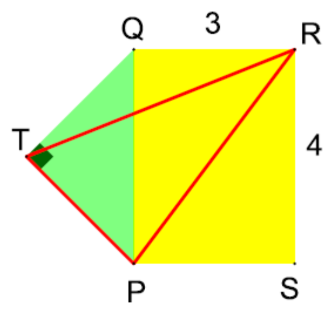
SOLUCIONS DESEMBRE 2019

PROBLEMES PER A SEGON CICLE DE L'ESO Autors: Col·lectiu "Concurso de Primavera" (https://www.concursoprimavera.es/#concurso). Comunitat de Madrid

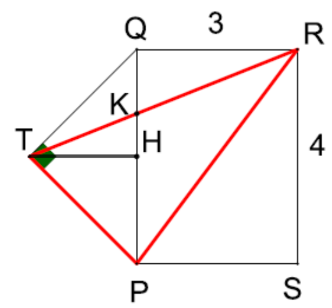


Desembre 1-7-8: En el dibuix es pot observar un rectangle PQRS i un triangle rectangle isòsceles ΔPTQ. Si RS = 4 i QR = 3, trobar l'àrea del triangle ΔPTR

Solució 1: Per a aconseguir l'àrea demanada, dividirem el triangle ΔPTR en dos triangles ΔPKT i ΔPKR. Els dos tenen la mateixa base PK i les altures són HT i QR.

Com el triangle ΔPTQ és isòsceles, l'altura cau en la meitat de la hipotenusa i aplicant el teorema de l'altura tenim que $TH^2 = 2 \cdot 2$, per tant, TH = 2.

Ara tenim que ΔRQK ≅ ΔTHK ja que els dos són rectangles i tenen angles oposats pel vèrtex



$$\frac{\mathrm{TH}}{\mathrm{QR}} = \frac{\mathrm{HQ}}{\mathrm{QK}} = \frac{2}{3}$$

Com HK + QK = 2, tenim:

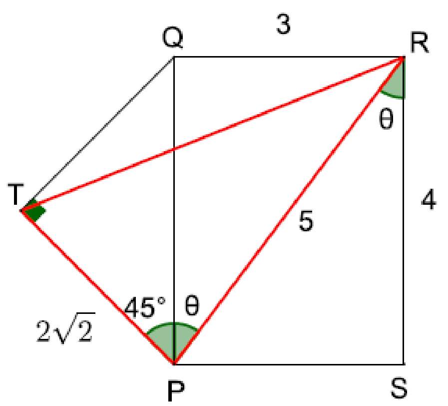
$$\frac{2}{3} = \frac{\mathrm{HK}}{2 - \mathrm{HK}} \quad \Rightarrow \quad \mathrm{HK} = \frac{4}{5}$$

Per últim:

$$\mathrm{PK} = 2 + \frac{4}{5} = \frac{14}{5}$$

I ja tenim l'àrea:

$$\mathrm{A} = \frac{\frac{14}{5} \cdot 2}{2} + \frac{\frac{14}{5} \cdot 3}{2} = 7$$



Solució 2: Tindrem, fàcilment, les mesures de la ilustació adjunta. En ΔRPS, tenim:

$$\mathrm{sen}\theta = \frac{3}{5}, \qquad \cos\theta = \frac{4}{5}$$

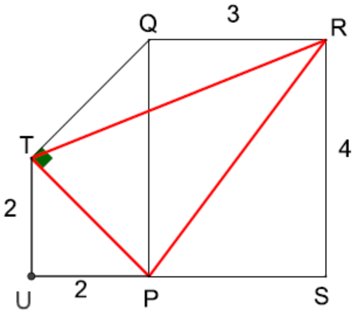
Por la qual cosa:

$$\mathrm{sen}(\theta + 45) = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{4}{5} + \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{3}{5} = \frac{7\sqrt{2}}{12}$$

Per últim:

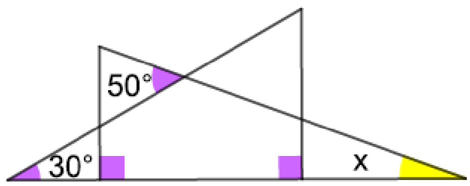
$$\mathrm{A}_{\Delta\mathrm{PRT}} = \frac{1}{2} \cdot 2\sqrt{2} \cdot 5 \cdot \mathrm{sen}(\theta + 45) = 7$$

