SOLUCIONS GENER 2020

PROBLEMES PER A BATXILLERAT. Autors: Col·lectiu “Concurso de Primavera” (https://www.concursoprimavera.es/#concurso). Comunitat de Madrid

Gener 1-2: Sis estudiants de diversos països d'Europa comparteixen pis. Tots ells parlen solament dos idiomes: Ángela parla alemany i anglès, Ulrike alemany i espanyol, Karin francès i espanyol, Dieter alemany i francès, Pierre francès i anglès i Rocío anglès i espanyol. Si triem dos d'ells a l'atzar, quina és la probabilitat de què puguen parlar en una llengua que entenguen bé cadascun?

Solució: Si disposem les dades en forma de taula, tenim:

	alemany	anglès	francès	espanyol
Ángela	X	X		
Ulrike	X			X
Karin			X	X
Dieter	X		X	
Pierre		X	X	
Rocío		X		X

De les C_2^6 = 15 possibles parelles de dos estudiants (d'entre els sis estudiants triem dos. No importa l'ordre d'extracció i no es poden repetir elements) solament tres no poden entendre's (Ángela-Karin, Ulrike-Pierre i Dieter -Rocío). Per tant, la probabilitat sol·licitada és:

$$\frac{\text{casos favorables}}{\text{casos posibles}} = \frac{15-3}{15} = \frac{12}{15} = \frac{4}{5}$$

Gener 3: Siga N el menor enter positiu els dígits del qual sumen 2020. Quin és el major factor primer de N+1?

Solució: Ja que:

$$\begin{array}{r|l} 2020 & 9 \\ \hline 4 & 224 \end{array}$$

tenim que el menor número amb suma de xifres 2020, és N = $4\underbrace{999\cdots\cdots 9}_{224}$. Per tant:

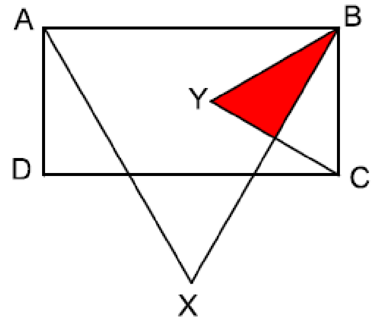
$$N+1 = 5\underbrace{000\cdots\cdots 0}_{224} = 5^{225}\cdot 2^{224}$$

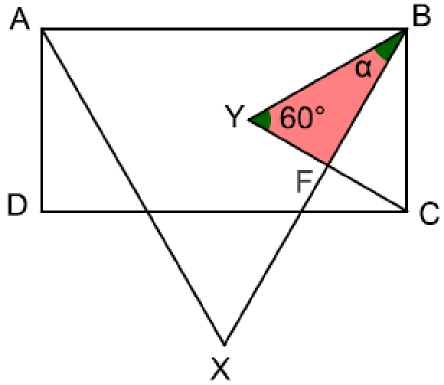
per el que la contestació al problema és 5

Gener 4-5: Una caixa té 900 targetes cadascuna numerada amb un número des del 100 fins al 999. Aitana extraurà de la caixa algunes targetes i apuntarà la suma dels dígits dels números. Quantes targetes ha d'extraure com a mínim per a poder garantir que prendrà almenys tres d'elles amb la mateixa suma de dígits?

Solució: En total hi ha 27 possibles sumes de dígits: des de suma 1 (targeta 100) fins a suma 27 (targeta 999). D'aquestes sumes, suma 1 només consta d'un element (targeta 100), suma 2 consta de dos elements (targeta 101 i targeta 110) i suma 27 només consta d'un element (targeta 999), totes les altres 24 sumes tenen tres o més elements (per exemple suma 26 consta de targeta 998, targeta 989 i targeta 899; suma 4 consta de targeta 112, targeta 121, targeta 211, targeta 220, targeta 202, targeta 301, targeta 310, targeta 130, targeta 400). Per a assegurar que tenim tres targetes amb la mateixa suma de dígits haurem d'extraure 2·24 + 1 + 2 + 1 + 1 = 53 targetes. (2·24 seria degut a extraure dues targetes de cada suma amb tres o més targetes; 1 + 2 + 1 seria degut a extraure les targetes amb suma 1, suma 2 i suma 27; l'últim 1 seria degut a extraure una targeta de les de suma amb tres o més targetes)

