SOLUCIONS FEBRER 2020

PROBLEMES PER A PRIMER CICLE DE L'ESO. COLECCIÓ REALITZADA PER JOSÉ COLÓN PER A LA PREPARACIÓ DE LES OLIMPIADES DE LA FESPM EN 2002-2003

Febrer 1-2: Dos ciclistes que estan a una distància de 60 km entre si, s'acosten a una velocitat de 10 km/h cadascun, en un tram recte de carretera. Una mosca parteix del primer ciclista i va cap a l'altre ciclista a 30 km/h. Una vegada ha arribat al segon ciclista, parteix immediatament cap al primer ciclista i així successivament fins que els ciclistes es troben. Quants quilòmetres recorre la mosca?

Solució: Si v_A (v_B) és la velocitat del ciclista que ix de A (B), la velocitat d'aproximació dels dos ciclistes és $v_{A+B} = v_A + v_B$ = (10 + 10 =) 20 km/h. Per tant, tarden en trobar-se:

$$t_{A+B} = \frac{60}{v_{A+B}} = \frac{60}{20} = 3 \text{ h}$$

En eixes tres hores, la mosca recorre:

$$e_m = v_m \cdot t = 30 \cdot 3 = 90 \text{ km}$$

Febrer 3-4: Un lladre, un cabàs de taronges va robar, i entre els horts va escapar. En votar una tanca, la meitat més mitja va perdre. Perseguit per un gos, la meitat menys mitja, va abandonar. Va entropessar en una corda, la meitat més mitja va escampar. En el seu cau, dues dotzenes va guardar. Quantes taronges va robar el lladre?

Solució 1 (marxa endavant): Si x = nombre de taronges robades, tenim:

activitat	perd	li queden
bota la tanca	$\frac{x+1}{2}$	$\frac{x-1}{2}$
gos	$\frac{1}{2}\frac{x-1}{2} - \frac{1}{2} = \frac{x-3}{4}$	$\frac{x+1}{4}$
corda	$\frac{1}{2}\frac{x+1}{4} + \frac{1}{2} = \frac{x+5}{8}$	$\frac{x-3}{8}$

D'ací, que:

$$\frac{x-3}{8} = 24 \quad \Rightarrow \quad x = 195$$

Solució 2 (marxa enrere): Al final té 24 taronges. D'ací que 24 siga la meitat de les que tenia abans de la corda menys mitja. Per tant, la meitat de les que tenia abans eren 24,5. Es adir, abans de la corda tenia 49 taronges. 49 eren la meitat de les taronges que tenia abans del gos menys mitja. Per tant, abans del gos tenia (48,5·2 =)97 taronges. 97 és la meitat que tenia abans del salt menys mitja. Per tant, la meitat de les taronges que tenia, abans de saltar la tanca, eren 97,5. D'ací, abans de saltar la tanca tenia (97,5·2 =) 195 taronges.

Febrer 5-6: L'any que Laia va complir 10 anys, Dani havia festejat el seu aniversari, un divendres, Aitana un dissabte, Joan un diumenge, Pau un dimecres i Clara un dimarts. Laia va anotar les dates en desordre: 5 de maig, 18 de juny, 26 de juny, 25 de maig i 4 d'abril. Quina és la data de l'aniversari d'Aitana?

Solució: Imaginem que el 4 d'abril és el dia x de la setmana, llavors:

x	x+1	x+2	x+3	x+4	x+5	x+6	
4							
11							abril (30)
18							
25					30		
2			**5**				
			12				maig (31)
			19				
		25	26				
	31	1					
		8					juny (30)
		15			**18**		
					25	**26**	

Els dies que no hi ha aniversaris són (dilluns i dijous): x + 1 y x + 4.

Si suposem que els dies x + 4 són dilluns llavors els dies x són dijous, en particular el 4 d'abril hi ha un aniversari i és dijous i això contradiu l'enunciat. Per tant, necessàriament els dies x + 1 són dilluns i llavors:

x + 2 és dimarts $\Rightarrow$ el dimarts 25 de maig, compleix anys Clara.

x + 3 és dimecres $\Rightarrow$ el dimecres 5 de maig, compleix anys Pau.

x + 5 és divendres $\Rightarrow$ el divendres 18 de juny, compleix anys Dani.

x + 6 és dissabte $\Rightarrow$ el dissabte 26 de juny, compleix anys Aitana.

x és diumenge $\Rightarrow$ el diumenge 4 de abril, compleix anys Joan.