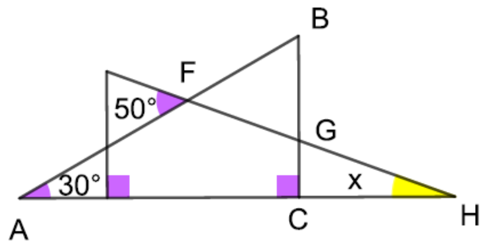
<u>Solució 3 (Ignacio Larrosa Cañestro):</u> Tindrem, fàcilment, les mesures de la ilustació adjunta. I, aleshores:



$$A_{\Delta TPR} = A_{TUSR} - A_{\Delta TUP} - A_{\Delta PSR} = \frac{2+4}{2} \cdot 5 - \frac{2 \cdot 2}{2} - \frac{4 \cdot 3}{2}$$
$$= 3 \cdot 5 - 2 \cdot 1 - 2 \cdot 3 = 7$$

<u>Desembre 2:</u> Quin és el valor de x?





<u>Solució:</u> En ΔABC tenim que ∠B = 60°. En ΔFGB tenim ∠F = 50° (per oposats pel vèrtex). Per tant ∠G = 70°. En ΔCHG, tenim: ∠G = 70° (per oposats pel vèrtex) i com ∠C = 90°, tindrem, per fí, x = 20°

<u>Desembre 3:</u> Quants enters n amb 5000 ≤ n ≤ 6000 verifiquen que el producte de les seues xifres és zero?

<u>Solució:</u> Comptarem els que comencen per 5 i no tenen cap zero. El 5 és l'única possibilitat per a les unitats de miler. Per a les centenes, desenes i unitats tenim 9 possibilitats (1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9). Per tant, hi ha: 1·9·9·9 = 729 números entre 5000 i 6000 sense zeros en les seues xifres. Per tant, números entre 5000 i 6000, amb algun zero en les seues xifres hi ha (1001 – 729 =) 272

<u>Desembre 4:</u> Trobeu tots els naturals x de manera que, al dividir 109 entre x dona residu 4.

<u>Solució:</u> Siga q un dels naturals buscats. Tindrem: qx + 4 = 109 (amb q > 4) o equivalentment qx = 105 = 3·5·7. Els divisors de 105, majors que 4, són 5, 7, 15, 21, 35 i 105. Hi ha per tant 6 naturals que en dividir a 109 donen resta 4.

<u>Desembre 5-6:</u> En una bossa hi ha dues boles roges i dos blaus i en una segona bossa hi ha dues roges, dos blaus i x verdes. Es trau de cadascuna de les dues bosses dues boles, sense reemplaçament i resulta que la probabilitat que les dues boles siguen del mateix color és igual en una bossa que en l'altra. Trobar el valor de x

<u>Solució:</u> La probabilitat de traure dues boles del mateix color de la primera bossa és:

$$\text{P(obtener dos rojas o dos azules)} = \frac{2}{4} \cdot \frac{1}{3} + \frac{2}{4} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{3}$$

En la segona bossa, la probabilitat de traure dues boles del mateix color és:

$$\mathrm{P(obtenir\ dues\ rojes\ o\ dues\ blaves\ o\ dues\ verdes)} = \frac{2}{4+x}\cdot\frac{1}{3+x}+\frac{2}{4+x}\cdot\frac{1}{3+x}+\frac{x}{4+x}\cdot\frac{x-1}{3+x}$$
$$= \frac{x^2-x+4}{(4+x)(3+x)}$$

Resolen l'equació que se obté, al igualar les dues probabilitats, obtenim que x = 0 o x = 5.

