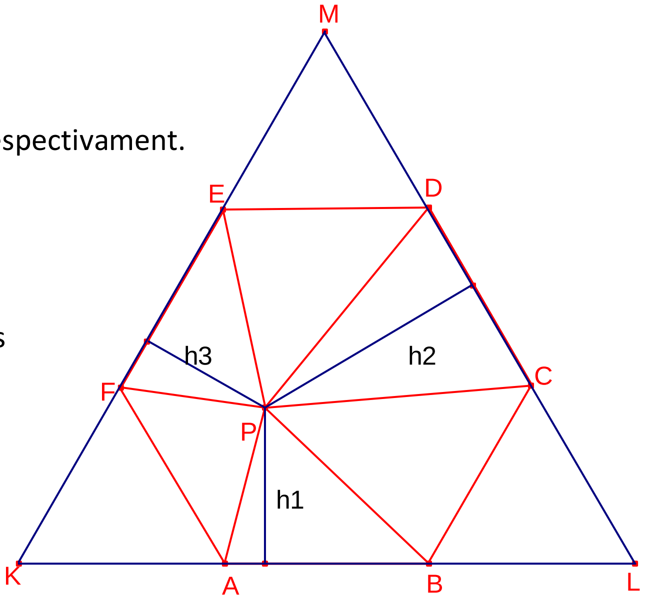
$$\frac{S_{DEQR}}{S_{FPQ}} = \frac{\frac{3}{4}ch}{\frac{3}{8}ch} = 2 .$$

Octubre 3-4: Siga P un punt interior d'un hexàgon regular. Unim el punt P amb els vèrtexs de l'hexàgon regular formant 6 triangles. Pintem els triangles alternativament de verd i blanc. Proveu que la suma de les àrees pintada de verd és igual a la suma de les àrees pintada de blanc.



Solució: Siga ABCDEF l'hexàgon regular de costat $\overline{AB} = c$. L'àrea de l'hexàgon regular ABCDE és:

$$S_{ABCDEF} = 6\left(\frac{\sqrt{3}}{4}c^2\right) = \frac{3\sqrt{3}}{2}c^2 .$$



Siguen h_1, h_2, h_3 les distàncies de O als costats $\overline{AB}, \overline{CD}, \overline{EF}$, respectivament.

La suma de les àrees dels triangles $\overset{\Delta}{ABP}$, $\overset{\Delta}{CDP}$, $\overset{\Delta}{EFP}$ és:

$$S_{verd} = \frac{1}{2}(h_1 + h_2 + h_3)c \qquad (1)$$

Dibuixem les rectes AB, CD, i EF. La intersecció dos a dos de les rectes forma el triangle equilàter $\overset{\Delta}{KLM}$:

$$\overline{KL} = 3c .$$

L'àrea del triangle equilàter $\overset{\Delta}{KLM}$ és igual a la suma dels triangles $\overset{\Delta}{KLP}$, $\overset{\Delta}{LMP}$, $\overset{\Delta}{KMP}$:

$$S_{KLM} = \frac{\sqrt{3}}{4}(3c)^2 = \frac{1}{2}(h_1 + h_2 + h_3)3c .$$

$$\frac{1}{2}(h_1 + h_2 + h_3) = \frac{3\sqrt{3}}{4}c \qquad (2).$$

Substituint l'expressió (2) en l'expressió (1):

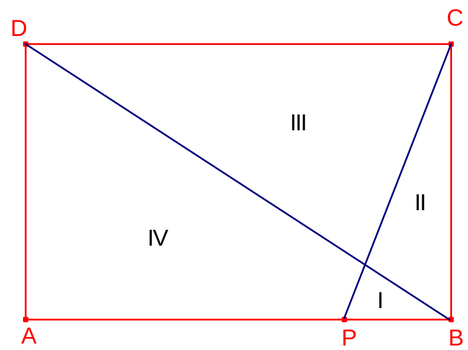
$$S_{verd} = \frac{1}{2}(h_1 + h_2 + h_3)c = \frac{3\sqrt{3}}{4}c^2 .$$

Aleshores,

$$S_{verd} = \frac{1}{2}S_{ABCDEF} .$$

Per tant, la suma de les àrees pintada de verd és igual a la suma de les àrees pintada de blanc.

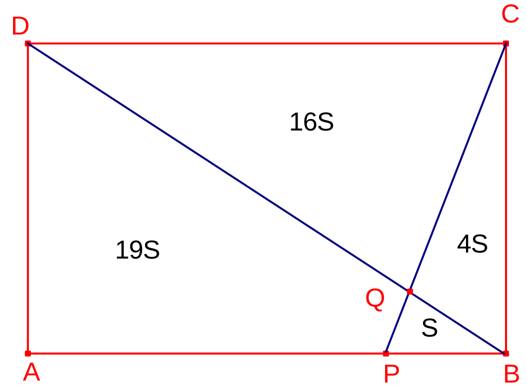
<u>**Octubre 5-6:**</u> Siga el rectangle ABCD d'àrea 120.



Siga P el punt del costat $\overline{AB}$ tal que $\overline{AP} = \frac{3}{4}\overline{AB}$. Els segments $\overline{BD}$, $\overline{CP}$ divideixen el rectangle ABCD en quatre parts. Determineu l'àrea de les quatre parts.

<u>**Solució:**</u> Siga S l'àrea del triangle $\overset{\Delta}{PBQ}$.

$$\overline{BP} = \frac{1}{4}\overline{AB}$$



Siga Q la intersecció del segments $\overline{BD}$, $\overline{CP}$.

Els triangles $\overset{\Delta}{PBQ}$ i $\overset{\Delta}{CDQ}$ són semblants i de raó 1:4.