La contestació al problema és: Aitana compleix anys el 26 de juny.

Febrer 7-8: Un depòsit té una aixeta d'ompliment i un altre de buidatge. Sabem que l'aixeta d'ompliment compleix la seua comesa quan està obert durant 12 hores i que, si el depòsit està ple i oberts les aixetes d'ompliment i buidatge, aquest es buida en 8 hores. En quant temps es buidarà si l'aixeta d'ompliment està tancat?

Solució: Siga v_g la velocitat d'ompliment de l'aixeta d'ompliment, tenim (prenent com a unitat de volum d'aigua la capacitat del depòsit):

$$v_g = \frac{1}{12}$$

En 8 hores l'aixeta d'ompliment aboca en el depòsit 8/12 la capacitat del depòsit. Per tant, si v_v és la velocitat de buidatge de l'aixeta de buidatge, tenim:

$$v_v = \frac{1 + {}^{8}\!/_{12}}{8} = \frac{20}{12 \cdot 8} = \frac{1}{\frac{12 \cdot 8}{20}} = \frac{1}{4{,}8} = \frac{1}{4\text{h } 48'}$$

I, per tant, si el depòsit està ple i obrim l'aixeta de buidatge, est, es buidarà en 4h 48’

<u>Febrer 10:</u> Dani es menjava els trossos de 2 salsitxes en 6 minuts, Laia en 9 minuts i Aitana en 18 minuts. Quant tardarien a menjar-se els trossos de 3 salsitxes entre els tres si cadascun menjara al seu ritme?

<u>Solució:</u> Podem definir la velocitat de menjar salsitxes de cada personatge pel quocient de dividir el nombre de salsitxes que es menja cadascun pel temps que tarda (en minuts) a menjar-se-les. Amb això tenim que la velocitat de Dani (dues salsitxes en sis minuts) és $v_D=2/6$, la de Laia (dues salsitxes en nou minuts) és $v_L=2/9$ i la d'Aitana (dues salsitxes en díhuit minuts) és $v_A=2/18$. Si els tres mengen junts llavors la velocitat conjunta és

$$\frac{2}{6}+\frac{2}{9}+\frac{2}{18}=\frac{2}{3}$$

és a dir, els tres es mengen dues salsitxes en tres minuts. És a dir, els tres es mengen una salsitxa en un minut i mig. Per tant, tardaran (1,5·3 =) quatre minuts i mig a menjar-se conjuntament (1·3 =) tres salsitxes.

<u>Febrer 11-12:</u> Es generen 3 números de 3 xifres cadascun d'ells a partir dels dígits 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 i 9 sense repetir cap. És possible que el segon número siga dues vegades el primer i el tercer siga triple que el primer?

<u>Solució:</u> Busquem col·locar els dígits 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 i 9 sense repetir cap, en una matriu 3x3 de manera que cada fila genere un número N_1, N_2 i N_3 que complisquen: $N_2 = 2 \cdot N_1$ i $N_3 = 3 \cdot N_1$

	centenes	desenes	unitats
$N_1 \rightarrow$			
$N_2 \rightarrow$			
$N_3 \rightarrow$			

Els aspirants a columnes són:

1	2	3	4	~~5~~	6	7	8	9
2	4	6	8	~~(1)0~~	(1)2	(1)4	(1)6	(1)8
3	6	9	(1)2	~~(1)5~~	(1)8	(2)1	(2)4	(2)7

(La columna encapçalada pel 5 no s'adequa a les condicions de l'enunciat)

Amb major precisió: les tres primeres columnes són aspirants a la columna de centenes perquè totes les altres en portar cel·les amb més d'un dígit generarien números de quatre xifres. Les altres columnes són aspirants a la columna d'unitats (Les xifres entre parèntesis "s'emporten" a la columna de desenes)

La columna de centenes 1-2-3 és incompatible amb la columna d'unitats 4-8-(1)2 (repeteix el 2), és incompatible amb la columna d'unitats 6-(1)2-(1)8 (repeteix el 2), és incompatible amb la columna d'unitats 7-(1)4-(2)1 (repeteix el 1). Si proposem la columna de centenes 1-2-3 i la columna d'unitats 8-(1)6-(2)4 faltarien col·locar els dígits 5, 7 i 9 però cap d'ells col·locat en la primera posició de desenes fa complir-se $N_2 = 2 \cdot N_1$. Si proposem la columna de centenes 1-2-3 i la columna d'unitats 9-(1)8-(2)7 faltarien col·locar els dígits 4, 5 i 6 però cap d'ells col·locat en la primera posició de desenes fa complir-se $N_2 = 2 \cdot N_1$.