Desembre 9: Resoleu, en el conjunt dels enters, l'equació: **x + xy = 391**

Solució: Tindrem:

$$x(1+y) = 391 = 17\cdot 23$$

I, d'acord amb la unicitat de la factorització en primers, tenim:

x	1+y	y
1	391	390
-1	-391	-392
17	23	22
-17	-23	-24
23	17	16
-23	-17	-18
391	1	0
-391	-1	-2

Desembre 10-11: Recorrent el mateix camí, Dani fa la primera meitat a 6 km/h i la resta a 12 km/h, mentre que Laia en el primer terç camina només a 5 km/h, però la resta el fa a 15 km/h. Si Dani va tardar x hores a fer tot el camí i Laia va tardar i hores, quin és el quocient x/i?

Solució: Recordem que:

$$\mathrm{temps} = \frac{\mathrm{distància}}{\mathrm{velocitat}}$$

El temps que tarda Dani és:

$$x = \frac{\frac{d}{2}}{6}+\frac{\frac{d}{2}}{12} = \frac{d}{8}$$

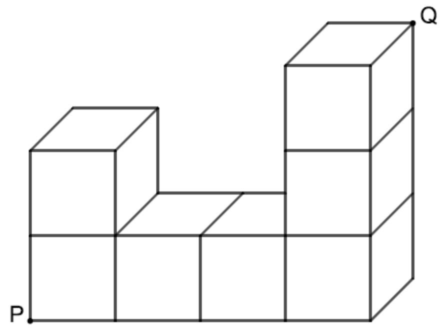
El temps que tarda Laia és:

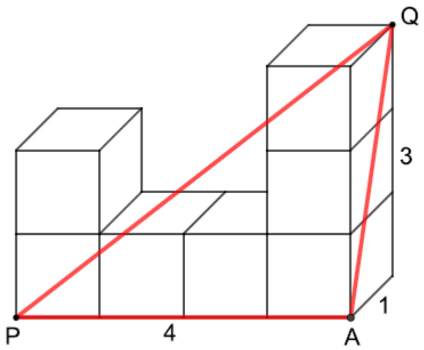
$$y = \frac{\frac{d}{3}}{5}+\frac{\frac{2d}{3}}{15} = \frac{d}{9}$$

Per tant:

$$\frac{x}{y} = \frac{\frac{d}{8}}{\frac{d}{9}} = \frac{9}{8}$$

<u>Desembre 12-13:</u> En la figura, cadascun dels set cubs té aresta 1. Trobeu la distància des de P fins Q





<u>Solució:</u> Tindrem:

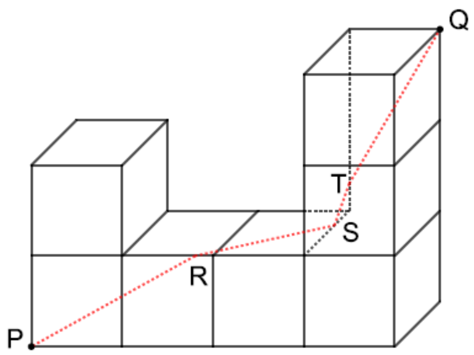
$$AQ = \sqrt{3^2 + 1^2} = \sqrt{10}$$

$$PQ = \sqrt{PA^2 + AQ^2} = \sqrt{16 + 10} = \sqrt{26}$$

Si haguerem de calcular la mínima distància entre els punts P i Q, podent-se traslladar-se únicament per l'exterior dels set cubs, tindríem:

1.- Podem prescindir del cub que està damunt del cub al qual pertany el punt P, perquè considerar-lo, només augmenta la distància.

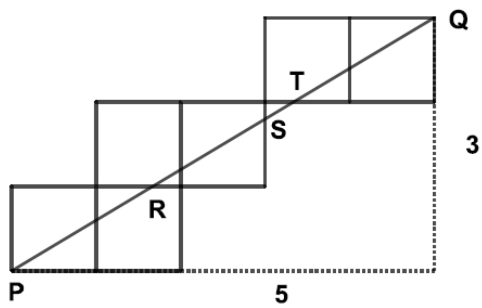
2.- Traslladant-nos per arestes dels cubs la distància seria 8.

