SOLUCIONS NOVEMBRE 2019

PROBLEMES PER A BATXILLERAT. PROBLEMES DE LA CMO (Canadian Mathematical Olympiad) (https://cms.math.ca/Competitions/CMO/) Selecció: Rafael Martínez Calafat. Professor jubilat.

Novembre 1: Factoritzar en els reals:

$$\mathbf{x^4 - 11x^2 + 49}$$

Solució: Recordem que tot polinomi amb coeficients reals es factoritza com el producte de polinomis amb coeficients reals de grau zero, de grau un o grau dos amb discriminant negatiu. Com el polinomi és biquadrat és fàcil tractar de obtindré les seues arrels. Tindrem

$$x^4 - 11x^2 + 49 = 0 \quad \Rightarrow \quad x^2 = \frac{11 \pm \sqrt{121 - 196}}{2} = \frac{1}{2} \pm \frac{5}{2} i\sqrt{3} \notin \mathbb{R}$$

Com no hi ha arrels reals no hi ha polinomis de grau un. Com el terme principal del polinomi és 1 tampoc hi ha polinomis de grau 0. Per tant, en la descomposició factorial del polinomi només poden aparéixer dos polinomis de grau dos amb discriminant negatiu. Tindrem:

$$\begin{aligned} x^4 - 11x^2 + 49 &= (x^2 + Ax + B) \cdot (x^2 + Cx + D) \\ &= x^4 + (C + A)x^3 + (D + AC + B)x^2 + (AD + BC)x + BD \end{aligned}$$

Igualant coeficients:

$$\left.\begin{array}{c} C + A = 0 \\ D + AC + B = -11 \\ AD + BC = 0 \\ BD = 49 \end{array}\right\}$$

De la primera equació tenim C = - A i substituint en les altres tres equacions:

$$\left.\begin{array}{c} D - C^2 + B = -11 \\ -CD + BC = C(B - D) = 0 \\ BD = 49 \end{array}\right\} \ (*)$$

De la segona equació tenim C = 0 o B = D. Si C = 0, el sistema (*) queda:

$$\left.\begin{array}{c} D + B = -11 \\ BD = 49 \end{array}\right\}$$

De la primera D = - (11 + B), que substituint en la segona porta a $B^2 + 11B + 49 = 0$, que no té solucions reals. Per tant $C \neq 0$ necessàriament B = D. Amb el que, el sistema (*) es transforma en:

$$\left.\begin{array}{c} 2B - C^2 = -11 \\ B^2 = 49 \end{array}\right\}$$

De la segona equació tenim: B = D = $\pm$ 7. substituint en la primera arribem a:

$C^2 = 25$ (i amb el que C = $\pm$ 5 y - A = $\pm$ 5) o $C^2 = -3$ (que es impossible). Per tant:

$$x^4 - 11x^2 + 49 = (x^2 - 5x + 7) \cdot (x^2 + 5x + 7)$$

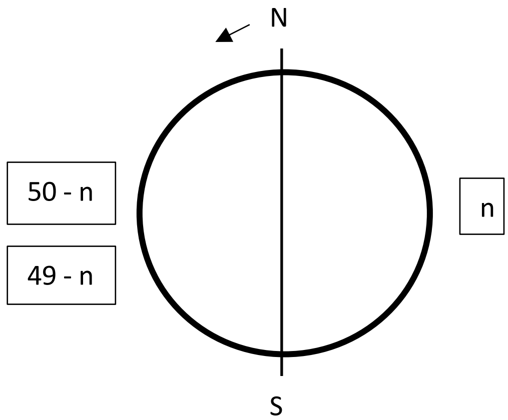
Solució de Natalia Beltrán Pérez (1 Batx-D, IES "José de Ribera" Xàtiva. València)

Com $(x^2 + 7)^2 = x^4 + 14\,x^2 + 49$, tenim:

$$x^4 - 11x^2 + 49 = x^4 + 14x^2 + 49 - 14x^2 - 11x^2 = (x^2 + 7)^2 - 25x^2 = (x^2 + 7 + 5x)(x^2 + 7 - 5x)$$

Novembre 2-3: Donada una circumferència triem aleatòriament 50 punts en el seu interior de manera que dos o més qualssevol d'ells no estan en el mateix diàmetre de la circumferència. Demostrar que sempre hi ha un diàmetre que deixa 25 punts en cada costat.

Solució: Cap dels 50 punts pot ser el centre de la circumferència, perquè si suposem que el centre és triat llavors qualsevol diàmetre que continga a qualsevol altre punt conté dos punts contradient l'enunciat..



Suposem triats els 50 punts i dibuixem un diàmetre, per exemple, el de la figura (que designarem per N-S). Només un dels 50 punts pot estar en aquest diàmetre. Si no ocorre això i hi ha 25 punts en cada part ja tenim demostrat el problema. Suposem que hi ha n punts en la part dreta ($n \in \{0, 1, 2, 3, \cdots, 24\}$) i $50 - n$ o $49 - n$ en l'esquerra (idèntic raonament es podrà continuar suposant n punts a l'esquerra i $50 - n$ o $49 - n$ a la dreta). Comencem a girar el diàmetre en el sentit contrari a les agulles del rellotge. La variació de punts a la dreta és d'un en un (per la condició que no hi ha dues o més punts en un diàmetre).

En girar el diàmetre 180° tindrem que el diàmetre S-N deixa a la seua dreta $50 - n$ o $49 - n$ punts i a la seua esquerra n punts. Per tant, en algun moment, algun diàmetre deixa a la seua dreta 25 punts i a la seua esquerra els altres 25. Amb això tenim demostrat l'enunciat.

Novembre 4: Siga s(n) la suma dels dígits de n. Trobeu:

$$\sum_{k=1}^{2019} s(n) = s(1) + \cdots + s(2019)$$

Solució: Podem prescindir dels zeros que apareixen en els números, ja que aquestos no alteren la suma.

Dividim la suma sol·licitada en tres sumands:

$$A = s(1) + s(2) + s(3) + \cdots\cdots + s(999)$$

$$B = s(1000) + s(1001) + s(1002) + \cdots + s(1999)$$

$$C = s(2000) + s(2001) + s(2002) + \cdots + s(2019)$$

Pel sumando A, cada dígit des de l'u al nou apareix 100 vegades en la posició de les unitats, altres 100 vegades en a posició de les desenes i altres 100 vegades en la posició de les centenes. Per tant:

$$A = 300\cdot1 + 300\cdot2 + 300\cdot3 + \cdots + 300\cdot9 = 300\cdot(1 + 2 + 3 + \cdots + 9) = 300\cdot45 = 13500$$

Pel sumando B tenim que el dígit 1 apareix 1000 vegades en les unitats de miler, i de nou, cada dígit des de l'u al 9 apareix 100 vegades en les unitats, altres 100 vegades en les desenes i altres 100 vegades en les centenes. Per tant:

$$B = 1000\cdot1 + 300\cdot1 + 300\cdot2 + 300\cdot3 + \cdots + 300\cdot9 = 1000 + 300\cdot(1 + 2 + 3 + \cdots + 9) = 1000 + 300\cdot45 = 14500$$

Pel sumando C tenim que el dígit 2 apareix 20 vegades en les unitats de miler, el dígit 1 apareix 10 vegades en les desenes i 2 en les unitats i després des del 2 fins al 9 apareixen 2 vegades en les unitats i cap a les desenes i centenes. Per tant:

C = 2·20 + 1·12 + 2·2 + 2·3 + ···· + 2·9 = 40 + 12 + 2·(2 +3 + ··· + 9) = 140

En definitiva:

$$\sum_{k=1}^{2019} s(k) = 13500 + 14500 + 140 = 28140$$

Solució Ignacio Larrosa Cañestro: Tindrem:

$$\sum_{k=0}^{9} s(k) = 45; \qquad \sum_{k=1}^{2019} s(k) = M + C + D + U$$

Com

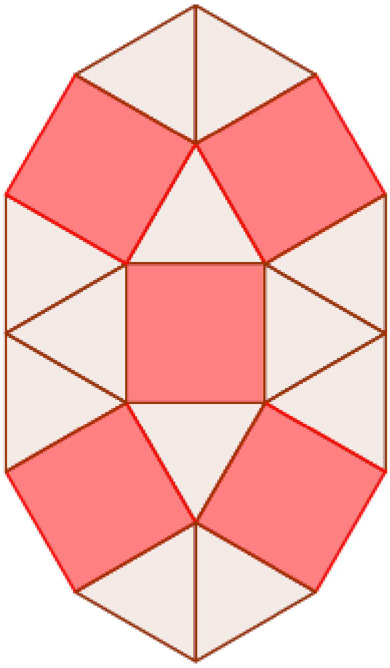
U = 45·(200 + 2) = 9090; D = 45·(20·10) + 10 = 9010; C = 45·2·100 = 9000; M = 1·1000 + 2·20 = 1040

Tindrem:

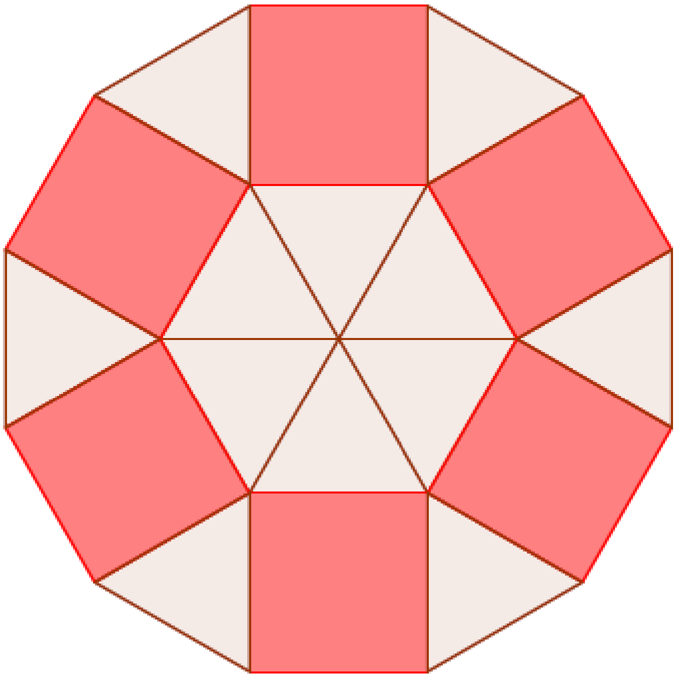
$$\sum_{k=1}^{2019} s(k) = M + C + D + U = 28140$$

Novembre 5-6: Suposem que disposem de 12 triangles equilàters i 6 quadrats. Amb ells formem polígons convexos. Quin és el major nombre de costats dels polígons convexos que podem formar sense tenir solapaments?

Solució:



5 quadrats
12 triangles
10 costats



6 quadrats
12 triangles
12 costats

<u>Novembre 7:</u> Calculeu:

$$\mathbf{x} = \sqrt{\mathbf{3} - \sqrt{\mathbf{3} + \sqrt{\mathbf{3} - \sqrt{\mathbf{3} + \cdots\cdots}}}}$$

<u>Solució</u>: Tindrem

$$x = \sqrt{3 - \sqrt{3 + x}}, \qquad x^2 = 3 - \sqrt{3 + x}\,, \;\; x^2 - 3 = -\sqrt{3 + x}\,,$$

$$(x^2 - 3)^2 = \left(-\sqrt{3 + x}\right)^2, x^4 - 6x^2 + 9 = 3 + x, \qquad x^4 - 6x^2 - x + 6 = 0$$

	1	0	-6	-1	6
1		1	1	-5	-6
	1	1	-5	-6	0
-2		-2	2	6	
	1	-1	-3	0	

Per tant:

$$x^4 - 6x^2 - x + 6 = 0 = (x - 1)(x + 2)(x^2 - x - 3)$$

I, d'ací:

$$x = 1; \;\; x = -2; \;\; x^2 - x - 3 = 0 \;\; \Rightarrow \;\; x = \frac{1 \pm \sqrt{13}}{2}$$

Vegam quins dels valors trobats són solució de l'equació proposada. Com

$$\text{sg}\,(x) = \text{sg}\left(\sqrt{3 - \sqrt{3 + \sqrt{3 - \sqrt{3 + \cdots\cdots}}}}\right) = +$$

tindrem de els valors negatius x = - 2 i x = $\frac{1-\sqrt{13}}{2}$ no són solucions de l'equació. No obstant això, x = 1 si ho és, doncs:

$$1 = \sqrt{3 - \sqrt{3 + 1}} = \sqrt{3 - 2} = \sqrt{1}$$

Per a x = $\frac{1+\sqrt{13}}{2}$ tenim que no és solució, doncs, si ho fora, també seria solució de:

$$x^2 - 3 = -\sqrt{3 + x}$$

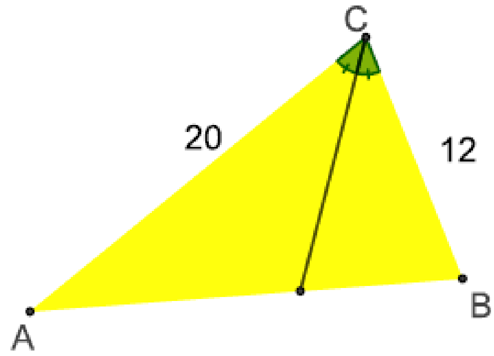
Però aquest valor no és solució d'aquesta última equació, doncs:

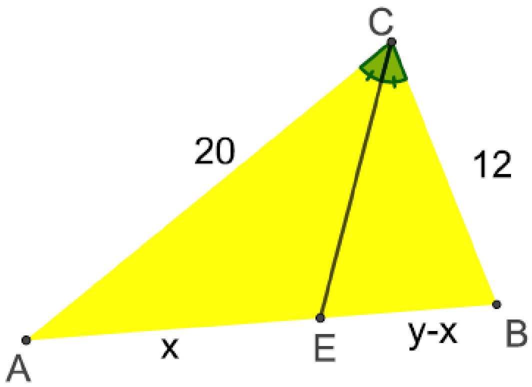
$$\text{primer membre} = \left(\frac{1 + \sqrt{13}}{2}\right)^2 - 3 = \frac{1 + \sqrt{13}}{2} > 0$$

$$\text{segon membre} = -\sqrt{3 + \frac{1 + \sqrt{13}}{2}} < 0$$

Novembre 8-9:

D'un triangle ΔABC se sap que BC = 12 cm i CA = 20 cm. A més, la bisectriu de l'angle C determina un segment de longitud 15 en el costat AB. Calcular la longitud del costat AB.