La columna de centenes 2-4-6, és incompatible amb la columna d'unitats 4-8-(1)2 (repeteix el 4), és incompatible amb la columna d'unitats 6-(1)2-(1)8 (repeteix el 2), és incompatible amb la columna d'unitats 7-(1)4-(2)1 (repeteix el 4), és incompatible amb la columna d'unitats 8-(1)6-(2)4 (repeteix el 4). Si proposem la columna de centenes 2-4-6 i la columna d'unitats 9-(1)8-(2)7 faltarien col·locar els dígits 1, 3 i 5 però només l'1 col·locat en la primera posició de desenes fa complir-se $N_2 = 2 \cdot N_1$ i $N_3 = 3 \cdot N_1$

Una solució és:

2	1	9
4	3	8
6	5	7

La columna de centenes 3-6-9, és incompatible amb la columna d'unitats 6-(1)2-(1)8 (repeteix el 6), és incompatible amb la columna d'unitats 8-(1)6-(2)4 (repeteix el 6), és incompatible amb la columna d'unitats 9-(1)8-(2)7 (repeteix el 9). Si proposem la columna de centenes 3-6-9 i la columna d'unitats 4-8-(1)2 faltarien col·locar els dígits 1, 5 i 7 però cap d'ells col·locat en la primera posició de desenes fa complir-se $N_2 = 2 \cdot N_1$. Si proposem la columna de centenes 3-6-9 i la columna d'unitats 7-(1)4-(2)1 faltarien col·locar els dígits 2, 5 i 8 però només el 2 col·locat en la primera posició de desenes fa complir-se $N_2 = 2 \cdot N_1$ i $N_3 = 3 \cdot N_1$.

Una altra solució és:

3	2	7
6	5	4
9	8	1

<u>Febrer 13-14:</u> En l'IES "La Plana" s'ha organitzat un campionat d'escacs. Hi ha un equip format per José, Julia, Juana i Jaime i un altre format per Luís, Lidia, Leonardo i Lorena. Sabem que en les partides del segon dia es van enfrontar José amb Lídia i Jaime amb Lorena. El tercer dia les partides van ser: Juana amb Leonardo i Julia amb Lídia. I el quart dia les trobades van ser: Leonardo amb José i Luís amb Julia. Quines van ser les quatre partides del primer dia si cap parella es va enfrontar més d'una vegada i cada component es va enfrontar amb els altres quatre jugadors de l'equip contrari?

<u>Solució:</u> Per a resoldre el problema construirem una taula de doble entrada: en la primera fila estarà l'equip J: José, Julia, Juana i Jaime. En la primera columna estarà l'equip L: Luís, Lidia, Leonardo i Lorena.

En cada cel·la escriurem el dia en què l'alumne de la fila ha competit amb l'alumne de la columna. En negre estaran les dades proporcionades per l'enunciat. En l'última fila i última columna posarem els dies que falten per col·locar en cada fila o columna. Quan hagem col·locat en una fila o en una columna algun dia ratllarem eixe dia en l'última fila i en l'última columna.

Amb aquestes condicions ha de complir-se la condició (*): Ha d'haver-hi un únic 1, un únic 2, un únic 3 i un únic 4 en cada fila i en cada columna

Observem que en la columna José falten l'1 i el 3. Col·loquem en la primera cel·la el 3 i llavors en l'última cel·la col·locarem el 1. Ens fixem ara en la columna Julia, falta per col·locar en eixa columna un 1 i un 2. L'1 no pot estar en l'última cel·la d'eixa columna (perquè llavors hi hauria dues uns en la fila Lorena). Per tant, l'1 ha d'anar a la penúltima cel·la d'eixa columna i el 2 en l'última cel·la d'eixa columna. I ja hem arribat a una contradicció perquè en la fila Lorena hi ha dues dosos.