La proporció de les àrees és:

$$\frac{S_{PBQ}}{S_{CDQ}} = \left(\frac{1}{4}\right)^2 .$$

Aleshores:

$$S_{CDQ} = 16 \cdot S .$$

$$PQ = \frac{1}{4}\overline{CQ}$$

Els triangles $\overset{\Delta}{PBQ}$ i $\overset{\Delta}{CQB}$ tenen la mateixa altura, les àrees són proporcionals a les bases:

$$\frac{S_{PBQ}}{S_{CQB}} = \frac{\overline{PQ}}{\overline{CQ}} = \frac{1}{4}.$$

Aleshores:

$$S_{CQB} = 4 \cdot S.$$

$$S_{BCD} = S_{CDQ} + S_{CQB} = 20S = \frac{1}{2}120 = 60.$$

$$S = 3.$$

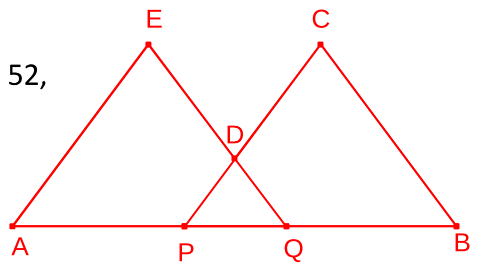
$$S_{CDQ} = 16 \cdot S = 48.$$

$$S_{CQB} = 4 \cdot S = 12.$$

$$S_{APQD} = 19 \cdot S = 57.$$

Octubre 7-8: En la figura, $\overline{AE} = \overline{EQ} = \overline{BC} = \overline{CP} = 10$, $\overline{AQ} = \overline{BP} = 12$.

Els punts A, P, Q i B estan alineats. Si el perímetre del pentàgon ABCDE és 52, calculeu la seua àrea.



Solució: Els triangles, isòsceles $\overset{\Delta}{AEQ}$, $\overset{\Delta}{PCB}$ són iguals.

Els triangles $\overset{\Delta}{AEQ}$, $\overset{\Delta}{PBD}$ són semblants. Siga $\overline{PQ} = x$.

$$\overline{PD} = \frac{\overline{AE}}{\overline{AQ}}x = \frac{5}{6}x.$$

$$\overline{DE} = \overline{DC} = 10 - \frac{5}{6}x.$$

El perímetre del pentàgon ABCDE és 52:

$$64 - \frac{5}{6}x = 52.$$

Resolent l'equació:

$$x = \frac{9}{2}.$$

Aplicant la fórmula d'Heró l'àrea del triangle $\overset{\Delta}{AEQ}$ és:

$$S_{AEQ} = \frac{\sqrt{32 \cdot 8 \cdot 12 \cdot 12}}{4} = 48.$$

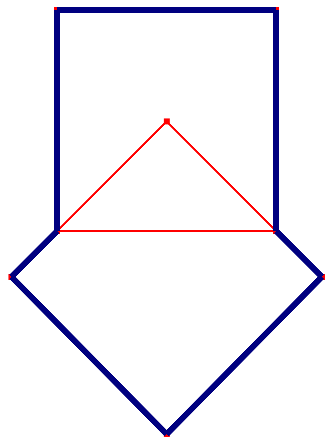
$$\frac{S_{PDQ}}{S_{AEQ}} = \left(\frac{\overline{PQ}}{\overline{AQ}}\right)^2 = \left(\frac{3}{8}\right)^2.$$

$$S_{PDQ} = \frac{9}{64}48 = \frac{27}{4}.$$

L'àrea del pentàgon ABCDE és:

$$S_{ABCDE} = 2 \cdot S_{AEQ} - S_{PDQ} = 2 \cdot 48 - \frac{27}{4} = \frac{357}{4}.$$

Octubre 9-10: En la figura, els quadrats són iguals de costa 10.
El centre del cuadrat superior és un vèrtex del quadrat inferior. Dos vèrtexs del quadrat superior pertanyen al quadrat inferior. Calculeu l'àrea i el perímetre del polígon exterior que formen els dos quadrats.



Solució: Siga ABCDEFG el polígon exterior que formen els quadrats ABCG i ODEF. L'àrea del polígon és igual a l'àrea de dos quadrats de costat 10 menys l'àrea del triangle $\overset{\Delta}{OCG}$ l'àrea del qual és la quarta part del quadrat de costat 10.

$$S_{ABCDEFG} = 2 \cdot 10^2 - \frac{1}{4} \cdot 10^2 = 175 .$$

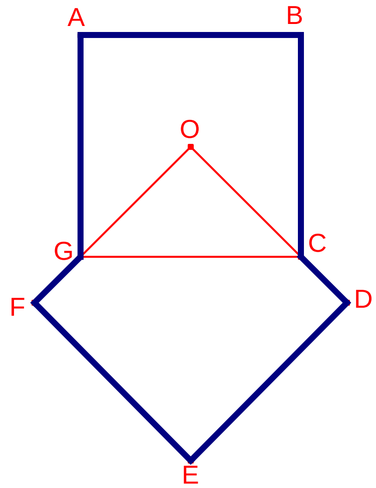
Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle isòsceles $\overset{\Delta}{OCG}$:

$$\overline{OC} = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot 10 = 5\sqrt{2} .$$

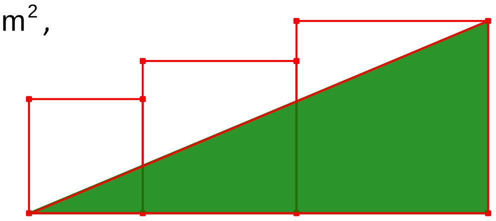
$$\overline{CD} = 10 - \overline{OC} = 10 - 5\sqrt{2} .$$

El perímetre del polígon és:

$$P_{ABCDEFG} = 5 \cdot \overline{AB} + 2 \cdot \overline{CD} = 5 \cdot 10 + 2\left(10 - 5\sqrt{2}\right) = 70 - 10\sqrt{2} .$$



Octubre 11-12: En la figura hi ha dibuixats 3 quadrats d'àrees 9 cm^2, 16 cm^2 i 25 cm^2.Calculeu la proporció entre l'àrea acolorida i la no acolorida.