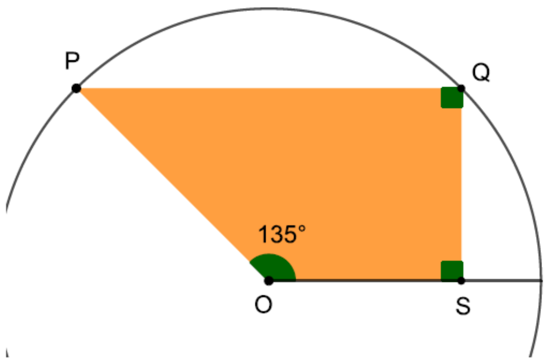


3.- La menor distància s'aconseguirà amb un camí com el marcat en la figura

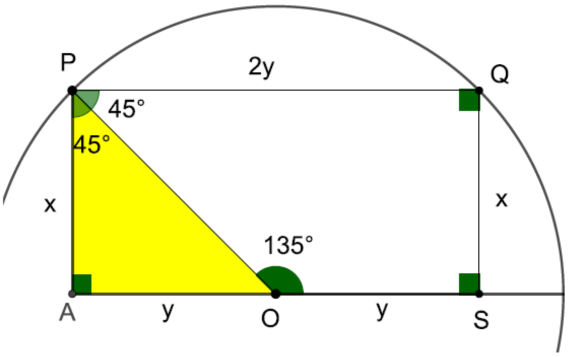
4.- La menor distància(per l'exterior) serà:

$$PQ = \sqrt{5^2 + 3^2} = \sqrt{34}$$





Desembre 14-15: En la il·lustració de la dreta la circumferència de centre O té radi 12 cm. Esbrinar l'àrea del trapezi POSQ



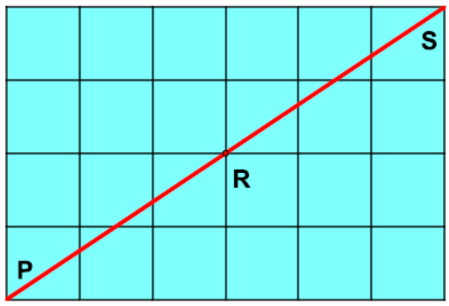
Solución: En OPQS, tindrem ∠OPQ = 45° (= 360 – (90 + 90 + 135)). Si A és el peu de la perpendicular per P al diàmetre que compté a O i a S, tindrem ∠OAP = 90° y ∠OPA = 45° ⇒ ΔOAP és rectàngle isòsceles ⇒ x = y. Com, a més a més, OP = 12:

$$x^2 + x^2 = 12^2 \quad \Rightarrow \quad x = 6\sqrt{2}$$

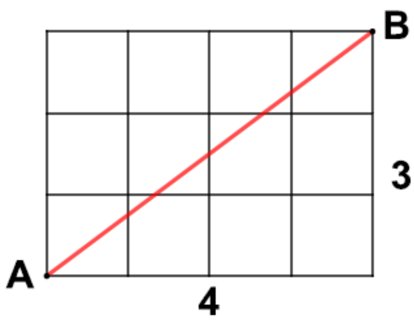
I, per últim:

$$A_{OPQS} = \frac{6\sqrt{2} + 12\sqrt{2}}{2} \cdot 6\sqrt{2} = 108$$

Desembre 16-17: S'observa una quadrícula 6x4. Una diagonal del rectangle passa per només tres vèrtexs de la quadrícula: P, R i S. Si el rectangle fora de 60x45, per quants vèrtexs de la quadrícula passaria una diagonal?



Solució: Tenim: mcd (60, 45) = 15. I com 60 x 45 = (4 x 15) x (3 x 15), tenim que una quadrícula 60 x45 pot entendre's formada per 15 reticles de 4x3, pel que fa a les cel·les pròximes a la diagonal. (D'una altra manera: El pendent de la diagonal és 45/60 = ¾. És a dir, si estem en un punt de la diagonal i ens traslladem a la dreta quatre unitats en l'eix de les X i pugem tres unitats en l'eix de les I estem una altra vegada en un punt de la diagonal)



Cadascun d'aquests reticles conté un punt de la diagonal (el punt inferior) excepte l'últim que conté dos punts (l'inferior i el superior). Per tant, 16 punts de la diagonal són vèrtexs de la quadrícula.