<u>Gener 6-7:</u> En la figura, ABCD és un rectangle amb AB = a i BC = b. Els triangles ΔXAB i ΔYBC són equilàters. Trobar àrea i perímetre del triangle ombrejat





<u>Solución:</u> En ser ΔBYC un triangle equilàter, l'angle ∠BYC i l'angle ∠YBC mesuren 60°. Siga α l'angle ∠YBF. En ser ΔABX equilàter ∠ABX = ∠YBC = 60°. D'ací: ∠ABY = ∠ABX - α = 60° - α. Com ABCD és rectangle:

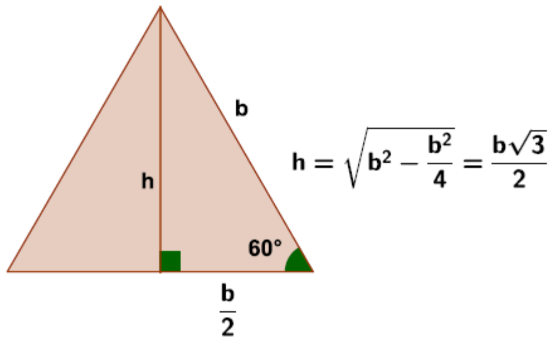
∠ABC = 90° = ∠ABY + ∠YBC = 60° - α + 60° ⇒ α = 30°

Per tant, ΔBYF és un triangle 30°-60°-90°

Per a concloure:

$$A_{\Delta BYF} = \frac{\frac{b}{2}\cdot\frac{b\sqrt{3}}{2}}{2} = \frac{b^2\cdot\sqrt{3}}{8}$$

$$P_{\Delta BYF} = b + \frac{b}{2} + \frac{b\sqrt{3}}{2} = \frac{b\left(3+\sqrt{3}\right)}{2}$$



<u>Gener 8:</u> La suma de 35 enters positius és S. Intercanviem dos dígits d'un d'ells i la nova suma dels 35 enters positius és T. Demostrar que S – T és múltiple de 9

<u>Solució:</u> Siga $S = z_1 + z_2 + \cdots + z_k + \cdots + z_{35}$ on z_k és l'enter positiu al qual intercanviem dos dels seus dígits, generant z_k^*. Llavors si

$$z_k = a_n\cdot 10^n + a_{n-1}\cdot 10^{n-1} + \cdots + a_j\cdot 10^j + \cdots + a_i\cdot 10^i + \cdots + a_1\cdot 10 + a_0$$

tindrem que

$$z_k^* = a_n\cdot 10^n + a_{n-1}\cdot 10^{n-1} + \cdots + a_i\cdot 10^j + \cdots + a_j\cdot 10^i + \cdots + a_1\cdot 10 + a_0$$

per la qual cosa:

$$S - T = z_k - z_k^* = \left(a_j - a_i\right)\cdot 10^j + \left(a_i - a_j\right)\cdot 10^i = \left(a_j - a_i\right)\cdot\left(10^j - 10^i\right)$$
$$= 10^i\cdot\left(a_j - a_i\right)\cdot\left(10^{j-i} - 1\right)$$

Però, $10^{j-i} - 1$ es múltiple de 9, ja que els seus dígits són j – i nous. Per tant, S – T és múltiple de 9

<u>Gener 9:</u> Els vèrtexs d'un enneàgon regular estan numerats des de l'1 al 9. Quantes diagonals existeixen de manera que les xifres situada en els seus extrems formen un número de dos xifres múltiple de tres?

<u>Solució:</u> N'hi ha prou amb comptar els números de dues xifres diferents (cap d'elles nul·la) tals que la suma d'aquestes siga múltiple de tres:

12 (21), 15 (51), 18 (81), 24 (42), 27 (72), 36 (63), 39 (93), 45 (54), 48 (84), 57 (75), 69 (96), 78 (87)

I ara llevem les que tinguen els dígits consecutius (que corresponen a costats i no a diagonals):

12 (21), 45 (54), 78 (87)

En total, (12 – 3 =) 9 diagonals generen nombres de dues xifres múltiples de tres.