Solució: El costat del quadrat menut és $\overline{AB} = 3 \text{ cm}$.

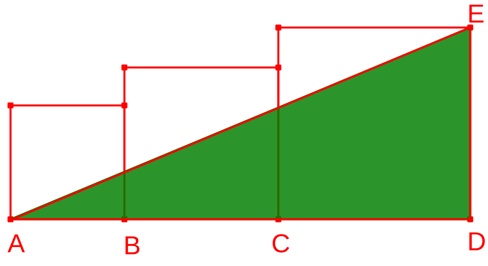
El costat del quadrat mitjà és $\overline{BC} = 4 \text{ cm}$.

El costat del quadrat gran és $\overline{CD} = \overline{DE} = 5 \text{ cm}$.

$$\overline{AD} = 12 \text{ cm} .$$

L'àrea acolorida és:

$$S_{ADE} = \frac{1}{2} 12 \cdot 5 = 30 \text{ cm}^2 .$$



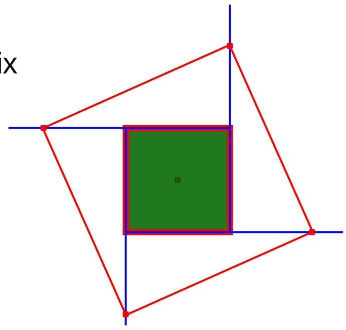
L'àrea no acolorida és igual a la suma de les àrees dels tres triangles menys l'àrea acolorida:

$$S_{blanc} = (9 + 16 + 25) - 30 = 20 \text{ cm}^2 .$$

La proporció entre la zona acolorida i la blanca és:

$$\frac{S_{ADE}}{S_{blanc}} = \frac{30}{20} = \frac{3}{2}.$$

Octubre 13-20: Donat un quadrat de costat a, prolonguem els costats, en el mateix sentit, una magnitud ka.

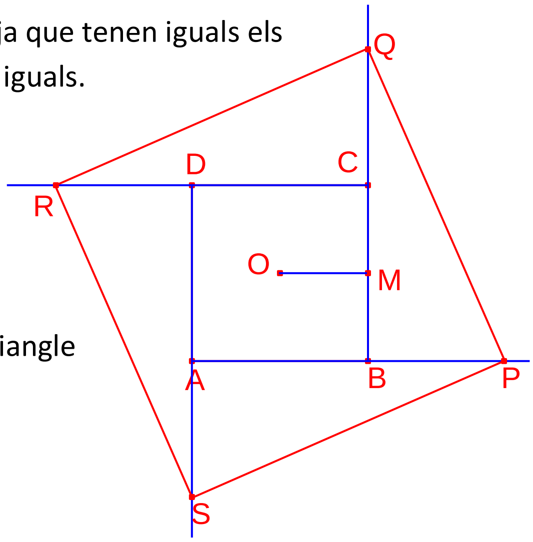


Demostreu que el quadrilàter format és un quadrat.

Demostreu que els dos quadrats tenen el mateix centre.

Determineu el valor de k a fi que la proporció de les àrees siga 3.

Solució: Els triangles rectangles $\overset{\Delta}{ASP}$, $\overset{\Delta}{BPQ}$, $\overset{\Delta}{CQR}$, $\overset{\Delta}{DRS}$ .són iguals ja que tenen iguals els catets corresponents. Aleshores, els costats del quadrilàter PQRS són iguals.



Siga $\alpha = \angle APS = \angle BQP$.

Aleshores,

$$\angle BPQ = 90^o - \alpha .$$

$$\angle SPQ = \angle APS + \angle BPQ = 90^o$$

Anàlogament els angles Q, R, S del quadrilàter PQTS són rectes.

Aleshores, PQRS és un quadrat. Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{BPQ}$, calculem la mesura del quadrat PQRS:

$$\overline{PQ}^2 = (ka)^2 + ((1+k)a)^2 = (2k^2 + 2k + 1)a^2 .$$

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{SPQ}$:

$$\overline{SQ}^2 = 2 \cdot \overline{PQ}^2$$

Siga M el punt mig del costat $\overline{BC}$.

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{MOQ}$:

$$\overline{OQ}^2 = \left(\frac{1}{2}a\right)^2 + \left(\left(\frac{1}{2}+k\right)a\right)^2 = \frac{1}{2}(2k^2 + 2k + 1)a^2 = \frac{1}{2}\overline{PQ}^2 .$$

Aleshores, $\overline{OQ} = \frac{1}{2}\overline{SQ}$, per tant, O és el centre del quadrat PQRS.