	José	Julia	Juana	Jaime	
Luís	3	4			1 2 ~~3~~
Lidia	2	3			1 4
Leonardo	4	1	3		~~1~~ 2
Lorena	1	2		2	1 3 4
	~~1~~ ~~3~~	~~1~~ ~~2~~	1 2 4	1 3 4	

Tornem a la columna José on falten l'1 i el 3. Col·loquem en la primera cel·la l'1 i llavors en l'última cel·la col·locarem el 3. Ens fixem ara en la columna Julia, falta per col·locar en eixa columna un 1 i un 2. L'1 ha d'estar en l'última cel·la d'eixa columna (perquè en cas contrari hi hauria dos uns en la fila Leonardo). Per tant, l'1 ha d'anar a l'última cel·la d'eixa columna i el 2 en la penúltima cel·la d'eixa columna. En la fila Leonardo col·loquem l'1 que falta i també col·loquem el 4 que falta en la fila Lorena. En la columna Juana falta col·locar un 2 i un 1. El 2 no pot anar en la fila Lídia (perquè hi hauria dues dosos en eixa fila), per tant, ha d'anar en la fila Luís. I ja tenim completada la taula (de manera òbvia)

	José	Julia	Juana	Jaime	
Luís	1	4	2	3	~~1~~ ~~2~~ ~~3~~
Lidia	2	3	1	4	~~1~~ 4
Leonardo	4	2	3	1	~~1~~ ~~2~~
Lorena	3	1	4	2	~~1~~ ~~3~~ 4
	~~1~~ ~~3~~	~~1~~ ~~2~~	~~1~~ ~~2~~ 4	~~1~~ ~~3~~ 4	

Per tant, el primer dia van jugar José amb Luís, Julia amb Lorena, Juana amb Lídia i Jaime amb Leonardo.

Febrer 15-16: En la meua calculadora una de les tecles de l'1 al 9 funciona malament: en estrényer-la apareix en la pantalla un dígit entre 1 i 9 que no és el que correspon. Quan vaig tractar d'escriure el número 987654321 va aparéixer en la pantalla un número divisible per 11 i que deixa residu 3 en dividir-lo per 9. Quina és la tecla descomposta? Quin és el número que va aparéixer en la pantalla?

Solució: Representarem per $\sum_i = \left(\sum_p =\right)$, la suma de les xifres que ocupen una posició imparell (parell). Tindrem:

$$987654321 \Rightarrow \begin{cases} \sum_{i} = 25 \\ \sum_{p} = 20 \end{cases} \Rightarrow \sum_{i} - \sum_{p} = 5 \text{ i deu ser 0 o 11}$$

Perquè el número siga divisible per 11:

a-1) Alguna xifra col·locada en lloc imparell baixa el seu valor 5 unitats o

a-2) Alguna xifra situada en lloc parell augmenta el seu valor 5 unitats o

b-1) Alguna xifra situada en lloc imparell puja 6 unitats o

b-2) Alguna xifra situada en lloc parell baixa 6 unitats.

Analitzem totes les possibilitats:

a-1) el 7 s'anota com 2 o el 9 s'anota com 4. Llavors:

$$\left.\begin{matrix} 982654321 \\ 487654321 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \begin{cases} \sum_{i} = 20 \\ \sum_{p} = 20 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \sum_{i} - \sum_{p} = 0 \text{ i } \sum_{i} + \sum_{p} = 40 \text{ i el número dona residu 4 al dividir} - \text{lo per 9}$$

a-2) el 2 s'anota com 7 o el 4 s'anota com 9. Llavors:

$$\left.\begin{matrix} 987654371 \\ 987659321 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \begin{cases} \sum_{i} = 25 \\ \sum_{p} = 25 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \sum_{i} - \sum_{p} = 0 \text{ y } \sum_{i} + \sum_{p} = 50 \text{ i el número dona residu 5 al dividir} - \text{lo per 9}$$

b-1) el 3 s'anota com 9 o l'1 s'anota com 7. Llavors:

$$\left.\begin{matrix} 987654921 \\ 987654327 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \begin{cases} \sum_{i} = 31 \\ \sum_{p} = 20 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \sum_{i} - \sum_{p} = 11 \text{ i } \sum_{i} + \sum_{p} = 51 \text{ i el número dona residu 6 al dividir} - \text{lo por 9}$$

b-2) el 8 s'anota com 2. Llavors:

$$927654321 \Rightarrow \begin{cases} \sum_{i} = 25 \\ \sum_{p} = 14 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \sum_{i} - \sum_{p} = 11 \text{ i } \sum_{i} + \sum_{p} = 39 \text{ i el número dona residu 3 al dividir} - \text{lo por 9}$$

Per tant, la xifra 8 s'anota com 2 i totes les altres s'anoten correctament. El número que va aparéixer en la pantalla és 927654321.