<u>Gener 10:</u> Troba els capicues de quatre xifres divisibles entre 15.

<u>Solució:</u> Ens pregunten pels números abba tals que abba $= \dot{\widehat{15}}$. Degut a que 15 = 3·5, tindrem que abba $= \dot{\hat{5}} \quad \Rightarrow \quad a = 5$ ja que $a \neq 0$. Deurem exigir que $5bb5 = \dot{\hat{3}}$ i que, per tant, $10 + 2b = \dot{\hat{3}}$. Com el màxim valor possible de b és 9 i el menor valor possible de b és 0: $10 \leq 10 + 2b \leq 28$

10 + 2b = 12	b=1 $\Rightarrow$ 5115
10 + 2b = 15	$b \notin \mathbb{N}$
10 + 2b = 18	b=4 $\Rightarrow$ 5445
10 + 2b = 21	$b \notin \mathbb{N}$
10 + 2b = 24	b=7 $\Rightarrow$ 5775
10 + 2b = 27	$b \notin \mathbb{N}$

Els capicues que compleixen l'enunciat són: 5115, 5445 y 5775

<u>Gener 11:</u> Trobeu b si:

$$\sum_{k=1}^{10} \log_b 10^k = 110$$

<u>Solució:</u> Tenim, al aplicar les propietats de la funció logarítmica i potències:

$$\sum_{k=1}^{10} \log_b 10^k = 110 = \log_b \left(\prod_{k=1}^{10} 10^k \right) = \log_b 10^{\sum_{k=1}^{10} k}$$

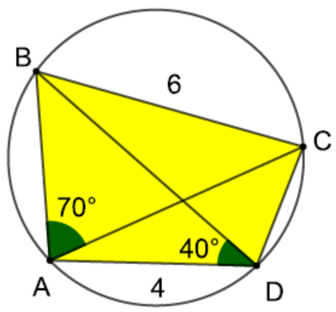
i com:

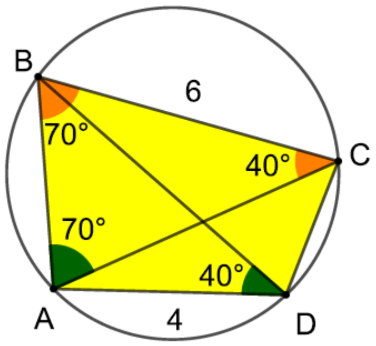
$$\sum_{k=1}^{10} k = \left\{ \begin{matrix} \text{suma dels 10 primers tèrmes} \\ \text{de la PA amb } d = 1 \text{ i } a_1 = 1 \end{matrix} \right\} = \frac{(1+10)}{2} \cdot 10 = 55$$

tindrem:

$$110 = \sum_{k=1}^{10} \log_b 10^k = \log_b 10^{55} = 55.\log_b 10 \;\Rightarrow 2 = \log_b 10 \;\Rightarrow\; b^2 = 10 \;\Rightarrow\; b = \sqrt{10}$$

Gener 12-19: En una circumferència inscrivim un quadrilàter ABCD en el que ∠BAC = 70°, ∠ADB = 40°, AD = 4 i BC = 6. Calculeu AC





Solució: 40° = ∠ADB =∠ACB (per ser àngels inscrits que abarquen el mateix arc: $\widehat{AB}$). I ara, en ΔACB, tenim: ∠ABC = 180° - (70° + 40°) = 70°. Per tant, ΔABC es isòsceles. I d'ací AC = BC =6

Gener 13-20: Es té una moneda trucada en la qual la probabilitat de traure cara en un llançament és ¼. Trobar el número n de manera que en llançar n vegades la moneda es té la mateixa probabilitat d'obtindre dues cares que la d'obtindre tres cares.

