SOLUCIONS MARÇ 2020

PROBLEMES PER A BATXILLERAT. PROBLEMES DE LA CMO (Canadian Mathematical Olympiad)

(https://cms.math.ca/Competitions/CMO/)

Selecció: Rafael Martínez Calafat. Professor jubilat.

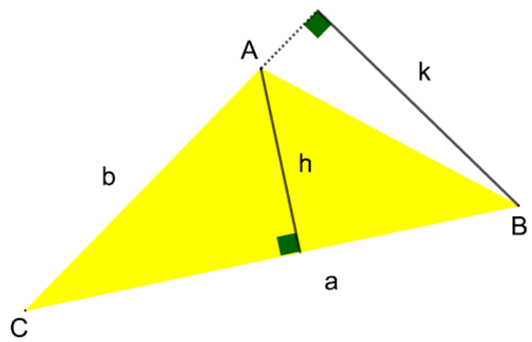
Març 1/8 (CMO 1970): Que naturals compleixen que el fet d'eliminar el dígit inicial porta a un número que és una trenta-cinquena part del natural inicial?

Solució: Siga N el número amb primer dígit A i a continuació el número x amb x amb n dígits (quan N es representa en base 10). L'exigència de l'enunciat es transforma en l'equació:

$$\frac{1}{35}N = x \;\Rightarrow\; N = 35x \;\Rightarrow\; A\cdot 10^n + x = 35x \;\Rightarrow\; A\cdot 2^n\cdot 5^n = 34x \;\Rightarrow\; A\cdot 2^{n-1}\cdot 5^n = 17x$$

D'ací, que, 17 dividisca a A. Però això és un absurd doncs A és un dígit. Per tant, no hi ha cap natural dels sol·licitats per l'enunciat

Març 2-3 (CMO 1970): Siga ΔABC un triangle amb a i b la mesura dels costats oposats als angles $\angle A$ i $\angle B$.
Provar que si $\angle A$ és no agut a + h > b + k.
Trobar, en quines condicions, a + h = b + k



Solució: En primer lloc, tindrem:

$$\text{Àrea} = \frac{\text{base}\cdot\text{altura}}{2} = \begin{Bmatrix} \dfrac{b\cdot k}{2} \\ \dfrac{a\cdot h}{2} \end{Bmatrix} \;\Rightarrow\; b\cdot k = a\cdot h$$

Ara, ja que $\angle A$ és no agut, tenim:

$$a^2 \geq b^2 + k^2 = (b+k)^2 - 2bk = (b+k)^2 - 2ah \;\Rightarrow\; a^2 + 2ah \geq (b+k)^2$$

I sumant a banda i banda h^2 (> 0), tenim:

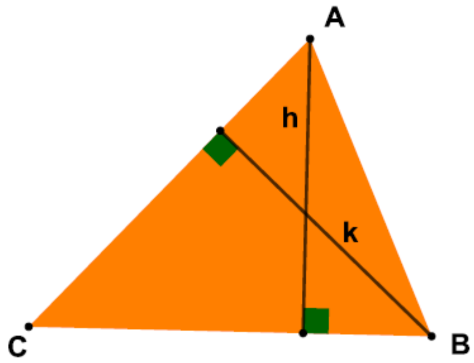
$$a^2 + h^2 + 2ah = (a+h)^2 \geq (b+k)^2 + h^2 > (b+k)^2 \;\Rightarrow\; (a+h)^2 > (b+k)^2$$

Finalment, com $y = \sqrt{x}$ és estrictament creixent: a + h > b + k

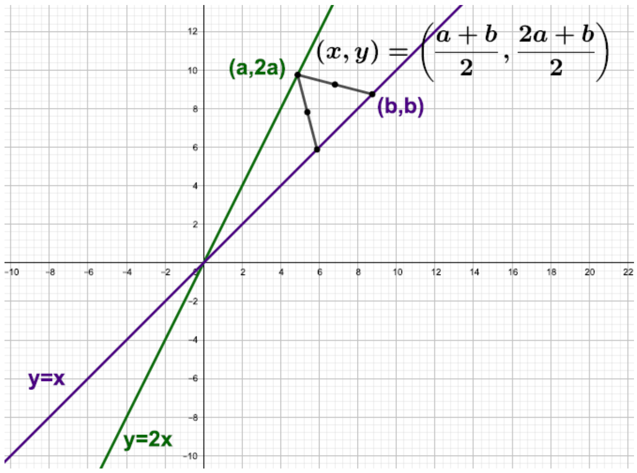
Respecte a, en quines condicions a + h = b + k, tenim: No es compleix la condició si $\angle A = 90°$, doncs en aquest supòsit:

$$a^2 = b^2 + k^2 \;\Rightarrow\; a^2 + 2ah = (b+k)^2 \;\Rightarrow\; a^2 + 2ah + h^2 = (b+k)^2 + h^2 \;\Rightarrow\; (a+h)^2 > (b+k)^2$$

La igualtat es dona si $\angle A = \angle B$, és a dir si el triangle és isòsceles i estem parlant dels costats iguals. En aquest cas: $\left.\begin{matrix} a = b \\ h = k \end{matrix}\right\} \Rightarrow a + h = b + k$