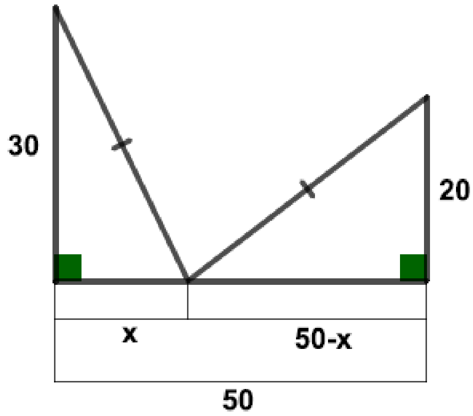
Febrer 17-18: A totes dues ribes d'un riu creixen dues palmeres, l'una enfront de l'altra. L'altura d'una és de 30 colzes, i l'altura de l'altra, 20 colzes. La distància entre els seus troncs, 50 colzes. En la copa de cada palmera hi ha un ocell. De sobte els dos ocells descobreixen un peix que apareix en la superfície de l'aigua, entre les dues palmeres. Els ocells, que volen a la mateixa velocitat es van llançar i van aconseguir el peix al mateix temps. A quina distància del tronc de la palmera major va aparéixer el peix?

Solució: Els segments assenyalats tenen la mateixa longitud, per tant, en aplicar Pitàgores als triangles rectangles de la figura:

$$\sqrt{x^2 + 30^2} = \sqrt{(50 - x)^2 + 20^2}$$

$$x^2 + 900 = 2500 - 100x + x^2 + 400$$

$$100x = 2900 - 900 = 2000 \quad \Rightarrow \quad x = 20$$



Febrer 19-20: Es construeix una llista de números amb les següents condicions:

a) El primer número és: 1

b) El segon és: 3

c) El tercer és el segon menys el primer

d) El quart és el tercer menys el segon

y així successivament. Calculeu els dotze primers nombres de la llista i calculeu raonadament el que apareix en la posició 905

Solució: Al escriure els primers membres de la llista, obtenim:

1, 3, 2, -1, -3, -2, 1, 3, 2, -1, -3, -2, 1, 3, 2, -1, -3, -2, ·······

Es a dir, hi ha un cicle (seqüència d'elements que es repeteix indefinidament) que és: 1, 3, 2, -1, -3, -2. Com:

$$\begin{array}{r|l} 905 & 6 \\ \hline 5 & 150 \end{array}$$

el número que apareix en la posició 905 és el quint terme del cicle, es a dir: -3

Febrer 21-22: Tres lladres A, B i C, es van repartir a parts iguals un botí compost per monedes. La primera nit, mentre C dormia, A i B li van llevar la meitat de les monedes que tenia, i se les van repartir a parts iguals. La segona nit, mentre A dormia, B i C li van llevar la meitat de les monedes que tenia, i se les van repartir a parts iguals. La tercera nit, mentre B dormia, A i C li van llevar la meitat de les monedes que tenia i se les van repartir a parts iguals. L'endemà es van separar. Quan B va comptar els seus diners tenia 10000 monedes. Determinar quantes monedes componien el botí i quantes corresponen a cada lladre.

Solució 1 (marxa avant): Tindrem el següent quadre:

	roben	primera nit C dorm	segona nit A dorm	tercera nit B dorm
A	$\frac{x}{3}$	$\frac{5x}{12}$	$\frac{5x}{24}$	$\frac{65x}{192}$
B	$\frac{x}{3}$	$\frac{5x}{12}$	$\frac{25x}{48}$	$\frac{25x}{96}$
C	$\frac{x}{3}$	$\frac{x}{6}$	$\frac{13x}{48}$	$\frac{77x}{192}$

Per últim:

$$\frac{25x}{96} = 10000 \quad \Rightarrow \quad x = 38400$$

$$A \ \rightarrow \ \frac{65 \cdot 38400}{192} = 13000; \ \ C \ \rightarrow \ \frac{77 \cdot 38400}{192} = 15400$$