Determinem el valor k tal que $S_{PQRS} = 3 \cdot S_{ABCD}$.

$$S_{PQRS} = \overline{PQ}^2 = (2k^2 + 2k + 1)a^2$$

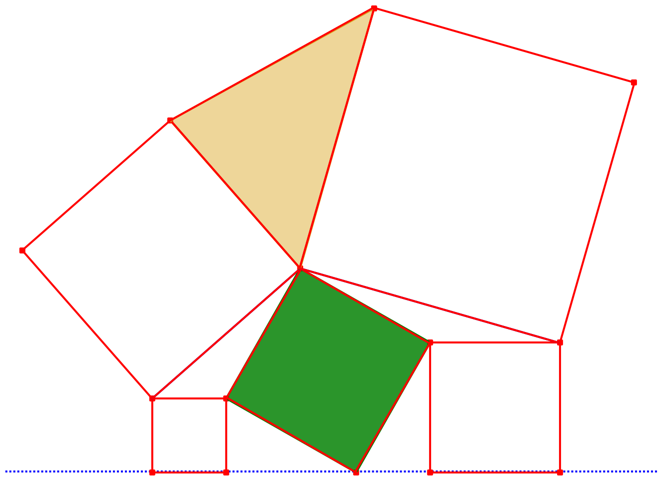
$$(2k^2 + 2k + 1)a^2 = 3a^2 .$$

$$2k^2 + 2k - 2 = 0 .$$

Resolent l'equació:

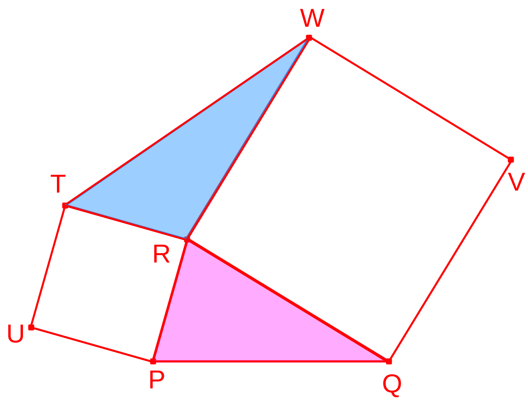
$$k = \frac{-1+\sqrt{5}}{2} = \frac{1}{\Phi}.$$

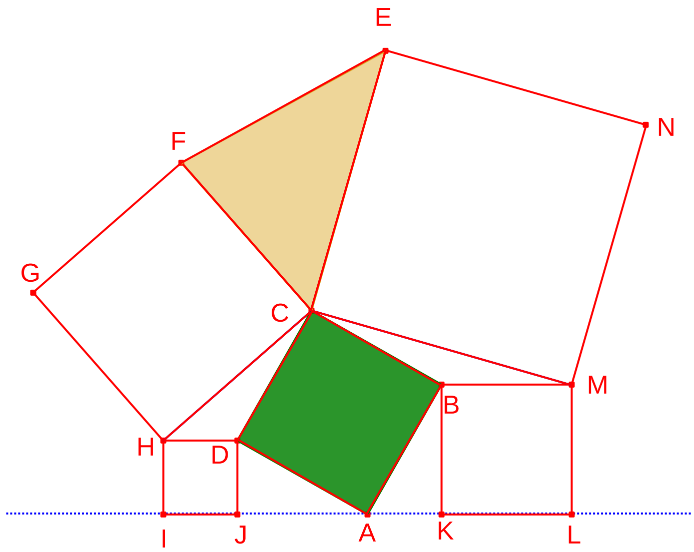
$$\frac{\overline{AP}}{\overline{AB}} = \Phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}.$$



<u>Octubre 14-21</u>:
En la figura, hi ha cinc quadrats. Proveu que les figures ombrejades tenen la mateixa àrea:

<u>Solució:</u> Nota: Siga un triangle qualsevol $\overset{\Delta}{PQR}$ si dibuixem els quadrats PRTU, RQVW exteriors al triangle, aleshores les àrees dels triangles $\overset{\Delta}{PQR}$, $\overset{\Delta}{RTW}$ són iguals.





Els triangles rectangles $\overset{\Delta}{AJD}$, $\overset{\Delta}{BKA}$ són iguals. Siga $\overline{IJ} = \overline{AK} = x$, $\overline{AJ} = \overline{BK} = y$. L'àrea del quadrat IJDH és x^2. L'àrea del quadrat KLMB és y^2. L'àrea del quadrat ABCD és $x^2 + y^2$. L'àrea del triangle $\overset{\Delta}{AJD}$ és