Març 4 (CMO 1970): Considerem els segments rectilinis amb un extrem situats sobre la recta y = x i l'altre extrem situat en la recta y = 2x de longitud 4. Trobar l'equació del lloc geomètric dels punts mitjans d'aquestos segments rectilinis



Solució: Tindrem

$$\left.\begin{matrix} 2x = a + b \\ 2y = 2a + b \end{matrix}\right\} \Rightarrow \begin{cases} a = 2y - 2x \\ b = 4x - 2y \end{cases} \quad (*)$$

Com la longitud dels segments és quatre ha de complir-se:

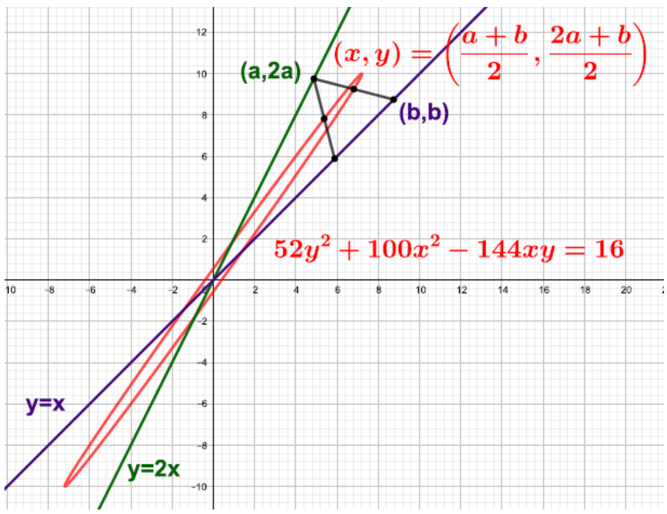
$$\sqrt{(a-b)^2 + (2a-b)^2} = 4 \; (a-b)^2 + (2a-b)^2 = 16$$

I substituint, ací, les igualtats (*), tenim:

$$(2y - 2x - 4x + 2y)^2 + (4y - 4x - 4x + 2y)^2 = 16$$

$$(4y - 6x)^2 + (6y - 8x)^2 = 16$$

$$52y^2 + 100x^2 - 144xy = 16$$



Març 5 (CMO 1970): Trobar tots els naturals amb dígit inicial 6 tals que el natural format eliminant aquest 6 és un vint-i-cinqué del natural original.

Solució: Si N comença (per l'esquerra) amb 6 i els altres dígits formen el natural x ha de complir-se:

$$\frac{1}{25}N = x \;\Rightarrow\; N = 25x \;\Rightarrow\; 6 \cdot 10^n + x = 25x \;\Rightarrow 6 \cdot 10^n = 24x \;\Rightarrow 2 \cdot 3 \cdot 2^n \cdot 5^n = 2^3 \cdot 3 \cdot x$$

$$\Rightarrow\; 2^{n-2} \cdot 5^n = x \;\Rightarrow\; 25 \cdot 10^{n-2} = x$$

Per tant, els naturals buscats són:

$$N = 625 \cdot 10^{n-2}$$

Març 6-7 (CMO 1070): Donat el polinomi:

$$f(x) = x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \cdots + a_{n-1}x + a_n$$

amb coeficients enters $a_1, a_2, \ldots, a_n$ i donat que existeixen quatre enters distints a, b, c i d tals que

$$f(a) = f(b) = f(c) = f(d) = 5$$

proveu que no hi ha enter k tal que f(k) = 8

Solució: Definim h(x) = f(x) – 5. Aleshores a, b, c i d són rails de h(x). Por el que, tindrem:

$$h(x) = (x - a)\cdot(x - b)\cdot(x - c)\cdot(x - d)\cdot g(x).$$

Poguera ser que g(x) continga a algun dels primers factors. Si és així, els traiem fora de l'expressió de g(x). És a dir, podem suposar que

$$h(x) = (x - a)^\alpha \cdot (x - b)^\beta \cdot (x - c)^\delta \cdot (x - d)^\eta \cdot g(x)$$

amb g(x) sense contenir cap dels primers factors. Si suposem que existeix k amb f(k) = 8 tindrem que h(k) = f(k) – 5 = 8 – 5 = 3, però:

$$h(k) = (k - a)^\alpha \cdot (k - b)^\beta \cdot (k - c)^\delta \cdot (k - d)^\eta \cdot g(k) = 3 = (-3)\cdot 1(-1) = 3 \cdot 1 = (-3)\cdot(-1) = 3$$

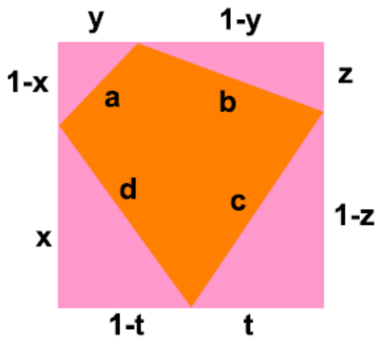
En la part esquerra tenim cinc naturals distints amb producte igual a 3 i això contradiu que 3 solament es pot expressar com el producte de un, dos o tres, naturals distints