Solució 2 (marxa enrere): Tindrem el següent quadre:

	roben	primera nit C dorm	segona nit A dorm	tercera nit B dorm
A	$\frac{9x}{4} - \frac{y}{2} - 8750$	$2(x - 5000)$	$x - 5000$	x
B	$23750 - \frac{x}{4} - \frac{y}{2}$	$22500 - \frac{x}{2}$	20000	10000
C	$2\left(y - \frac{x}{2} - 2500\right)$	$y - \frac{x}{2} - 2500$	$y - 5000$	y

Com les quantitats inicials, que tenien A, B i C, són iguals:

$$\frac{9x}{4} - \frac{y}{2} - 8750 = 23750 - \frac{x}{4} - \frac{y}{2} \quad \Rightarrow \quad x = 13000$$

$$\frac{9x}{4} - \frac{y}{2} - 8750 = 2\left(y - \frac{x}{2} - 2500\right) \quad \Rightarrow \quad y = 15400$$

Febrer 23: Si cada lletra representa un dígit i lletres diferents representen dígits diferents. Esbrineu qui són els quatre nombres primers:

AA – BAB – BACD - AAAC

Solució: L'únic nombre primer amb dues xifres iguals és l'11 (per tant, A = 1), ja que tots els altres números de dos dígits iguals són divisibles per 11. Amb això, la col·lecció queda:

11, B1B; B1CD, 111C

Ens fixem en B1B. Per descomptat $B \notin \{2, 4, 6, 8, 0\}$ perquè llavors B1B seria parell i per tant no primer i per descomptat $B \neq 1$ (= A). Per als altres valors possibles de B, tenim:

313 es primer; 515 es múltiple de 5, 717 es múltiple de 3 i 919 es primer.

Per tant, B = 3 o B = 9. D'on, la col·lecció queda:

$$11 \quad \begin{matrix} 313 \\ 919 \end{matrix} \quad \begin{matrix} 31CD \\ 91CD \end{matrix} \quad 111C$$

Ens fixem ara, en 111C. Per descomptat C no pot ser parell ni 1. Per als altres valors tenim:

1113 és múltiple de 3; 1115 és múltiple de 5, 1117 és primer i 1119 és múltiple de 3.

Per tant, A = 1, B = 3 o B = 9 i C = 7. La col·lecció queda:

$$11 \quad \begin{matrix} 313 \\ 919 \end{matrix} \quad \begin{matrix} 317D \\ 917D \end{matrix} \quad 1117$$

Per a D, altra vegada tenim que D no és parell (perquè llavors, el número seria divisible per 2), diferent de 1, diferent de 7 i diferent de 5 (perquè llavors, el número seria múltiple de 5). Per als demés valors tenim:

D = 3 $\Rightarrow$ 9173 és primer; D = 9 $\Rightarrow$ 3179 és múltiple de 11.

Per tant, necessàriament, D = 3 (i, per això; B $\neq$ 3). En resumen, A = 1; B = 9; C = 7 i D = 3, i la col·lecció queda:

11, 919, 9173 y 1117

Febrer 24: Utilitzant tots els dígits, del 0 al 9, sense repetir cap, forma dos números de 5 xifres, de manera que la diferència entre ells siga mínima (màxima)

Solució: Perquè els dos números generen la màxima diferència, el minuend ha de ser el major número possible de cinc xifres i el subtrahend ha de ser el més xicotet número de cinc xifres. Això és, el minuend ha de ser el 98765 i el subtrahend ha de ser el 10234, Així que la màxima diferència és:

$$\begin{array}{r} 9\;8\;7\;6\;5 \\ -\;1\;0\;2\;3\;4 \\ \hline 8\;8\;5\;3\;1 \end{array}$$

Perquè els números generen la mínima diferència han d'estar el més pròxims possible. És a dir, un ha de ser un cinquanta mil i poc (el més xicotet possible) i l'altre un quaranta-nou mil i molt (el més gran possible). Amb major precisió el minuend ha de ser el 50123 i el subtrahend el 49876. Així la mínima diferència serà:

$$\begin{array}{r} 5\;0\;1\;2\;3 \\ -\;4\;9\;8\;7\;6 \\ \hline 2\;4\;7 \end{array}$$

Febrer 25-26: En una tribu índia de l'Amazones, on encara subsisteix la barata, es tenen les següents equivalències: un collaret i una llança es canvien per un escut. Una llança es canvia per un collaret i un ganivet. Dos escuts es canvien per tres ganivets. Quants collarets equivalen a una llança?