$$S = \frac{1}{2}xy.$$

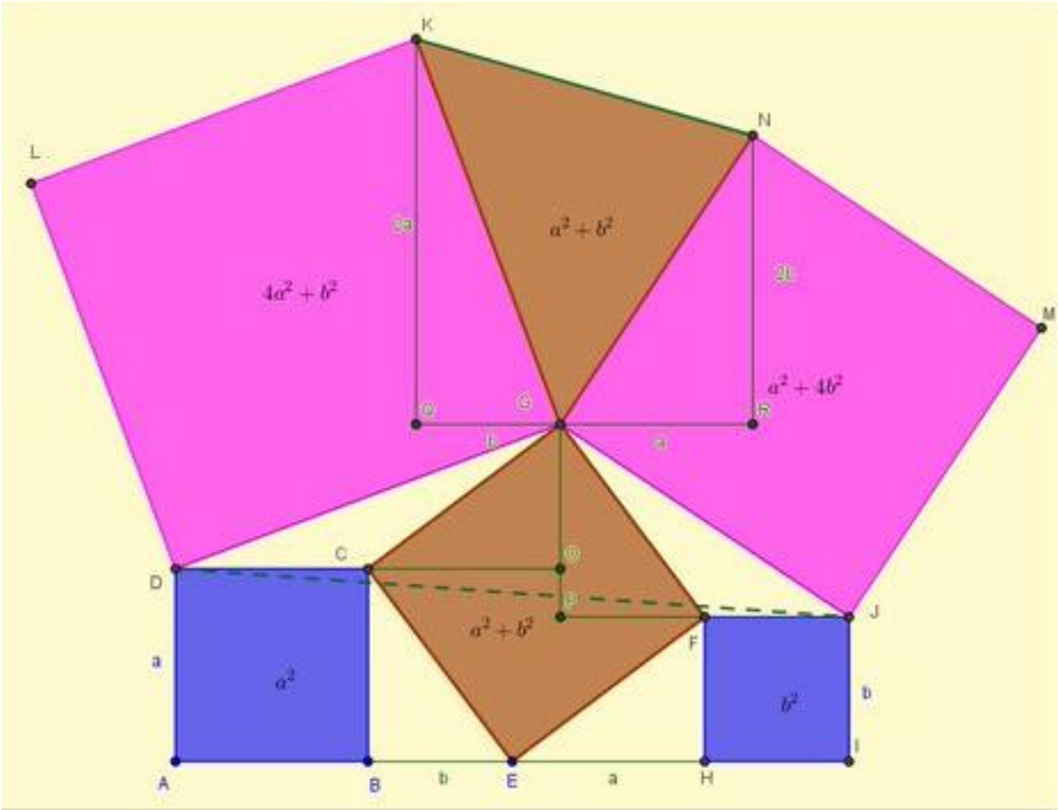
Per la nota les àrees dels triangles $\overset{\Delta}{AJD}$, $\overset{\Delta}{HDC}$ són iguals. Per la nota les àrees dels triangles $\overset{\Delta}{BKA}$, $\overset{\Delta}{BMC}$ són iguals. L'àrea del pentàgon ILMCH és: $S_{ILMCH} = 2(x^2 + y^2) + 2xy$. L'àrea del trapezi ILMH és:

$$S_{ILMH} = (x+y)^2.$$

L'àrea del triangle $\overset{\Delta}{HMC}$ és: $S_{HMC} = S_{ILMCH} - S_{ILMH} = x^2 + y^2 = S_{ABCD}$. Aplicant la nota:

$$S_{CEF} = S_{HMC} = S_{ABCD}.$$

<u>Solució de Ignacio Larrosa Cañestro (@ilarrosac)</u>



$$\Delta KGN = (QRNK) - \Delta QGK - \Delta RGN = \frac{2a+2b}{2}(a+b) - 2ab = a^2+b^2 = (EFGC)$$

Las longitudes $\overline{DG}$ y $\overline{GJ}$ se obtienen aplicando el teorema de Pitágoras ΔDOG y ΔJPG respectivamente, lo que permite calcular las áreas de los cuadrados DGKL y GJMN.

$$\Delta BEC = \Delta EHF = \Delta DCG = \Delta FJG = \frac{ab}{2}$$

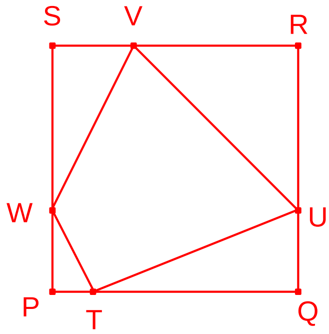
$$\Delta DJG = \Delta KGN = a^2+b^2$$

Además:

$$\overline{DJ} = \sqrt{5(a^2+b^2)+6ab}$$

$$\overline{KN} = \sqrt{5(a^2+b^2)-6ab}$$

que se obtienen aplicando el teorema de Pitágoras a $2(a+b)$ y $|a-b|$, y $(a+b)$ y $2|a-b|$ respectivamente.



Octubre 15-16: En la figura, PQRS és un quadrat. Els punts T, U, V, W pertanyen als costats del quadrat de forma que $\overline{PT}=1$, $\overline{QU}=2$, $\overline{RV}=3$ i $\overline{SW}=4$. Si l'àrea del quadrilàter TUVW és la meitat de l'àrea del quadrat PQRS, determineu la mesura del costat $\overline{PQ}$.

Solució: Siga

$$\overline{PQ}=x\ \overline{TQ}=x-1,\ \overline{UR}=x-2,\ \overline{VS}=x-3,\ \overline{WP}=x-4\,.$$

L'àrea del quadrilàter TUVW és la meitat de l'àrea del quadrat PQRS, aleshores la suma de les àrees dels triangles $\overset{\Delta}{PTW}$, $\overset{\Delta}{TQU}$, $\overset{\Delta}{URV}$ i $\overset{\Delta}{VSW}$ és igual a la meitat de l'àrea del quadrat PQRS:

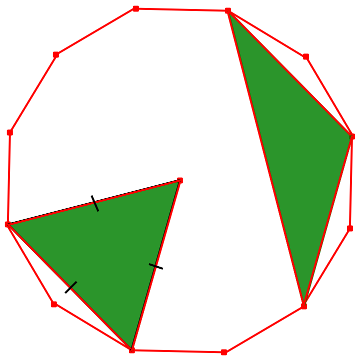
$$\frac{x-4}{2}+\frac{2(x-1)}{2}+\frac{(x-2)3}{2}+\frac{(x-3)4}{2}=\frac{1}{2}x^2\,.$$

Simplificant:

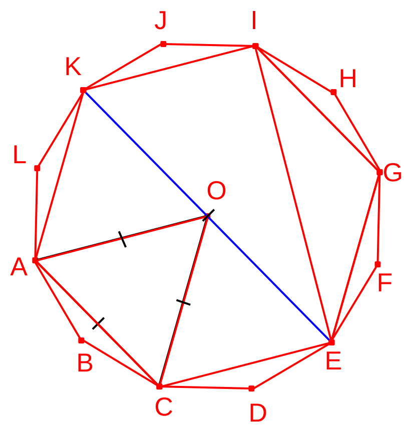
$$x^2-10x+24=0\,.$$

Resolent l'equació $x=6,4$.