Solució: Si es llança n vegades la moneda en la que p = P(obtenir cara) = ¼ se està realitzant un experiment Bi (n; ¼). Se ens demana calcular n per a que P(obtenir 2 èxits) = P(obtenir 2 cares) = P(obtenir 3 èxits) = P(obtenir tres cares). Tenim:

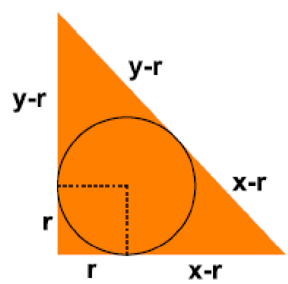
$$\left.\begin{matrix}\text{P(obtenir dues cares)}\\ || \\ \text{P(obtenir tres cars)}\end{matrix}\right\} \left.\begin{matrix}\binom{n}{2}\left(\frac{1}{4}\right)^2\left(\frac{3}{4}\right)^{n-2}\\ || \\ \binom{n}{3}\left(\frac{1}{4}\right)^3\left(\frac{3}{4}\right)^{n-3}\end{matrix}\right\} \left.\begin{matrix}\frac{n(n-1)}{2}\cdot\frac{3^{n-2}}{4^n}\\ || \\ \frac{n(n-1)(n-2)}{6}\cdot\frac{3^{n-3}}{4^n}\end{matrix}\right\} \Rightarrow 3^{n-2} = \frac{n-2}{3}\cdot 3^{n-3}$$

$$\Rightarrow \frac{3^{n-1}}{3^{n-3}} = n-2 \Rightarrow 3^2 = n-2 \Rightarrow n = 11$$

Gener 14: Les longituds dels catets d'un triangle rectangle són x i y, i la hipotenusa x + y – 4. Trobeu el radi de la circumferència inscrita

Solució 1 (Néstor Abad @nabadvin): En aplicar que les dues tangents a una circumferència des d'un punt exterior a ella tenen la mateixa longitud, tindrem que la longitud de la hipotenusa és d'una banda x + y – 4 i per un altre (y – r) + (x – r); d'ací que:

$$x + y - 4 = (x - r) + (y - r) \Rightarrow -4 = -2r \Rightarrow r = 2$$



<u>Solució 2:</u> Aplicarem que l'àrea d'un triangle és, d'una banda, la meitat del producte de base i altura, i d'altra banda, el producte del semi perímetre i el radi de la circumferència inscrita.

$$\frac{x\cdot y}{2}=\frac{x+y+x+y-4}{2}\cdot r \;\Rightarrow\; r=\frac{x\cdot y}{2(x+y-2)} \quad (*)$$

Al ser el triangle rectangle, se compleix el teorema de Pitàgores, per tant:

$$x^2+y^2=(x+y-4)^2 \;\Rightarrow\; x\cdot y=4x+4y-8=4(x+y-2)$$

I substituint en (*)

$$r=\frac{x\cdot y}{2(x+y-2)}=\frac{4(x+y-2)}{2(x+y-2)}=\frac{4}{2}=2$$

<u>Gener 15:</u> Trobeu el nombre de solucions reals que té l'equació:

$$x^5+2x^3+8x^2+16=0$$

<u>Solució (@M1GU3L_HH):</u> Dels dos primers sumands traiem factor comú x^3 i dels dos últims sumands traiem factor comú 8 (factorització per agrupació). Amb això:

$$x^5+2x^3+8x^2+16=x^3(x^2+2)+8(x^2+2)=(x^3+8)(x^2+2)=0 \;\Rightarrow\; \begin{cases} x=\sqrt[3]{-8}=-2 \\ x^2=-2 \;\Rightarrow x\notin\mathbb{R} \end{cases}$$

Per tant, l'equació només té una solució real.

<u>Solució 2:</u> El valor x = - 2 és una arrel de l'equació, i dividint tenim:

$$x^5+2x^3+8x^2+16=(x+2)(x^4-2x^3+6x^2-4x+8)$$

Ací ja podem observar que no hi ha més arrels reals, perquè el polinomi original només admet arrels negatives (pel teorema dels signes de Descartes) però el divisor de quart grau només admetria arrels positives (pel teorema dels signes de Descartes). Per tant, no hi ha més arrels reals.