Solució 1: Siga AB = y. Pel toerema de la bisectriu

$$\frac{20}{x} = \frac{12}{y-x}$$

Si el segment de longitud 15 és el y – x, aleshores:

$$x = \frac{20 \cdot 15}{12} = 25$$

I com y – x =15 = y – 25 ⇒ y = 40. Però els segments 40, 20 i 12 no formen triàngle (per no complir la desigualtad triangular: 40 > 20 + 12 = 32)

Per tant necessàriament el segment de longitud 15 és el segment adjunt a AC. En aquest cas:

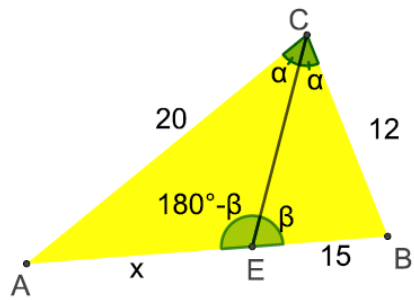
$$\frac{20}{15} = \frac{12}{y-x} \;\Rightarrow\; \frac{20}{15} = \frac{12}{y-15} \;\Rightarrow\; y = 24$$

Solució 2: Suposem en primer lloc que el segment de longitud 15 és EB. Aplicant el teorema dels sinus en ΔCEB i en ΔACE

$$\frac{15}{\text{sen}\ \alpha} = \frac{12}{\text{sen}\beta} = \frac{12}{\text{sen}(180-\beta)} = \frac{12}{20}\frac{20}{\text{sen}(180-\beta)} = \frac{12}{20}\frac{\text{x}}{\text{sen}\alpha}$$

$$\Rightarrow 15 \cdot 20 = 12 \cdot x \;\Rightarrow\; x = \frac{15 \cdot 20}{12} = 25$$

$$\Rightarrow \text{AB} = 15 + 25 = 40$$

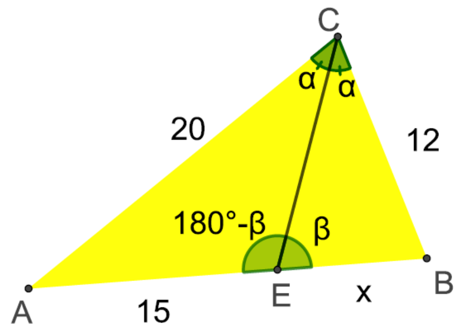


Però els segments 40, 20 i 12 no formen triangle (per no complir-se la desigualtat triangular). Així que sols pot mesurar 15 el segment adjacent al vèrtex A. En aquest cas tindrem, al reiterar el teorema dels sinus a ΔCEB i a ΔACE

$$\frac{\text{x}}{\text{sen}\ \alpha} = \frac{12}{\text{sen}\beta} = \frac{12}{\text{sen}(180-\beta)} = \frac{12}{20}\frac{20}{\text{sen}(180-\beta)} = \frac{12}{20}\frac{15}{\text{sen}\alpha}$$

$$\Rightarrow \text{x} \cdot 20 = 12 \cdot 15 \;\Rightarrow\; \text{x} = \frac{15 \cdot 12}{20} = 9 \;\Rightarrow \text{AB}$$

$$= 15 + 9 = 24$$



Novembre 10: Trobeu els enters que compleixen:

$$n(n^3-5n^2-11) \geq -3(3n^2+2)$$

Solució: La inequació proposada és equivalent a:

$$n^4 - 5n^3 - 11n \geq -9n^2 - 6 \iff n^4 - 5n^3 + 9n^2 - 11n + 6 \geq 0$$

Factoritzem el polinomi:

	1	-5	9	-11	6
1		1	-4	5	-6
	1	-4	5	-6	0
3		3	-3	6	
	1	-1	2	0	

la inequació proposada és equivalent a:

$$(n-1)(n-3)(n^2-n+2) \geq 0$$

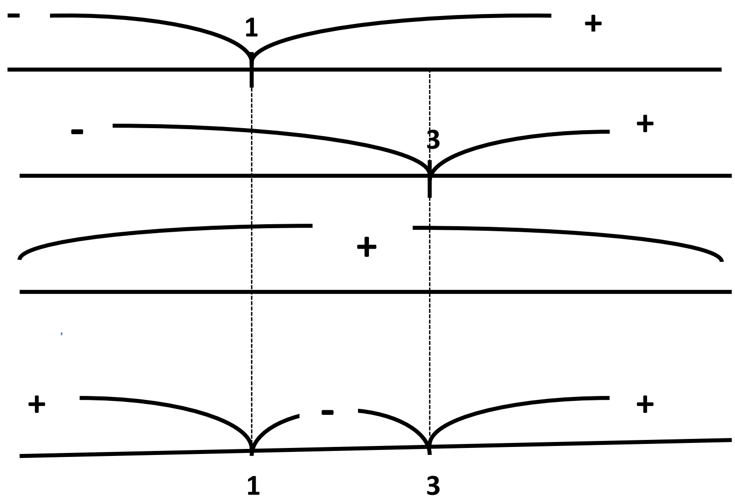
I, per a aquesta última tenim:

Factor n – 1: n – 1 = 0 $\Rightarrow$ n=1

Factor n – 3: n – 3 = 0 $\Rightarrow$ n=3

factor $n^2 - n + 2$: $n^2 - n + 2 = 0 \Rightarrow n \notin R$

$(n-1)(n-3)(n^2-n+2)$



Per tant els enters que verifiquen la inequació són tots els enters excepte el 2

<u>Novembre 11-12:</u> Siga ΔABC un triangle equilàter i P un punt arbitrari del seu interior. Les perpendiculars PD, PE i PF es dibuixen als tres costats del triangle. Proveu que:

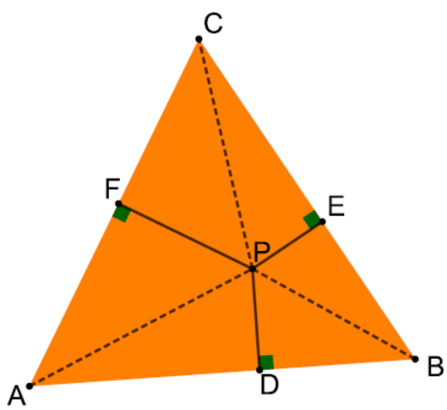
$$\mathbf{\frac{PD+PE+PF}{AB+BC+CA} = \frac{1}{2\sqrt{3}}}$$

<u>Solució:</u> Al tractar-se d'un triangle equilàter, la seua altura és

$$\frac{a\sqrt{3}}{2}$$

sent a el costat del triangle. Atès que, el punt P divideix el triangle en tres triangles d'altures PD, PE i PF, tenim:

$$\text{Àrea} = \frac{a\frac{a\sqrt{3}}{2}}{2} = \frac{a \cdot PD}{2} + \frac{a \cdot PE}{2} + \frac{a \cdot PF}{2}$$



D'ací

$$PE + PD + PF = \frac{a\sqrt{3}}{2}$$

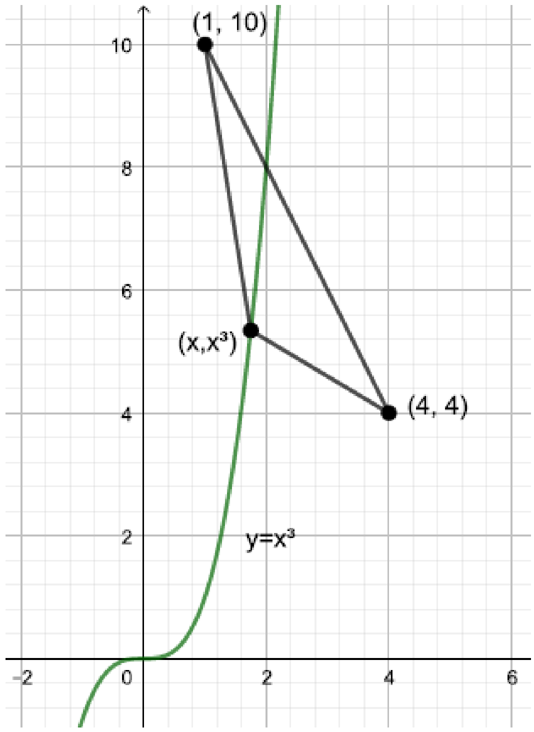
(Teorema de Viviani). Per tant

$$\frac{PD + PE + PF}{AB + AC + BC} = \frac{\frac{a\sqrt{3}}{2}}{3a} = \frac{\sqrt{3}}{6} = \frac{1}{2\sqrt{3}}$$