Desembre 18: Troba el valor de x, y i z que són dígits diferents i no nuls, perquè la suma de la dreta estiga ben realitzada

$$\begin{array}{cccc} & x & x & x \\ & y & y & y \\ + & z & z & z \\ \hline z & y & y & x \end{array}$$

Solució: Comencem per z. Mirant la suma, z només pot ser 1, ja que, si donara 2 o superior, x + y + z $\geq$ 20, només podria ser si x = y = 9, però això no és possible ja que l'enunciat diu que x $\neq$ y $\neq$ z. Per tant, z = 1. Mirem les unitats: x + y + 1 =10 + x. Per tant y = 9. Finalment, de la columna de les desenes, tenim: x + 9 + 1 + 1 =19. D'on, x = 8

Desembre 19: Quants números capicues de cinc xifres existeixen, que complisquen la condició que quatre d'elles siguen iguals i l'altra diferent?

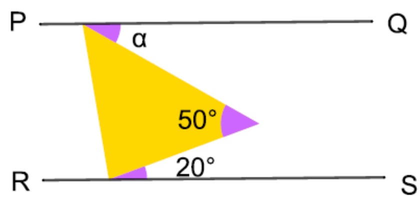
Solució: Com estem parlant de capicues de cinc xifres, és clar que la xifra diferent ha de ser la central i les altres quatre totes iguals.

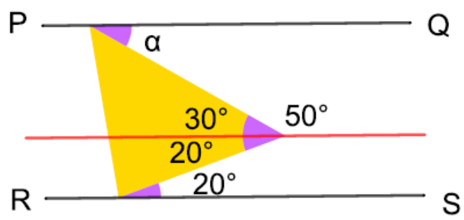
Si la xifra central és 0, hi ha nou capicues: 11011, 22022, 33033, ···· , 99099

Si la xifra central és x ($\in$\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}) hi ha huit capicues. Per exemple, si x = 3, els capicues són: 11311, 22322, 44344, ···· , 88388, 99399:

En total, hi ha (9 + 9·8 =) 81 capicues

Desembre 20: En la figura PQ//RS. Trobeu l'angle α





Solució: Òbviament α = 30°. Tant sols hi ha que dibuixar una paral·lela a RS que pase pel vèrtex de l'angle que mesura 50° i recordar la igualdat d'angles alterns interns

Desembre 21-22: Per al número $\overline{abcd}$ (a $\neq$ 0) es genera $\Sigma = \overline{abcd} + \overline{bcd} + \overline{cd} + \overline{d}$, per exemple, per al número 4089 tenim Σ = 4089 + 089 + 89 + 9 = 4276. Trobeu els números que compleixen Σ = 2014

Solució: Tenim:

$$\overline{abcd} = a \cdot 1000 + b \cdot 100 + c \cdot 10 + d$$

Amb el que:

$$\begin{aligned}\Sigma = \overline{abcd} + \overline{bcd} + \overline{cd} + \overline{d} &= a \cdot 1000 + b \cdot 100 + c \cdot 10 + d + b \cdot 100 + c \cdot 10 + d + c \cdot 10 + d + d \\ &= a \cdot 1000 + b \cdot 200 + c \cdot 30 + 4d = 2014\end{aligned}$$

Per tant, 4d acaba en 4. Repassant la taula de multiplicar del 4 tindrem que 4d = 4 o 4d = 24, és a dir d = 1 o d = 6. Si d = 6, 3c acabaria en 9 i (repassant la taula de multiplicar del 3) això només pot ser si c = 3. En aquest cas 2b hauria d'acabar en 9 i això és impossible perquè 2b acaba en xifra parell.

Si d = 1, 3c acabaria en 1 i això ocorre si i sols si c = 7. I en aquest cas 2b hauria d'acabar en 8 i repassant la taula de multiplicar del dos tenim que b = 4 o b = 9. Si b = 9, llavors a = 0 i això és impossible. Per tant, b = 4 i a més a = 1.

Només obtenim el número 1471.

Desembre 23: Si

$$\frac{(n+3)!}{n!} = 2^3 \cdot 3^3 \cdot 7 \cdot 13$$

quin és el factor primer més gran de n?