Regla dels signes de Descartes: si els termes d'un polinomi amb coeficients reals es col·loquen en ordre descendent de grau; llavors el nombre d'arrels positives del polinomi és o igual al nombre de canvis de signe o menor per una diferència parell. És important precisar que aquesta regla no proporciona el nombre exacte d'arrels del polinomi ni tampoc identifica les arrels del polinomi.

<u>Gener 16:</u> Quin és el número factorial més xicotet que és divisible per 3^{29}?

<u>Solució:</u> Recordem que si $n^k\le m$ y $n^{k+1}>m$ l'exponent del factor n en la descomposició factorial de m! és:

$$E(n,m!)=\left\lfloor\frac{m}{n}\right\rfloor+\left\lfloor\frac{m}{n^2}\right\rfloor+\dots+\left\lfloor\frac{m}{n^k}\right\rfloor$$

Per exemple, l'exponent del factor 2 en 23! és:

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23
	2		2		2		2		2		2		2		2		2		2		2	
			2				2				2				2				2			
							2								2							
															2							

$$E(2,23!)=\left\lfloor\frac{23}{2}\right\rfloor+\left\lfloor\frac{23}{2^2}\right\rfloor+\left\lfloor\frac{23}{2^3}\right\rfloor+\left\lfloor\frac{23}{2^4}\right\rfloor=11+5+2+1=19$$

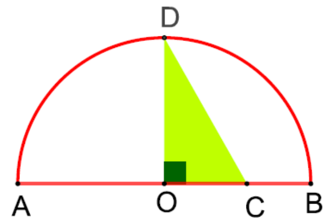
Respecte del problema, com:

$$E(3,63!) = \left\lfloor\frac{63}{3}\right\rfloor + \left\lfloor\frac{63}{3^2}\right\rfloor + \left\lfloor\frac{63}{3^3}\right\rfloor + \left\lfloor\frac{63}{3^4}\right\rfloor = 21 + 7 + 2 + 0 = 30$$

$$E(3,62!) = \left\lfloor\frac{62}{3}\right\rfloor + \left\lfloor\frac{62}{3^2}\right\rfloor + \left\lfloor\frac{62}{3^3}\right\rfloor + \left\lfloor\frac{62}{3^4}\right\rfloor = 20 + 6 + 2 + 0 = 28$$

tindrem que la contestació al problema es 63!

Gener 17-18: En la figura adjunta, O es el centre de la semicircumferència i OD⊥AB. Si AC = a i CB = b, trobeu DC en funció de a i de b



Solució: Si r és el radi de la semicircumferència, tenim:

$$OD = r = \frac{a+b}{2}, \qquad OC = r - b = \frac{a+b}{2} - b = \frac{a-b}{2}$$

I, en aplicar Pitàgores al triangle ΔODC:

$$DC = \sqrt{OD^2 + OC^2} = \sqrt{\left(\frac{a+b}{2}\right)^2 + \left(\frac{a-b}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}$$

Gener 21: Trobeu el menor natural, n, que verifica:

$$\sum_{k=1}^{n} \log k > 10$$

Solució: Tindrem, aplicant propietats de la funció logaritme i la seua definició:

$$\sum_{k=1}^{n} \log k = \log\left(\prod_{k=1}^{n} k\right) = \log(n!) > 10 \iff n! > 10^{10}$$

Per descomptat n ha de ser major que 10. Per tanteig:

$$13! = 2^{10} \cdot 3^5 \cdot 5^2 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13 = 6227020800 < 10^{10}$$

$$14! = 2^{11} \cdot 3^5 \cdot 5^2 \cdot 7^2 \cdot 11 \cdot 13 = 6227020800 \cdot 14 > 10^{10}$$

Per tant, la contestació és n = 14.

Gener 22-23: En una caixa hi ha dues boles roges, dos verds i dues grogues, d'igual grandària. Aitana agafa dues boles sense reemplaçament i després Dani tria altres dos sense reemplaçament de les quals queden. Quina és la probabilitat que després de les dues extraccions queden en la caixa dues boles del mateix color?