<u>Novembre 13:</u> Trobeu el valor de x que fa mínima l'expressió:

$$\sqrt{(x-1)^2 + (x^3-10)^2} + \sqrt{(x-4)^2 + (x^3-4)^2}$$

<u>Solució:</u> La primera arrel és la distància entre els punts (1, 10) i (x, x^3). La segona arrel és la distància entre els punts (4, 4) i (x, x^3). La suma serà mínima quan el punt (x, x^3) sigui la intersecció de la corba $y = x^3$ i la recta que passa pels punts (1, 10) i (4,4): $y = -2 \cdot x + 12$, és a dir, quan x sigui la solució de sistema:



$$\left.\begin{array}{r} y = x^3 \\ y = -2x + 12 \end{array}\right\} \Rightarrow x^3 + 2x - 12 = 0$$

	1	0	2	-12
2		2	4	12
	1	2	6	0

$$x^3 + 2x - 12 = (x-2)(x^2 + 2x + 6) = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = 2 \\ x = \dfrac{-2 \pm \sqrt{-20}}{2} \notin \mathbb{R} \end{cases}$$

Per tant, el valor més petit de l'expressió de l'enunciat surt quan x = 2 i el seu valor és:

$$\sqrt{(2-1)^2 + (8-10)^2} + \sqrt{(2-4)^2 + (8-4)^2} = 3\sqrt{5}$$

<u>Novembre 14-15</u>: Siga f una funció amb les següents propietats:

1.- f(n) està definit ∀n, enter positiu

2.- f(n) és un enter ∀n, enter positiu

3.- f(2) = 2

4.- f(m·n) = f(m)·f(n) ∀m, n enters positius

5.- Si m > n aleshores f(m) > f(n)

Proveu que f(n) = n ∀n, enter positiu

Solució:

Lema previ: $f(2^n) = 2^n \ \forall n \in \mathbb{N}$

Per inducció:

Per l'axioma 3 tenim f(2) = 2. Suposem $f(2^n) = 2^n$ i vegem-ho per a n + 1

$$f(2^{n+1}) = f(2\cdot 2^n) = \{\text{axioma 4}\} = f(2)\cdot f(2^n) = \{\text{axioma 3 i hipòtesi d'inducció}\} = 2\cdot 2^n = 2^{n+1}$$

Pel lema tenim que f coincideix amb la identitat en las potències de 2. Estudiem que passa amb els naturals entre dues potències de 2 consecutives. Tenim:

$2 < 3 < 4 = 2^2 \ \Rightarrow$ {axioma 5} $2 = f(2) < f(3) < f(4) = 4$. Per tant f(3) és un natural entre 2 i 4 $\Rightarrow f(3) = 3$

$4 = 2^2 < 5 < 6 < 7 < 8 = 2^3 \ \Rightarrow$ {axioma 5} $4 = f(4) < f(5) < f(6) < f(7) < f(8) = 8$. Per tant f(5), f(6) i f(7) són naturals distints i ordenats entre 5 i 7. Per tant, necessàriament: f(5) = 5, f(6) = 6 i f(7) = 7.

Vegem-ho en general: Entre 2^n i 2^{n+1} hi ha $2^n - 1$ naturals:

$$2^n < 2^n + 1 < 2^n + 2 < \cdots\cdots < 2^n + 2^n - 1 < 2^n + 2^n = 2\cdot 2^n = 2^{n+1}$$

Per l'axioma 5 tindrem.

$$2^n = f(2^n) < f(2^n + 1) < f(2^n + 2) < \cdots\cdots < f(2^n + 2^n - 1) < f(2^{n+1}) = 2^{n+1}$$

Per tant, necessàriament $f(2^n+j)$ és un natural que formen una col·lecció estrictament creixent de $2^n - 1$ naturals entre $2^n + 1$ i 2^{n+1}. Per tant:

$$f(2^n+j) = 2^n+j \quad \forall j\in\{1, 2, 3, \cdots, 2^n - 1\}$$

Per tant, tenim que $f(n) = n \ \forall n\in\mathbb{N}$

Novembre 16: Demostreu que:

$$\sqrt{\mathbf{c}+\mathbf{1}} - \sqrt{\mathbf{c}} < \sqrt{\mathbf{c}} - \sqrt{\mathbf{c}-\mathbf{1}}$$

Per a qualsevol $c \geq 1$

Solució: Tindrem:

$$\begin{aligned} c \geq 1 \ &\Rightarrow (y = x^2 \text{creixent}) \ c^2 \geq 1^2 = 1 \ \Rightarrow \ 0 \leq c^2 - 1 < c^2 \ \Rightarrow \ \left(y = \sqrt{x} \text{ creixent}\right) \sqrt{c^2 - 1} < \sqrt{c^2} \\ &= c \ \Rightarrow \ 2\sqrt{c^2 - 1} < 2c \ \Rightarrow 2c + 2\sqrt{c^2 - 1} < 4c \ \Rightarrow \ c + 1 + c - 1 + 2\sqrt{(c-1)(c+1)} \\ &< 4c \ \Rightarrow \ \left(\sqrt{c+1} + \sqrt{c-1}\right)^2 < 4c \ \Rightarrow \ \left(y = \sqrt{x} \text{ creixent}\right) \sqrt{c+1} + \sqrt{c-1} < 2\sqrt{c} \\ &= \sqrt{c} + \sqrt{c} \ \Rightarrow \ \sqrt{c+1} - \sqrt{c} < \sqrt{c} - \sqrt{c-1} \end{aligned}$$

Solució de Ignacio Larrosa Cañestro:

$$\sqrt{c+1} - \sqrt{c} < \sqrt{c} - \sqrt{c-1}$$

$$\Updownarrow$$

$$\sqrt{c+1} + \sqrt{c-1} < 2\sqrt{c}$$

$$\Updownarrow \ (y = x^2 \text{ y } y = \sqrt{x} \text{ creixent})$$

$$2c + 2\sqrt{(c-1)(c+1)} < 4c$$

$$\Updownarrow$$

$$2\sqrt{(c-1)(c+1)} < 2c$$

$$\Updownarrow \; (y = x^2 \text{ y } y = \sqrt{x} \text{ creixent})$$

$$c^2 - 1 = (c-1)(c+1) < c^2$$

Novembre 17: Trobeu els enters a, b i c que compleixen

$$\mathbf{a^2 + b^2 - 8c = 6}$$

Solució: L'equació pot interpretar-se com buscar potències quadrades que donen residu 6 mòdul 8. Tenim, al considerar congruències mòdul 8:

$$a = 0(8) \;\Rightarrow\; a^2 = 0(8)$$
$$a = 1(8) \;\Rightarrow\; a^2 = 1(8)$$
$$a = 2(8) \;\Rightarrow\; a^2 = 4(8)$$
$$a = 3(8) \;\Rightarrow\; a^2 = 1(8)$$
$$a = 4(8) \;\Rightarrow\; a^2 = 0(8)$$
$$a = 5(8) \;\Rightarrow\; a^2 = 1(8)$$
$$a = 6(8) \;\Rightarrow\; a^2 = 4(8)$$
$$a = 7(8) \;\Rightarrow\; a^2 = 1(8)$$

I a més, per a la suma de potències tenim:

$b^2 \backslash a^2$	0(8)	1(8)	4(8)
0(8)	0(8)	1(8)	4(8)
1(8)	1(8)	2(8)	5(8)
4(8)	4(8)	5(8)	0(8)

Per tant $a^2 + b^2 \neq 6(8) \;\Rightarrow\; a^2 + b^2 - 8c = 6$ no té solucions

Solució @Fedematico314: Ja que 6 + 8c és parell tindrem que $a^2 + b^2$ també deu ser-ho. Per tant, a i b deuen tenir la mateixa paritat. Si ambdós fossin parells $a^2 + b^2 - 8c$ seria múltiple de 4 que es impossible (perquè 6 no es múltiple de 4). Suposem que a = 2x +1 i b = 2y + 1, aleshores:

$$8c = a^2 + b^2 - 6 = 4x^2 + 4x + 1 + 4y^2 + 4y + 1 - 6 = 4(x^2 + x + y^2 + y - 1)$$

Per tant, necessàriament, el claudàtor deu ser múltiple de 2, però axó es impossible perquè $x^2 + x$ és parell, $y^2 + y$ és par, i al restar-li una unitat deu ser imparell.