Solució: Tenim:

$$\frac{(n+3)!}{n!} = (n+3)(n+2)(n+1) = 2^3 \cdot 3^3 \cdot 7 \cdot 13$$

Com que entre tres naturals consecutius només un és múltiple de tres, d'entre n +1, n + 2 i n + 3 només un conté a 3^3 = 27. Tenim llavors, per tanteig, que com:

$$\frac{2^3 \cdot 7 \cdot 13}{26} = \frac{728}{26} = 28$$

els tres naturals consecutius són: 26, 27 i 28. Per tant de n = 25 = 5^2. I, com a conseqüència, la contestació a la pregunta és 5

Solució 2 (Isabel Font @asitnof): Tenim:

$$\frac{(n+3)!}{n!} = (n+3)(n+2)(n+1) = 2^3 \cdot 3^3 \cdot 7 \cdot 13$$

és a dir:

$$(n+3)(n+2)(n+1) = 6^3 \cdot 91$$

Com que $y = \sqrt[3]{x}$ es creixent, hi ha que buscar possibles factors entre

$$6 \cdot 4 = 24 < 6 \cdot \sqrt[3]{91} < 6 \cdot 5 = 30$$

Tot quadra, si agafem n + 2 = 27. Així, que n = 25 = 5^2. I 5 es la contestació a la pregunta del problema.

Desembre 24: Un comerciant desitja saber a quin preu ha d'etiquetar un producte que va comprar per 200 € perquè en fer una rebaixa del 20% obtinga un benefici del 25% sobre el preu al qual va comprar el producte.

Solució: Si x és el preu al qual ha d'etiquetar la peça, s'ha de complir que una rebaixa del 20% de x ha de produir com a resultat (200 + 25% de 200 =) 250. Per tant:

$$x \cdot \left(1 - \frac{20}{100}\right) = 250 \quad \Rightarrow \quad x = \frac{250}{0{,}8} = 312{,}50$$

Desembre 25: En una bossa fiquem els primers 20 nombres primers i després traiem, simultàniament, dos, quina és la probabilitat que la suma d'ells siga parell?

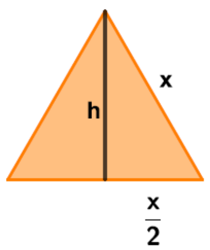
Solució: Els casos possibles són les maneres de triar (no importa l'ordre i no es poden repetir) dos números d'un total de 20, és a dir els casos possibles són C_2^{20}.

Perquè la suma de dos números siga parell, els dos han de tindre la mateixa paritat (és a dir els dos han de ser parells o els dos imparells). Com l'únic primer parell és 2, tindrem que l'única possibilitat que la suma de primers siga parell és que els dos siguen imparells. En definitiva, els casos favorables són C_2^{19}. En definitiva:

$$\frac{C_2^{19}}{C_2^{20}} = \frac{\binom{19}{2}}{\binom{20}{2}} = \frac{9}{10}$$

Desembre 26: L'àrea d'un hexàgon regular en cm² ve dau pel mateix número que el seu perímetre en cm, quants cm mesura el seu costat?

Solució: L'hexàgon regular es compon de sis triangles equilàters. Per tant, tindrem que si x és el costat de l'hexàgon el seu perímetre és 6x i la seua àrea és:



$$\mathbf{h} = \sqrt{\mathbf{x}^2 - \frac{\mathbf{x}^2}{4}} = \frac{\mathbf{x}\sqrt{3}}{2}$$

$$6 \cdot \frac{\text{base} \cdot \text{alçada}}{2} = 6 \cdot \frac{x^2\sqrt{3}}{4}$$

Per tant, es planteja l'equació:

$$6x = 6 \cdot \frac{x^2\sqrt{3}}{4}$$

la solució de la qual és:

$$x = \frac{4}{\sqrt{3}}$$

Desembre 27-28: Considerem el conjunt de totes les fraccions x/y sent x i y naturals primers entre si, quantes d'aquestes fraccions verifiquen que augmentant una unitat el numerador i el denominador, el valor de la fracció augmenta un 10%?