La solució $x=4$ no és vàlida ja que $x-4>0$.



Octubre 17-18: En un dodecàgon regular s'han dibuixat dos triangles, un d'ells equilàter. Proveu que els dos triangles tenen la mateixa àrea.

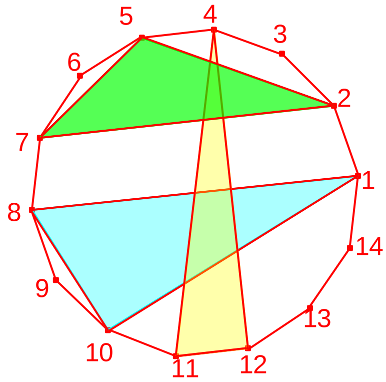


Solució: Siga ABCDEFGHIJKL el dodecàgon regular de centre O. Els vèrtex A, C són els costats de l'hexàgon regular de centre O. Aleshores, el centre O és vèrtex del triangle equilàter. El segment $\overline{EK}$ és paral·lel al segment $\overline{GI}$.

La distància de O al segment $\overline{GI}$ és igual a la distància de O al segment $\overline{AC}$.

$$\overline{GI}=\overline{AC}\,.$$

Els dos triangles tenen igual la base i l'altura, aleshores tenen la mateixa àrea.



Octubre 19: Quant triangle rectangles es poden formar unint els vèrtexs d'un polígon regular de 14 costats?

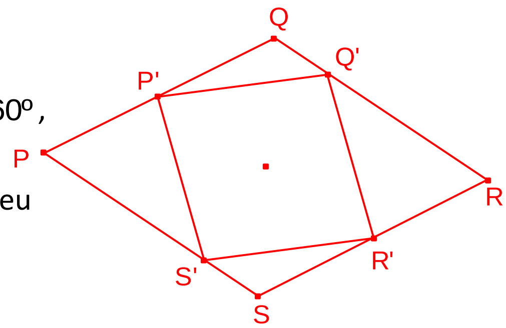
Solució: Per construir un triangle rectangle la hipotenusa ha de ser un diàmetre de la circumferència circumscrita al polígon regular. Un polígon regular de 14 costats té 7 diàmetres, unint vèrtexs.
Per formar un triangle, caldrà un diàmetre i qualsevol dels 12 vèrtexs que resten. Aleshores el nombre de triangle rectangles és:

$$7\cdot 12 = 84\,.$$

Generalització:
Quant triangle rectangles es poden formar unint els vèrtexs d'un polígon regular de 2n costats?

Solució:

$$\frac{n}{2}(n-2)\,.$$



Octubre 22-23: El rombe PQRS de costat 1 i $\angle SPQ = \angle SRQ = 60^o$, $\angle PQR = \angle PSR = 120^o$, té inscrit un rombe P'Q'R'S'. Saben que l'àrea del rombe inscrit és igual a la meitat de l'àrea del rombe PQRS, calculeu la mesura del costat del rombe P'Q'R'S'.

Solució: $\overset{\Delta}{PQS}$ és un triangle equilàter.

$$S_{PQRS} = 2\cdot S_{PQS} = 2\frac{\sqrt{3}}{4}1^2 = \frac{\sqrt{3}}{2}\,.$$

Siga

$$\overline{QQ'} = x\,,\ \overline{QP'} = y\,,\ \overline{PP'} = 1-y\,,\ \overline{PS'} = \overline{RQ'} = 1-x$$

L'àrea del rombe P'Q'R'S' és igual a la meitat de l'àrea del rombe PQRS. Aleshores:

$$S_{P'Q'R'S'} = 2\cdot S_{P'QQ'} + 2\cdot S_{PP'S'} = \frac{1}{2}\frac{\sqrt{3}}{2}\,.$$

$$2\frac{1}{2}xy\cdot\sin 120^o + 2\frac{1}{2}(1-x)(1-y)\sin 60^o = \frac{\sqrt{3}}{4}\,.$$

$$xy\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} + (1-x)(1-y)\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{4}\,.$$

Simplificant:

$$2xy + 1 - (x + y) = \frac{1}{2} \qquad (1)$$

Aplicant el teorema del cosinus al triangle $P'\overset{\Delta}{Q'}Q$:

$$\overline{P'Q'}^2 = x^2 + y^2 - 2xy \cdot \cos 120^{\circ}.$$

Simplificant:

$$\overline{P'Q'}^2 = x^2 + y^2 + xy\ .$$

Aplicant el teorema del cosinus al triangle $P\overset{\Delta}{P'}S'$:

$$\overline{P'S'}^2 = (1-x)^2 + (1-y)^2 - 2(1-x)(1-y)\cdot \cos 60^{\circ}.$$

Simplificant:

$$\overline{P'S'}^2 = 1 - (x+y) + x^2 + y^2 - xy\ .$$

P’Q’R’S’ és un rombe, aleshores, $\overline{P'Q'} = \overline{P'S'}$:

$$x^2 + y^2 + xy = 1 - (x+y) + x^2 + y^2 - xy\ .$$

Simplificant:

$$2xy = 1 - (x+y) \qquad (2)$$

Considerem el sistema format per les expressions (1) (2):

$$\begin{cases} 2xy = -\dfrac{1}{2} + (x+y) \\ 2xy = 1 - (x+y) \end{cases}.$$

Sumant i restant ambdues expressions: $\begin{cases} xy = \dfrac{1}{8} \\ x + y = \dfrac{3}{4} \end{cases}.$

Les solucions del sistema són les solucions de l’equació $z^2 - \frac{1}{8}z + \frac{3}{4} = 0$.