Per tant, l'equació no té solucions

<u>Novembre 18:</u> Trobeu:

$$\sum_{\mathbf{k}=\mathbf{1}}^{\mathbf{n}} (\mathbf{k} \cdot \mathbf{k}!)$$

<u>Solució:</u> Tenim, desenvolupant el simbolisme:

$$\sum_{k=1}^{n} (k \cdot k!) = 1 \cdot 1! + 2 \cdot 2! + 3 \cdot 3! + \cdots\cdots + (n-1) \cdot (n-1)! + n \cdot n!$$

Per a cada sumand del segon membre, tenim:

$$n \cdot n! = [(n+1) - 1] \cdot n! = (n+1) \cdot n! - n! = (n+1)! - n!$$

$$(n-1) \cdot (n-1)! = n \cdot (n-1)! - (n-1)! = n! - (n-1)!$$

$$(n-2) \cdot (n-2)! = [(n-1) - 1] \cdot (n-2)! = (n-1) \cdot (n-2)! - (n-2)! = (n-1)! - (n-2)!$$

$$\vdots$$

$$\vdots$$

$$\vdots$$

$$\vdots$$

$$3 \cdot 3! = [(3+1) - 1] \cdot 3! = (4) \cdot 3! - 3! = 4! - 3!$$

$$2 \cdot 2! = [(2+1) - 1] \cdot 2! = (3) \cdot 2! - 2! = 3! - 2!$$

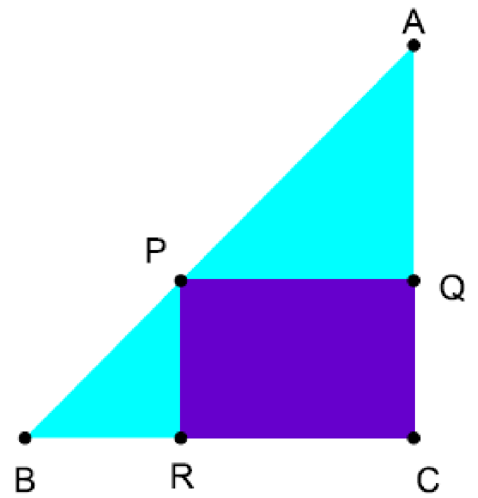
Amb això:

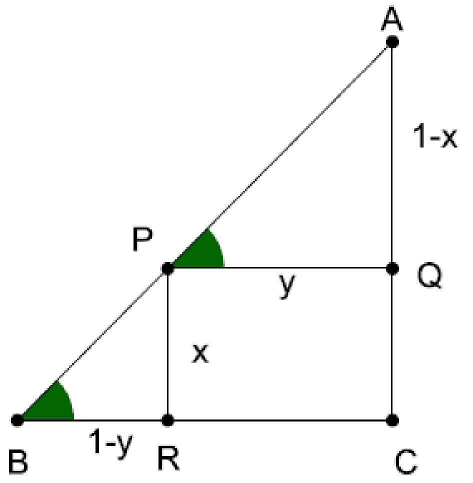
$$\sum_{k=1}^{n} (k \cdot k!) = 1 \cdot 1! + 2 \cdot 2! + 3 \cdot 3! + \cdots\cdots + (n-1) \cdot (n-1)! + n \cdot n!$$

$$= 1 + (3! - 2!) + (4! - 3!) + \cdots + (n! - (n-1)!) + \big((n+1)! - n!\big) = 1! - 2! + (n+1)!$$

$$= (n+1)! - 1$$

<u>Novembre 19-20:</u> Siga ΔABC un triangle rectangle isòsceles amb catets de longitud 1. Siga P un punt qualsevol de la hipotenusa. Siguen Q i R els peus de les perpendiculars als catets per P. Considerem les àrees dels triangles ΔAPQ i ΔPBR i l'àrea del rectangle QCRP. Provar que, no importa on es trie el punt P, la major d'aquestes àrees és, almenys, 2/9



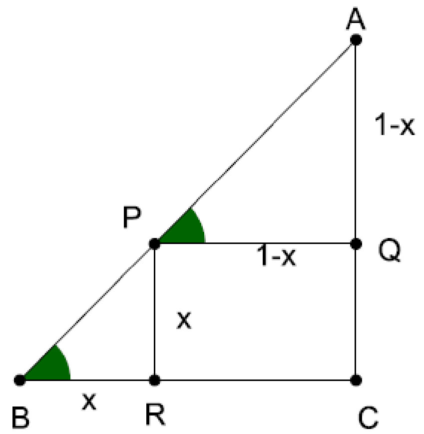


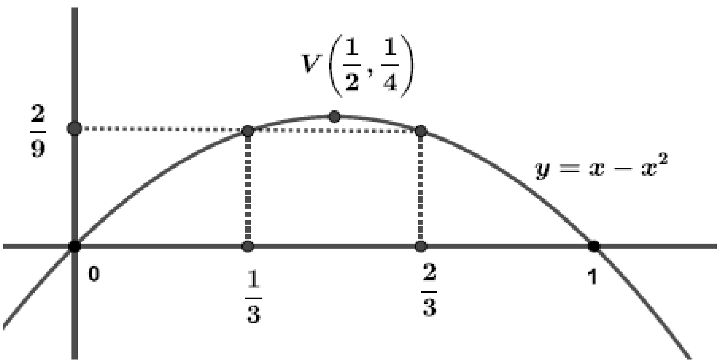
<u>Solució:</u> Com que els triangles ΔBRP i ΔPQA són semblants (a l'ésser els dos rectangles i tindre iguals els angles de color verd, per tindre costats coincidents o paral·lels), tindrem:

$$\frac{x}{1-x} = \frac{1-y}{y} \Rightarrow xy = (1-x)\cdot(1-y)$$
$$= 1 - y - x + xy \Rightarrow 1 = y + x$$

Per tant la il·lustració queda com apareix a la dreta, i les àrees de cada polígon són:

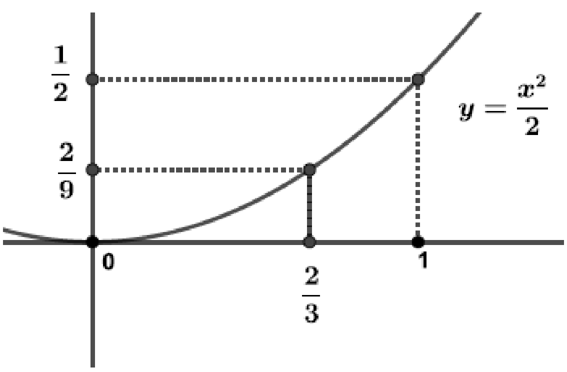
$$\begin{cases} \Delta\text{PBR} \Rightarrow \dfrac{x^2}{2} \\ \Delta\text{PQA} \Rightarrow \dfrac{(1-x)^2}{2} \\ \text{RPQC} \Rightarrow x\cdot(1-x) = x - x^2 \end{cases}$$