Solució 1 (Ignacio Larrosa Cañestro): Després de las dues extraccions queden C_2^6 = 15 parells de boles, dels quals únicament 3 són del mateix color. Per tant, la probabilitat sol·licitada és:

$$\frac{\text{casos favorables}}{\text{casos possibles}} = \frac{3}{15} = \frac{1}{5}$$

<u>Solució :</u> Vegem en primer lloc la probabilitat que, després de les dues extraccions, queden les dues boles grogues. Quedaran dues boles grogues si les quatre anteriors extraccions cap és groga. Aquesta probabilitat és:

$$P(\overline{A}_1 \cap \overline{A}_2 \cap \overline{A}_3 \cap \overline{A}_4) = \frac{4}{6} \cdot \frac{3}{5} \cdot \frac{2}{4} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{15}$$

La mateixa probabilitat, és la probabilitat que queden dues boles roges o la probabilitat que queden dues boles verdes. Per tant, la probabilitat demanada és:

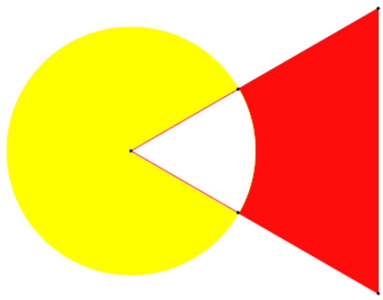
$$3 \cdot \frac{1}{15} = \frac{1}{5}$$

<u>Gener 24:</u> En el conjunt {-1, -2, -3, -4, -5} triem quatre números diferents: a, b, c i d. Quin és el major valor possible de l'expressió: $a^b + c^d$?

<u>Solució:</u> Els exponents han de ser parells perquè les corresponents potències siguen positives. El valor més xicotet que poden aportar les bases correspon a -5. Així que {a, b, c, d} = {-1, -2, -3 -4} amb {b, d} = {-2, -4}. Prenent a = -1 i b = -4, tenim:

$$(-1)^{-4} + (-3)^{-2} = 1 + \frac{1}{9} = \frac{10}{9}$$

<u>Gener 25-26:</u> El centre d'un cercle de radi 2 és alhora vèrtex d'un triangle equilàter de costat 4, quina és la diferència entre l'àrea de la regió interior al cercle, però exterior al triangle i l'àrea de la regió interior al triangle, però exterior al cercle?



<u>Solució:</u> Si designem per C l'àrea del cercle, per T l'àrea del triangle i per S l'àrea del sector de 60° d'amplitud, tenim:

$$C = 4\pi, \quad T = \frac{4^2\sqrt{3}}{4} = 4\sqrt{3}, \quad S = \frac{1}{6} \cdot 4\pi = \frac{2}{3}\pi$$

La diferència sol·licitada en l'enunciat és:

$$(C - S) - (T - S) = C - T = 4\pi - 4\sqrt{3} = 4\left(\pi - \sqrt{3}\right)$$

<u>Gener 27:</u> El número 3 pot escriure's com a suma de dues o més naturals de tres formes diferents: 2+1, 1+2, 1+1+1. De quantes formes diferents pot escriure's el 5?

<u>Solució:</u> Per a obtindre el total de formes de descomposició de 5 com a suma de sumands sencers positius, podem raonar de la següent manera: Cal col·locar un, dos, tres o quatre signes més en els espais entre uns: 1_1_1_1_1. Els uns que no tenen signe entre ells s'agrupen sumant-se. Per exemple, amb un sol signe més hi ha quatre possibilitats diferents:

1+1_1_1_1 = 1+4;   1_1+1_1_1 = 2+3,   1_1_1+1_1 = 3+2;   1_1_1_1+1 =4+1

Això és combinacions de 4 elements (els espais entre uns) presos d'1 en 1

$$\binom{4}{1} = 4$$

Amb dos signes més hi ha (combinacions de 4 elements presos de 2 en 2)

$$\binom{4}{2} = 6$$

Amb tres signes més hi ha (combinacions de 4 elements presos de 3 en 3)

$$\binom{4}{3} = 4$$

Amb quatre signes més hi ha (combinacions de 4 elements presos de 4 en 4)

$$\binom{4}{4} = 1$$

En total són: 4 + 6 + 4 + 1 =15.