Resolent l’equació:

$$z = \frac{1}{2}, \frac{1}{4}.$$

Aleshores, $\begin{cases} x = \dfrac{1}{4} \\ y = \dfrac{1}{2} \end{cases}$, o bé $\begin{cases} x = \dfrac{1}{2} \\ y = \dfrac{1}{4} \end{cases}.$

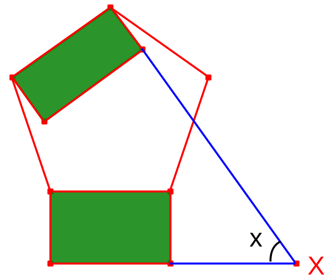
Suposem que $\begin{cases} x = \dfrac{1}{4} \\ y = \dfrac{1}{2} \end{cases}.$

Aplicant el teorema del cosinus al triangle $P'\overset{\Delta}{Q}Q$:

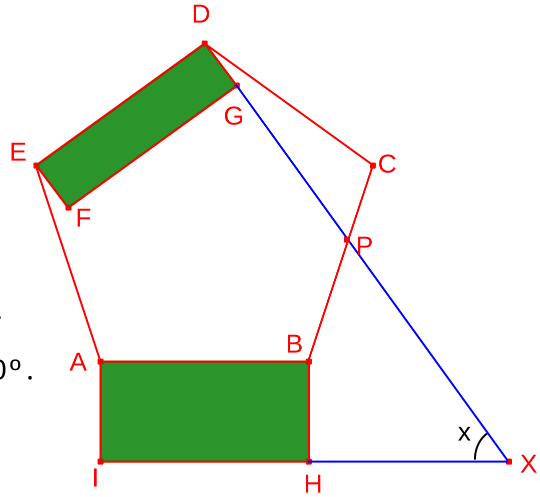
$$\overline{P'Q'}^2 = \left(\frac{1}{4}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 - 2\frac{1}{4}\frac{1}{2}\cos 120^{\circ} = \frac{7}{16}.$$

$$\overline{P'Q'} = \frac{\sqrt{7}}{4}.$$

L’altra solució dóna el mateix resultat.



Octubre 24-25:
En la figura sobre dos costats d'un pentàgon regular s'han dibuixat dos rectangles. Un costat de cada rectangle s'estenen fins intersecar en el punt X. Determineu la mesura de l'angle x.



Solució: Siga ABCDE el pentàgon regular.

$$A = B = C = D = E = 108^o.$$

Siguen DEFG i ABHI els rectangles. Siga X la intersecció de les rectes DG i IH. Siga P la intersecció de la recta DG i el costat $\overline{BC}$ del rectangle.

La suma dels angles interior d'un pentàgon convex és $180^o(5-2) = 540^o$.

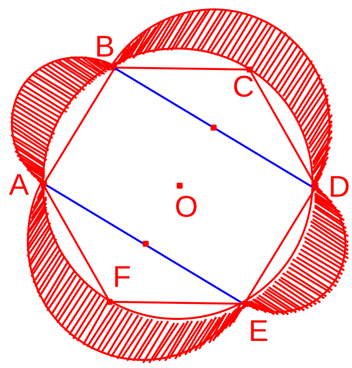
Considerem el pentàgon convex ABPDE:

$$\angle BPD = 540^o - (3 \cdot 108^o + 90^o) = 126^o.$$

$$\angle BPX = 180^o - \angle BPD = 180^o - 126^o = 54^o.$$

$$\angle PBH = 360^o - (\angle ABH + \angle ABP) = 360^o - (90^o + 108^o) = 162^o.$$

$$x = 360^o - (\angle BHX + \angle PBH + \angle BPX) = 360^o - (90^o + 162^o + 54^o) = 54^o.$$



Octubre 26-27: Siga un hexàgon regular ABCDEF, inscrit en una circumferència de centre O i radi R. Sobre $\overline{AB}$, $\overline{BD}$, $\overline{DE}$ i $\overline{EA}$ es construeixen, cap a fora semicircumferències. _Calculeu proporció entre l'àrea limitada per les semicircumferències i la circumferència circumscrita a l'hexàgon i l'àrea de l'hexàgon.

Solució: L'àrea de l'hexàgon regular ABCDEF és igual a l'àrea de 6 triangles equilàters de costat R.

$$S_{ABCDEF} = 6\left(\frac{\sqrt{3}}{4}R^2\right) = \frac{3\sqrt{3}}{2}R^2.$$

L'àrea d'una de les lúnules menudes és igual a l'àrea del semicercle de radi $\frac{R}{2}$ menys l'àrea d'un sector circular de 60º de radi R, més l'àrea d'un triangle equilàter de costat R:

$$S_{L1}=\frac{1}{2}\pi\left(\frac{R}{2}\right)^2-\frac{1}{6}\pi R^2+\frac{\sqrt{3}}{4}R^2=\left(-\frac{1}{24}\pi+\frac{\sqrt{3}}{4}\right)R^2.$$

$$\overline{AE}=\sqrt{3}R.$$

Notem que $S_{AEF}=S_{AFO}$. L'àrea d'una de les lúnules grans és igual a l'àrea del semicercle de radi $\frac{\sqrt{3}}{2}R$ menys l'àrea d'un sector circular de 120º de radi R, més l'àrea d'un triangle equilàter de costat R:

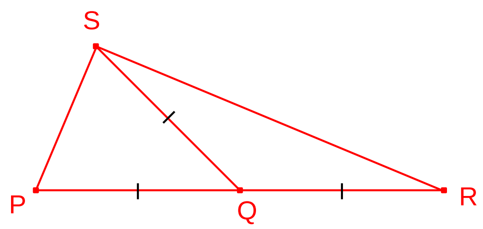
$$S_{L2}=\frac{1}{2}\pi\left(\frac{\sqrt{3}}{2}R\right)^2-\frac{1}{3}\pi R^2+\frac{\sqrt{3}}{4}R^2=\left(\frac{1}{24}\pi+\frac{\sqrt{3}}{4}\right)R^2.$$

L'àrea ombrejada és:

$$S_{ombrejada}=2(S_{L1}+S_{L2})=\sqrt{3}R^2$$

La proporció entre l'àrea limitada per les semicircumferències i la circumferència circumscrita a l'hexàgon i l'àrea de l'hexàgon és:

$$\frac{S_{ombrejada}}{S_{ABCDEF}}=\frac{\sqrt{3}R^2}{\frac{3\sqrt{3}}{2}R^2}=\frac{2}{3}.$$



__Octubre 28-29:__ En la figura, $\overline{PQ}=\overline{QR}=\overline{QS}$ i $\angle SPQ=3\angle QSR$. Determineu la mesura de l'angle $\angle QRS$.

__Solució 1:__

$$\alpha=\angle QSR.$$

$$\angle SPQ=3\alpha.$$

El triangle $\overset{\Delta}{QRS}$ és isòsceles, aleshores:

$$\angle QRS=\angle QSR=\alpha.$$

$$\angle PQS=\angle QSR+\angle QRS=2\alpha.$$

El triangle $\overset{\Delta}{QRS}$ és isòsceles, aleshores:

$$\angle PSQ=\angle SPQ=3\alpha.$$

La suma dels angles del triangle $\overset{\Delta}{PQS}$ és 180º:

$$3\alpha+3\alpha+2\alpha=180^o.$$

Aleshores,

$$\alpha=\frac{45^o}{2},\ \angle QRS=\alpha=\frac{45^o}{2}=22^o30'.$$

__Solució 2:__

$$\alpha = \angle QSR.$$

$$\angle SPQ = 3\alpha.$$

En un triangle si la mitjana és igual a la meitat del costat sobre la que està traçada el triangle és rectangle.

$\overline{QS}$ és mitjana del triangle $\overset{\Delta}{PRS}$ i $\overline{PQ} = \overline{QR} = \overline{QS}$. Aleshores, $\angle PSR = 90^o$. El triangle $\overset{\Delta}{QRS}$ és isòsceles, aleshores:

$$\angle QRS = \angle QSR = \alpha.$$

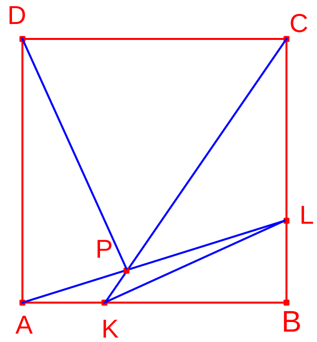
$$\angle PRS + \angle SRP = 90^o.$$

$$\alpha + 3\alpha = 90^o.$$

Resolent l'equació:

$$\angle QRS = \alpha = \frac{90^o}{4} = 22^o30'.$$

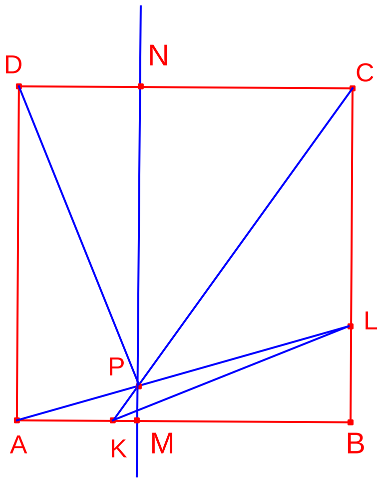
<u>Octubre 30-31:</u> En un quadrat ABCD es marquen els punts K i L sobre els costats $\overline{AB}$ i $\overline{BC}$ de mode que $\overline{KB} = \overline{LC}$. Siga P el punt intersecció dels segments $\overline{AL}$ i $\overline{CK}$. Demostreu que els segments $\overline{DP}$ i $\overline{KL}$ són perpendiculars.



<u>Solució:</u> Siga $\overline{AB} = c$ costat del quadrat. Siga $x = \overline{KB} = \overline{LC}$.

$$\overline{AK} = \overline{BL} = c - x.$$

Siga la recta que passa per P i perpendicular al costat $\overline{AB}$ que talla els costats $\overline{AB}$ i $\overline{CD}$ en els punts M, N, respectivament. Siga $h = \overline{PN}$, $y = \overline{DN}$.



Els triangles rectangles $\overset{\Delta}{CNP}$, $\overset{\Delta}{KBC}$ són semblants. Aplicant el teorema de Tales:

$$\frac{h}{c-y} = \frac{c}{x}.$$

$$xh = c^2 - cy \quad (1)$$

Els triangles rectangles $\overset{\Delta}{AMP}$, $\overset{\Delta}{ABL}$ són semblants. Aplicant el teorema de Tales:

$$\frac{c-h}{y} = \frac{c-x}{c}.$$

$$c^2 - ch = cy - xy \qquad (2)$$

Sumant les expressions (1) (2):

$$(c-x)h = xy \qquad (3)$$

Els segments $\overline{DP}$ i $\overline{KL}$ són perpendiculars si els triangles $\overset{\Delta}{PND}$, $\overset{\Delta}{KLB}$ són semblants.

De la expressió (3):

$$\frac{c-x}{x}=\frac{y}{h} \qquad (4)$$

Aleshores, els triangles $\overset{\Delta}{PND}$, $\overset{\Delta}{KLB}$ són semblants.