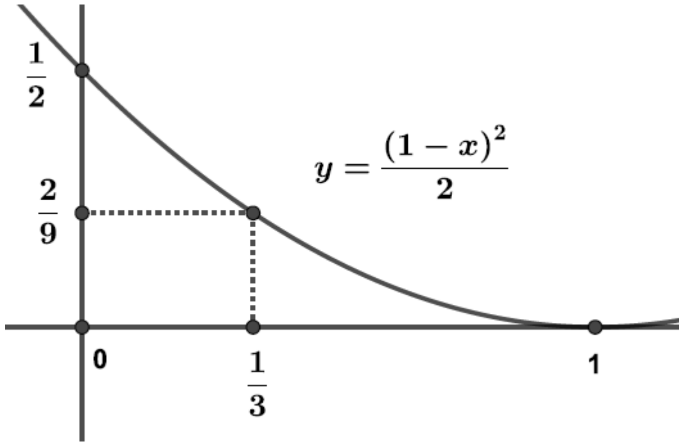
y = x^2 – x és una paràbola invertida amb vèrtex V , que passa pels punts $\left(\frac{1}{3},\frac{2}{9}\right)$ i $\left(\frac{2}{3}, \frac{1}{9}\right)$.

Amb això, si $x \in \left[\frac{1}{3},\frac{2}{3}\right]$ l'àrea del rectangle RPQC és major o igual a $\frac{2}{9}$



$y = \frac{x^2}{2}$ és una paràbola no invertida amb vèrtex (0, 0), que passa per $\left(\frac{2}{3},\frac{2}{9}\right)$ i $\left(1,\frac{1}{2}\right)$.

Amb això, si $x \in \left[\frac{2}{3}, 1\right]$ l'àrea del triàngle ΔPBR es major o igual a $\frac{2}{9}$



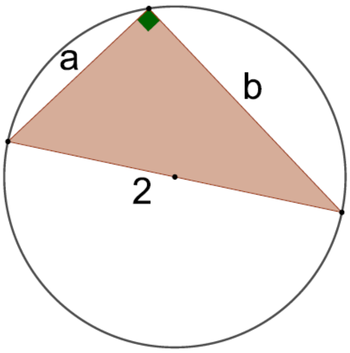
$y = \frac{(1-x)^2}{2}$ és una paràbola no invertida amb vèrtex (1, 0), que passa per $\left(\frac{1}{3}, \frac{2}{9}\right)$ i $\left(0, \frac{1}{2}\right)$.

Amb això, si $x \in \left[0, \frac{1}{3}\right]$ l'àrea del triàngle ΔPQA es major o igual a $\frac{2}{9}$

<u>Novembre 21:</u> Proveu que per a qualsevol quadrilàter convex inscrit en un cercle de radi 1, la longitud del costat més curt és menor o igual a $\sqrt{2}$

<u>Solució:</u> <u>Lema:</u> Siguen a i b dues cordes perpendiculars d'una circumferència de diàmetre 2. Llavors:

$$a \leq b \ \Rightarrow \ a \leq \sqrt{2} \leq b$$

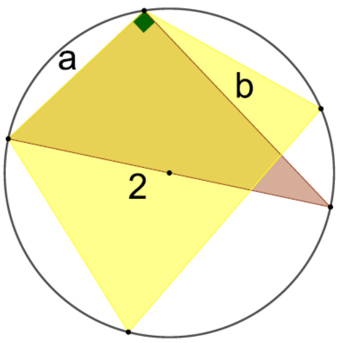


<u>Demostració:</u> A l'ésser les cordes perpendiculars, el triangle que formen té per hipotenusa un diàmetre. Llavors en aplicar Pitàgores:

$$a^2 + b^2 = 4$$

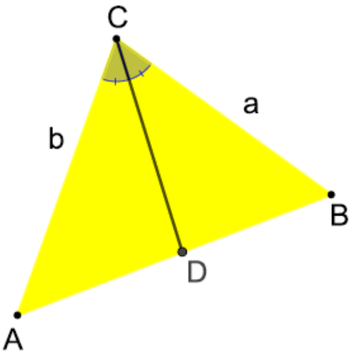
Però si, $a \leq b$ ((i per tant $a^2 \leq b^2$), tenim:

$$a^2 = \frac{2a^2}{2} \leq \frac{a^2 + b^2}{2} = \frac{4}{2} = 2 \leq \frac{2b^2}{2} = b^2 \ \Rightarrow \ a \leq \sqrt{2} \leq b$$



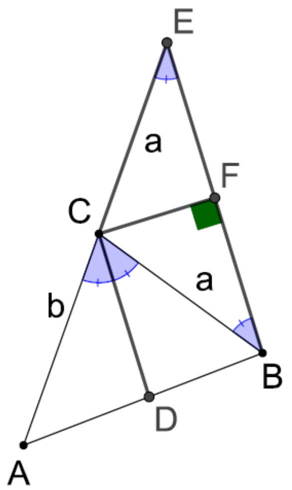
Siga ara un quadrilàter convex inscrit en una circumferència de radi 1. Siguen α_i els angles que formen els costats. Algun angle $\alpha_j \geq 90°$ (perquè si tots els angles $\alpha_i < 90° \Rightarrow \Sigma\alpha_i < 4 \cdot 90° = 360°$, en contra que $\Sigma\alpha_i = 360°$). Siguen a i c els costats que generen aquest α_j i suposem que $a \leq c$. Construïm llavors una corda perpendicular a a i suposem que la seua mesura siga b. Aplicant el lema, tenim $a \leq \sqrt{2}$

Si a, és el menor dels costats del quadrilàter, ja està tot demostrat. Si, per contra, hi ha en el quadrilàter, un costat amb longitud més xicoteta que a, diguem m, tindrem $m < a \leq \sqrt{2}$ i també tenim acabat el problema



Novembre 22-23: Siga ΔABC un triangle amb costats de longituds a, b i c. La bisectriu per C talla al costat AB en D. Proveu que la longitud de la bisectriu CD és:

$$\frac{2ab\cos\frac{C}{2}}{a+b}$$

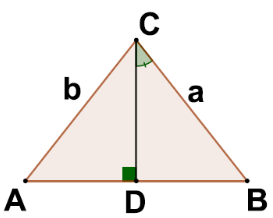


Solució 1: A partir del vèrtex B tracem una paral·lela a la bisectora CD fins a trobar-se amb E (en la prolongació d'AC). Tracem, també, una perpendicular a EB per C que curta a EB en F. Els angles de color blau són tots iguals (bé per ser alterns interns, bé per tindre costats coincidents o paral·lels). Així que ΔCBE és isòsceles amb CB = CE = a. Llavors en el triangle ΔBCF:

$$\cos\frac{C}{2}=\frac{FB}{CB}=\frac{FB}{a}=\frac{2\cdot FB}{2\cdot a}=\frac{EB}{2a}\Rightarrow EB=2a\cos\frac{C}{2}$$