Solució: Tindrem de l'enunciat:

$$\frac{x+1}{y+1} = 1{,}1\frac{x}{y}$$

Simplificant l'equació:

$$\frac{10x+10}{y+1} = \frac{11x}{y} \Rightarrow 10xy + 10y = 11xy + 11x \Rightarrow 0 = xy + 11x - 10y \Rightarrow 0 = x(y+11) - 10y$$
$$\Rightarrow 0 = x(y+11) - 10y - 110 + 110 \Rightarrow 0 = x(y+11) - 10(y+11) + 110$$
$$\Rightarrow -110 = (x-10)(y+11) \Rightarrow -2 \cdot 5 \cdot 11 = (x-10) \cdot (y+11)$$

Es a dir:

$$2 \cdot 5 \cdot 11 = (10 - x)(y + 11)$$

Per la unicitat de la descomposició factorial en producte de primers tenim tres possibles valors per al primer parèntesi:

$$10 - x \in \{1, 2, 5\}$$

ja que els altres valors possibles per al primer parèntesi (10, 11, 22, 55 i 110) fan que x siga negatiu o zero en contra que x siga natural.

Si $10 - x = 1 \;\Rightarrow\; x = 9 \;\Rightarrow\; y + 11 = 110 \;\Rightarrow\; y = 99$ en contra que x i y no tinguen factors comuns.

Si $10 - x = 2 \;\Rightarrow\; x = 8 \;\Rightarrow\; y + 11 = 55 \;\Rightarrow\; y = 44$ en contra que x i y no tinguen factors comuns.

Si $10 - x = 5 \;\Rightarrow\; x = 5 \;\Rightarrow\; y + 11 = 22 \;\Rightarrow\; y = 11$ que es l'única solució a la qüestió plantejada.

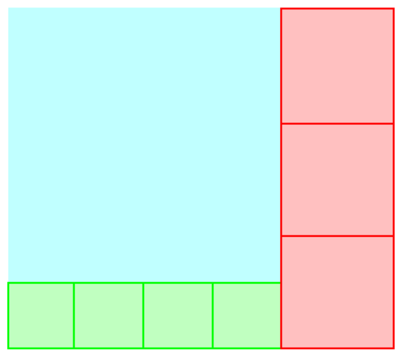
Desembre 29: Una llista de cinc enters positius verifica que l'únic número que apareix més d'una vegada és el 8, la mediana és 9 i la mitjana aritmètica és 10. Quin és el major valor possible de tots ells?

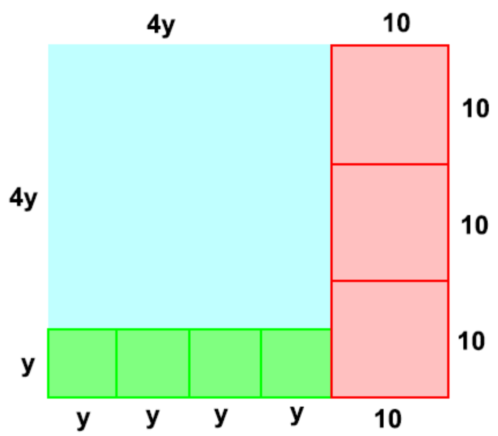
Solució: Com hi ha cinc (un nombre imparell) dades, la mediana és un valor de la variable. A més, segons l'enunciat, com hi ha cinc dades i la mediana és 9, el 8 només pot estar dues vegades. D'ací, que, les dades (ordenades de menor a major) han de ser: 8, 8, 9, x, y. Com la mitjana ha de ser 10, tenim:

$$\frac{8+8+9+x+y}{5} = 10 \;\Rightarrow\; x + y = 25$$

Com x ha de ser major que 9 tindrem que els possibles valors de x i y són: 10 i 15 o 11 i 14 o 12 i 13. El major valor possible de les dades és, doncs, 15.

Desembre 30-31: Un rectangle està dividit en 8 quadrats, com indica la figura. Si el costat dels quadrats de color roig mesura 10 cm, calcular el costat del quadrat gran.





Solució: De l'enunciat tindrem que els quadrats rojos tenen costat 10. Si els quadrats verds tenen costat y, el costat (inferior) del quadrat blau mesura 4y (que coincideix amb el costat superior i el costat esquerre). En igualar la mesura esquerra i dreta del rectangle total tenim

$$5y = 30 \;\Rightarrow\; y = 6$$

Per tant el costat del quadrat blau és (4·6 =) 24 cm