També podríem haver calculat:

$$\sum_{k=1}^{4} \binom{4}{k} = \sum_{k=0}^{4} \binom{4}{k} - 1 = 2^4 - 1 = 15$$

<u>Gener 28-29:</u> Per a cada nombre compost n definim r(n) com la suma dels factors en la descomposició factorial en factors primers de n. Per exemple, r(50) = 12 ja que $50 = 2 \cdot 5^2$ i 2 + 5 + 5 = 12. Quins són els valors que pren r(n)?

<u>Solució:</u> Vegam que qualsevol nombre natural superior a tres està en el recorregut de la funció:

Si a és parell, definim el número $n = 2^{a/2}$, i llavors:

$$r(n) = \overbrace{2 + 2 + \cdots + 2}^{a/2} = 2 \cdot \frac{a}{2} = a$$

Si a és imparell, definim $n = 2^{(a-3)/2} \cdot 3$, i aleshores:

$$r(n) = \overbrace{2 + 2 + \cdots + 2}^{(a-3)/2} + 3 = 2 \cdot \frac{a-3}{2} + 3 = a$$

Així doncs, qualsevol enter major que 3 pertany al recorregut de la funció. No obstant això 1, 2 i 3 no .No estan perquè si r(n) = 1, r(n) = 2 o r(n) = 3, tindrem que n no és compost.

<u>Gener 30:</u> Resolgueu l'equació:

$$\mathbf{\frac{1}{\log_2 a} + \frac{1}{\log_3 a} + \frac{1}{\log_4 a} = 1}$$

<u>Solució:</u> Com

$$\log_b c = \frac{1}{\log_c b}$$

l'equació la podem escriure com:

$$\log_a 2 + \log_a 3 + \log_a 4 = 1$$

Aplicant propietats de la funció logaritme, tenim:

$$\log_a 2 + \log_a 3 + \log_a 4 = \log_a(2 \cdot 3 \cdot 4) = \log_a(24) = 1 \iff a^1 = a = 24$$

<u>Gener 31:</u> Trobeu els valors d'a què fan que

$x^2 - ax + 2a$

tinga sols arrels enteres.

Solució: Si x_1 y x_2 són les arrels del polinomi ha de verificar-se que:

$$x_1 + x_2 = a \text{ i } x_1 \cdot x_2 = 2a = 2(x_1 + x_2) \quad \Rightarrow \quad x_1 \cdot (x_2 - 2) = 2x_2$$

Si $x_2 = 2$, tindríem en l'última igualtat: 0 = 4 que és un absurd, per tant: $x_2 \neq 2$, i llavors:

$$x_1 = \frac{2x_2}{x_2 - 2} = 2 + \frac{4}{x_2 - 2}$$

I com les arrels han de ser enteres, $x_2 - 2$ deu ser un divisor de 4, es dir ±1, ±2 o ±4.

Si $x_2 - 2 = 1 \quad \Rightarrow \quad x_1 = 6 \text{ i } x_2 = 3 \quad \Rightarrow \quad a = 9$

Si $x_2 - 2 = -1 \quad \Rightarrow \quad x_1 = -2 \text{ i } x_2 = 1 \quad \Rightarrow \quad a = -1$

Si $x_2 - 2 = 2 \quad \Rightarrow \quad x_1 = 4 \text{ i } x_2 = 4 \quad \Rightarrow \quad a = 8$

Si $x_2 - 2 = -2 \quad \Rightarrow \quad x_1 = 0 \text{ i } x_2 = 0 \quad \Rightarrow \quad a = 0$

Si $x_2 - 2 = 4 \quad \Rightarrow \quad x_1 = 3 \text{ i } x_2 = 6 \quad \Rightarrow \quad a = 9$

Si $x_2 - 2 = -4 \quad \Rightarrow \quad x_1 = 1 \text{ i } x_2 = -2 \quad \Rightarrow \quad a = -1$