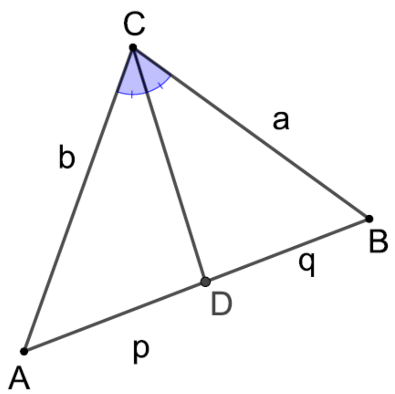
A més, $\Delta ACD \cong \Delta AEB$ (per construcció), per tant:

$$\frac{AC}{CD}=\frac{AE}{EB}\Rightarrow CD=\frac{AC\cdot EB}{AE}=\frac{b\cdot 2a\cos\frac{C}{2}}{a+b}$$



Solución 2: Si a = b el triangle inicial és isòsceles i CD es perpendicular a AB i aleshores:

$$CD=a\cdot\cos\frac{C}{2}=\frac{2b}{2b}a\cdot\cos\frac{C}{2}=\frac{2ab\cos\frac{C}{2}}{a+b}$$



Suposem, doncs que $a \neq b$. Pel teorema de la bisectriu

$$\frac{a}{b}=\frac{q}{p}$$

Si apliquem el teorema dels cosinus a q i p:

$$q^2=CD^2+a^2-2aCD\cos\frac{C}{2}$$

$$p^2=CD^2+b^2-2bCD\cos\frac{C}{2}$$

D'on:

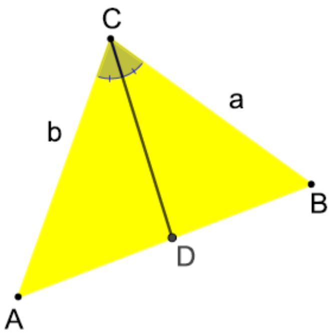
$$\frac{a^2}{b^2}=\frac{q^2}{p^2}=\frac{CD^2+a^2-2aCD\cos\frac{C}{2}}{CD^2+b^2-2bCD\cos\frac{C}{2}}\Rightarrow a^2\cdot\left(CD^2+b^2-2bCD\cos\frac{C}{2}\right)=b^2\cdot\left(CD^2+a^2-2aCD\cos\frac{C}{2}\right)$$

Operant es plega a:

$$(a^2 - b^2)CD = 2ab(a - b)\cos\frac{C}{2}$$

I com $a - b \neq 0$

$$(a + b)CD = 2ab\cos\frac{C}{2} \;\Rightarrow\; CD = \frac{2ab\cos\frac{C}{2}}{a + b}$$



Solució 3: Tindrem en igualar l'àrea del triangle gran amb la suma d'àrees dels dos triangles xicotets:

$$\frac{1}{2}ab\sin C = \frac{1}{2}aCD\sin\frac{C}{2} + \frac{1}{2}bCD\sin\frac{C}{2} = \frac{1}{2}CD(a + b)\sin\frac{C}{2}$$

I recordant el sinus de l'angle doble, tenim:

$$2ab\sin\frac{C}{2}\cos\frac{C}{2} = CD(a + b)\sin\frac{C}{2} \;\Rightarrow\; CD = \frac{2ab\cos\frac{C}{2}}{a + b}$$

Novembre 24: Siga n el menor natural tal que la suma dels seus dígits és el major natural de dues xifres amb suma de dígits igual a 9. Quants divisors té n+1?

Solució: Si designem per s(n) la suma dels dígits del número n, busquem el menor n tal que s(n) és el major número de dues xifres amb suma de dígits s(s(n)) igual a 9.

Si s(s(n)) = 9 i s(n) té dues xifres, els casos possibles són: $s(n) \in \{90, 81, 18, 72, 27, 63, 36, 54, 45\}$.

El major de tots ells és 90.

Ara busquem el més xicotet n amb s(n) = 90, que òbviament és 9999999999 (perquè qualsevol altre natural amb s(n) = 90 té més xifres i per tant és major que 9999999999). Llavors n + 1 = 10000000000 = $10^{10} = 5^{10} \cdot 2^{10}$. Els divisors de n + 1 són de la forma $2^{\alpha} \cdot 5^{\beta}$ amb $\alpha, \beta \in \{0, 1, 2, \cdots, 9, 10\}$. Es a dir, n + 1 té (11·11 =) 121 divisors

Novembre 25-26: A partir dels dígits 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 i 9 formem números de nou xifres sense repetir cap. Quina és la probabilitat que el número resultant siga múltiple de 11?

Solució: Recordem la regla de la divisibilitat per 11: La suma de les xifres en lloc imparell (Σ_I) menys la suma de xifres en lloc parell (Σ_P) es 0 o múltiple de 11. El major valor de Σ_I és (9 + 8 + 7 + 6 + 5 =) 35 que porta associat el menor valor de Σ_P que és (1 + 2 + 3 + 4 =) 10. El menor valor de Σ_I és (1 + 2 + 3 + 4 + 5 =) 15 que porta associat el major valor de Σ_P que és (6 + 7 + 8 + 9 =) 30. Per tant, els valors de $\Sigma_I - \Sigma_P$ van des de (35 – 10 =)25 fins (15 – 30 =) – 15. D'ací que els valors que fan els números múltiples de 11 són: 22, 11, 0, - 11. Analitzem cadascun d'aquestos valors possibles:

Si $\Sigma_I - \Sigma_P = 22$, com $\Sigma_I + \Sigma_P$ = (1 + 2+ 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 =)45, tenim al sumar les dues equacions que $2 \cdot \Sigma_I = 67$ que és un absurd perquè el primer membre és parell i el segon imparell.

Si $\Sigma_I - \Sigma_P = 0$, com $\Sigma_I + \Sigma_P = 45$, tenim al sumar las dues equacions que $2 \cdot \Sigma_I = 45$ que és un absurd perquè el primer membre és parell i el segon imparell.

Si $\Sigma_I - \Sigma_P = 11$, com $\Sigma_I + \Sigma_P = 45$, tenim al restar les dues equacions que $\Sigma_P = 17$

Si $\Sigma_I - \Sigma_P = -11$, com $\Sigma_I + \Sigma_P = 45$, tenim al restar las dues equacions que $\Sigma_P = 28$

Per al cas $\Sigma_P = 17$, tenim 9 possibilitats:

1, 2, 5, 9,

1, 2, 6, 8,

1, 3, 4, 9,

1, 3, 5, 8,

1, 3, 6, 7,

1, 4, 5, 7,

2, 3, 4, 8,

2, 3, 5, 7,

2, 4, 5, 6

que generen 9·4!·5! números al reordenar les xifres dels llocs parells i les xifres dels llocs imparells

Per al cas $\Sigma_P = 28$, tenim 2 possibilitats:

9, 8, 6, 5,

9, 8, 7, 4,

que generen 2·4!·5! números al reordenar les xifres dels llocs parells i les xifres dels llocs imparells.