Solució: De l'enunciat tenim:

collaret + llança = escut (T1)

llança = collaret + ganivet (T2)

2 escuts = 3 ganivets (T3)

I pregunten per quants collarets equivalen a una llança: llança = ? collarets

Doblant els objectes del (T1), tenim:

2 collarets + 2 llances = 2 escuts

I tenint en compte (T3)

2 collarets + 2 llances = 3 ganivets

Doblant el (T2)

2 collarets + 2 collarets + 2 ganivets = 3 ganivets

Es a dir

4 collarets = 1 ganivet

I, per últim, tenint en compte el (T2)

llança = collaret + 4 collarets = 5 collarets

<u>Febrer 27-28:</u> La clau per a obrir una caixa forta on es troben alguns documents secrets és el menor número que es pot dividir exactament per tots els números de l'1 al 9 De quin número es tracta?

<u>Solució:</u> Òbviament la clau per a obrir la caixa forta és el mcm (1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9) = $2^3 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7 = 2520$

<u>Febrer 29:</u> El producte de la dreta està ben calculat. Si lletres diferents representen dígits diferents, de quins números es tracta?

$$\begin{array}{ccccc} A & B & C & D & E \\ & & & X & 4 \\ \hline E & D & C & B & A \end{array}$$

<u>Solució:</u> Fixant-nos en la primera i última multiplicació per 4 tindrem les equacions adjuntes, on entre parèntesis escrivim les possibles desenes i com una columna les possibles unitats "que portem"

$$4 \cdot \mathrm{E} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \mathrm{A}\ (*)$$

De l'última equació (**) tenim que A = 1, 2 perquè per a A>2 tenim que 4·A té dos dígits, en contra que només tinga un

$$4 \cdot \mathrm{A} + \begin{matrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{matrix} = \mathrm{E}\ (**)$$

Si A = 1, tindrem en l'equació (*)

$$4 \cdot \mathrm{E} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} 1 = \begin{matrix} 1 \\ 11 \\ 21 \\ 31 \end{matrix}$$

que no és possible perquè d'una banda tenim parells i per l'altra imparells

Si A = 2, tindrem en l'equació (**)

$$4 \cdot 2 + \begin{matrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{matrix} = 8 + \begin{matrix} 0 \\ 1 \end{matrix} = \mathrm{E} = \begin{matrix} 8 \\ 9 \end{matrix}$$

Si E = 9, en (*), tindrem 4·9 = 36 ⇒ A = 2 = 6. Per tant E = 8

D'on la multiplicació queda:

$$\begin{array}{ccccc} & & & {\scriptstyle 3} & \\ 2 & B & C & D & 8 \\ & & & \times & 4 \\ \hline 8 & D & C & B & 2 \end{array}$$

De la segona i quarta multiplicació per 4 tindrem les equacions adjuntes, on entre parèntesis escrivim les possibles desenes i com una columna les possibles unitats "que portem".

$$4 \cdot D + 3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} B \ (****)$$

De l'última equació tindrem que B = 1, 2; perquè per si B > 2, 4·B té dos dígits en contra que només tinga un.

$$4 \cdot B + \begin{matrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{matrix} = D \ (***)$$

Però, B = 2 = A contradiu les condicions de l'enunciat. Per tant, B = 1. I, aleshores, de l'equació (****)

$$4 \cdot D = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} 1 - 3 = \begin{matrix} 01 - 3 \\ 11 - 3 \\ 21 - 3 \\ 31 - 3 \end{matrix} = \begin{matrix} -2 \\ 8 \\ 18 \\ 28 \end{matrix} \quad \begin{matrix} \text{no} \\ D = 2 = A \ \text{no} \\ \text{no} \\ D = 7 \ \text{si} \end{matrix}$$

Per tant, la multiplicació queda:

	3	3	3	
2	1	C	7	8
			x	4
8	7	C	1	2

Per últim, de la tercera multiplicació tenim:

$$4 \cdot C + 3 = 30 + C \Rightarrow 3C = 27 \Rightarrow C = 9$$

I la multiplicació queda, definitivament:

	3	3	3	
2	1	9	7	8
			x	4
8	7	9	1	2