Per tant la probabilitat sol·licitada és:

$$\frac{\text{casos favorables}}{\text{casos possibles}} = \frac{9 \cdot 4!\,35! + 2 \cdot 4! \cdot 5!}{9!} = \frac{11 \cdot 4! \cdot 5!}{9!} = \frac{11}{9 \cdot 2 \cdot 7} = \frac{11}{126}$$

Novembre 27: Siga l'equació: $x^3 + 4x^2 - 4x + a = 0$. Trobeu a per a que les tres arrels d'ella, x_1, x_2 i x_3 compleixquen $x_3 = x_1 \cdot x_2$

Solució: Recordem les relacions de Cardano-Vietà: Si

$$P(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots\cdots + a_k x^k$$

té per arrels: $x_1, x_2, \cdots\cdots, x_k$, aleshores:

$$\left.\begin{array}{c} \sum x_i = -\frac{a_{k-1}}{a_k} \\ \sum_{i<j} x_i \cdot x_j = \frac{a_{k-2}}{a_k} \\ \sum_{i<j<n} x_i \cdot x_j \cdot x_n = -\frac{a_{k-3}}{a_k} \\ \vdots \\ \prod x_i = (-1)^k \frac{a_0}{a_k} \end{array}\right\}$$

Les dues primeres, juntament amb la relació que han de complir les arrels porten al sistema

$$\left.\begin{array}{c} x_1 + x_2 + x_3 = -4 \\ x_1 \cdot x_2 + x_1 \cdot x_3 + x_3 \cdot x_2 = -4 \\ x_1 \cdot x_2 = x_3 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{c} x_1 + x_2 + x_1 \cdot x_2 = -4 \\ x_1 \cdot x_2 + x_1^2 \cdot x_2 + x_1 \cdot x_2^2 = -4 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{c} x_1 + x_2 + x_1 \cdot x_2 = -4 \\ x_1 \cdot x_2(1 + x_1 + x_2) = -4 \end{array}\right\}$$

En l'últim sistema les incògnites apareixen en la forma $x_1 + x_2$ y $x_1 \cdot x_2$. Efectuant el canvi $x_1 + x_2 = t$ y $x_1 \cdot x_2 = u$, el sistema es transforma en:

$$\left.\begin{array}{c} t + u = -4 \\ u(1 + t) = -4 \end{array}\right\}$$

les solucions del qual són: u = 1 i t = - 5; u = - 4 i t = 0

La primera solució aporta el sistema:

$$\left.\begin{matrix} x_1 \cdot x_2 = 1 \\ x_1 + x_2 = -5 \end{matrix}\right\}$$

amb solucions:

$$x_1 = \frac{-5+\sqrt{21}}{2}, x_2 = \frac{-5-\sqrt{21}}{2}$$

que porten a:

$$x_3 = x_1 \cdot x_2 = \frac{25-21}{4} = 1$$

amb el que, utilitzant la tercera relació de Cardano-Vietà, porta a:

$$a = -x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 = (-1) \cdot \frac{-5+\sqrt{21}}{2} \cdot \frac{-5-\sqrt{21}}{2} = -1$$

La segona solució aporta el sistema:

$$\left.\begin{matrix} x_1 \cdot x_2 = -4 \\ x_1 + x_2 = 0 \end{matrix}\right\}$$

amb solucions: $x_1 = 2,\ x_2 = -2$, que porten a: $x_3 = x_1 \cdot x_2 = 2 \cdot (-2) = -4$

amb el que, utilitzant la tercera relació de Cardano-Vietà, porta a:

$$a = -x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 = (-2) \cdot (-2) \cdot (-4) = -16$$

Novembre 28-29: Proveu que si $\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \frac{a_3}{b_3}$ i p_1, p_2 y p_3 no son tots nuls, aleshores:

$$\left(\frac{a_1}{b_1}\right)^n = \frac{p_1 a_1^n + p_2 a_2^n + p_3 a_3^n}{p_1 b_1^n + p_2 b_2^n + p_3 b_3^n}$$

Per a tot enter positiu n

Solució: Lema previ:

$$\frac{A}{B} = \frac{C}{D} \Rightarrow \frac{A+C}{B+D} = \frac{A}{B} = \frac{C}{D}$$

Demostració: Si

$$\frac{A}{B} = \frac{C}{D} \Rightarrow AD = BC$$

Per altra part:

$$(A+C)B = AB + CB = AB + AD = A(B+D) \Rightarrow \frac{A+C}{B+D} = \frac{A}{B} = \frac{C}{D}$$

Anem pel problema. Suposem que$p_1 \neq 0$, llavors:

$$\left(\frac{a_1}{b_1}\right)^n = \frac{a_1^n}{b_1^n} = \frac{p_1 a_1^n}{p_1 b_1^n}$$

Si $p_2 = 0$, aleshores:

$$\left(\frac{a_1}{b_1}\right)^n = \frac{p_1 a_1^n}{p_1 b_1^n} = \frac{p_1 a_1^n + p_2 a_2^n}{p_1 b_1^n + p_2 b_2^n}$$

Si $p_2 \neq 0$, aleshores:

$$\left(\frac{a_1}{b_1}\right)^n = \left\{\begin{array}{r} = \dfrac{p_1a_1^n}{p_1b_1^n} \\ = \left(\dfrac{a_2}{b_2}\right)^n = \dfrac{a_2^n}{b_2^n} = \dfrac{p_2a_2^n}{p_2b_2^n} \end{array}\right\} \overset{\text{lema}}{\Rightarrow} \left(\frac{a_1}{b_1}\right)^n = \frac{p_1a_1^n + p_2a_2^n}{p_1b_1^n + p_2b_2^n}$$

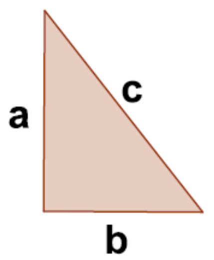
Si $p_3 = 0$, aleshores

$$\left(\frac{a_1}{b_1}\right)^n = \frac{p_1a_1^n + p_2a_2^n}{p_1b_1^n + p_2b_2^n} = \frac{p_1a_1^n + p_2a_2^n + +p_3a_3^n}{p_1b_1^n + p_2b_2^n + p_3b_3^n}$$

Si $p_3 \neq 0$, aleshores

$$\left(\frac{a_1}{b_1}\right)^n = \left\{\begin{array}{r} = \dfrac{p_1a_1^n + p_2a_2^n}{p_1b_1^n + p_2b_2^n} \\ = \left(\dfrac{a_3}{b_3}\right)^n = \dfrac{a_3^n}{b_3^n} = \dfrac{p_3a_3^n}{p_3b_3^n} \end{array}\right\} \overset{\text{lema}}{\Rightarrow} \left(\frac{a_1}{b_1}\right)^n = \frac{p_1a_1^n + p_2a_2^n + p_3a_3^n}{p_1b_1^n + p_2b_2^n + p_3b_3^n}$$

<u>**Novembre 30:**</u> Siga c la hipotenusa d'un triangle rectangle amb catets a i b. Proveu que $a + b \leq \sqrt{2}c$. Quan es dona la igualtat?



<u>**Solució:**</u> Tindrem:

$$(a+b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab = \{\text{Pitágoras}\} = c^2 + 2ab$$

Com la funció $y = \sqrt{x}$ es injectiva

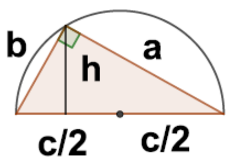
$$a + b = \sqrt{c^2 + 2ab} \qquad (*)$$

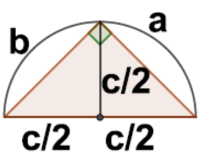
Ara:

$$0 \leq (a-b)^2 = a^2 + b^2 - 2ab = c^2 - 2ab \ \Rightarrow\ c^2 - 2ab \geq 0 \ \Rightarrow\ c^2 \geq 2ab$$

I per últim en (*) tenim, al ser $y = \sqrt{x}$ creixent:

$$a + b = \sqrt{c^2 + 2ab} \leq \sqrt{c^2 + c^2} = c\sqrt{2}$$





La igualtat es dona quan $c^2 = 2ab$. L'àrea del triangle pot calcular-se com:

$$\frac{c \cdot h}{2} = \frac{ab}{2} \Rightarrow ch = ab$$

Si $c^2 = 2ab$

$$\frac{c^2}{2} = ch \ \Rightarrow\ h = \frac{c}{2}$$

Es dir, la igualtat es dona, quan el triangle, a banda de ser rectangle, es isòsceles, es dir un triangle 90°-45°-45°