Març 9 (CMO 1970): Un quadrilàter té cadascun dels seus vèrtexs en cadascun dels costats d'un quadrat de costat 1. Proveu que les longituds del quadrilàter a, b, c i d compleixen:

$$\mathbf{2 \le a^2+b^2+c^2+d^2 \le 4}$$

Solució: Tindrem, aplicant el teorema de Pitàgores a cadascun dels quatre triangles rectangles que es generen:

$$a^2 = y^2 + (1 - x)^2$$
$$b^2 = z^2 + (1 - y)^2$$
$$c^2 = t^2 + (1 - z)^2$$
$$d^2 = x^2 + (1 - t)^2$$



I sumant aquestes quatre igualtats:

$$a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = y^2 + (1 - y)^2 + z^2 + (1 - z)^2 + t^2 + (1 - t)^2 + x^2 + (1 - x)^2$$

I agrupant els sumands del segon membre dos a dos:

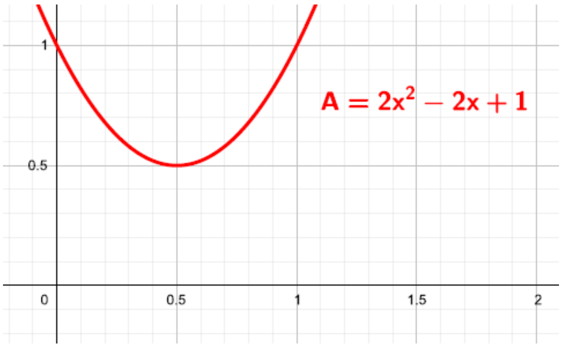
$$a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = (1 - 2y + 2y^2) + (1 - 2z + 2z^2) + (1 - 2t + 2t^2) + (1 - 2x + 2x^2) \ \ (*)$$

Considerem cadascun dels parèntesis: L'expressió $A = 1 - 2x + 2x^2$ és una paràbola dirigida cap amunt (doncs a = 2 > 0), amb vèrtex

$$x_V = \frac{-b}{2a} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}; \quad y_V = \frac{2}{4} - 1 + 1 = \frac{1}{2}$$

que passa per (0, 1) i per (1, 1). Per tant, per a $x \in [0, 1]$ es compleix:

$$\frac{1}{2} \le 2x^2 - 2x + 1 \le 1$$



I això és així per a cadascuna de les expressions del segon membre de (*). Per tant:

$$2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \leq a^2 + b^2 + c^2 + d^2 \leq 1 + 1 + 1 + 1 = 4$$

Març 10-11 (CMO 1970): Tenim algunes boles en una urna. Cada bola és de color roig o blau i hi ha almenys una de cada color. Cada bola pesa 5 g o 10 g i hi ha almenys una de cada pes. Provar que hi ha almenys dues boles amb color diferent i pes diferent

Solució: Suposem la següent taula de contingència:

	roig	blau	
5 g	x	z	x + z ≥ 1 (*)
10 g	y	t	y + t ≥ 1 (**)
	x + y ≥ 1 (***)	z + t ≥ 1 (****)	

(*) i (**) per que hi ha almenys una bola de cada pes

(***) i (****) per que hi ha almenys una bola de cada color

Els diferents casos que es poden donar són:

$$\begin{cases} x = 0 \begin{cases} t = 0 & (A) \\ t \neq 0 & (B) \end{cases} \\ x \neq 0 \begin{cases} t = 0 & (C) \\ t \neq 0 & (D) \end{cases} \end{cases}$$

En el cas (A) de (*) $z \geq 1$ i de (***) $y \geq 1$ i ja tenim que hi ha almenys dues boles amb diferents color i pes (almenys una bola blava i de 5 g i almenys una bola roja de 10 g)

En el cas (B) de (*) $z \geq 1$ i de (***) $y \geq 1$ i ja tenim que hi ha almenys dues boles amb diferents color i pes (almenys una bola blava i de 5 g i almenys una bola roja de 10 g)

En el cas (C) de (****) tindrem $z \geq 1$ i de (**) $y \geq 1$ i ja tenim que hi ha almenys dues boles amb diferents color i pes (almenys una bola blava i de 5 g i almenys una bola roja de 10 g)

En el cas (D) ja tenim que hi ha almenys i ja tenim que hi ha almenys dues boles amb diferents color i pes (almenys una bola roja de 5 g i una bola blava de 10 g)

Març 12 (CMO 1970): Donats 3 punts no alineats A, B i C, construir un cercle de centre C tal que una de les tangents des d'A i una de les tangents des de B al cercle, siguen paral·leles

Solució: Els passos a seguir són:

1.- Dibuixar els tres punts: A, B i C

2.- Dibuixar el segment f, que uneix A i B

3.- Trobar el punt mitjà C' del segment AB

4.- Dibuixar el segment g, que uneix C i C'

5.- Dibuixar h, paral·lela a g que passe per A.

6.- Dibuixar i, paral·lela a g que passe per B.

7.- Dibuixar j, perpendicular a h (i a i) que passe per C.

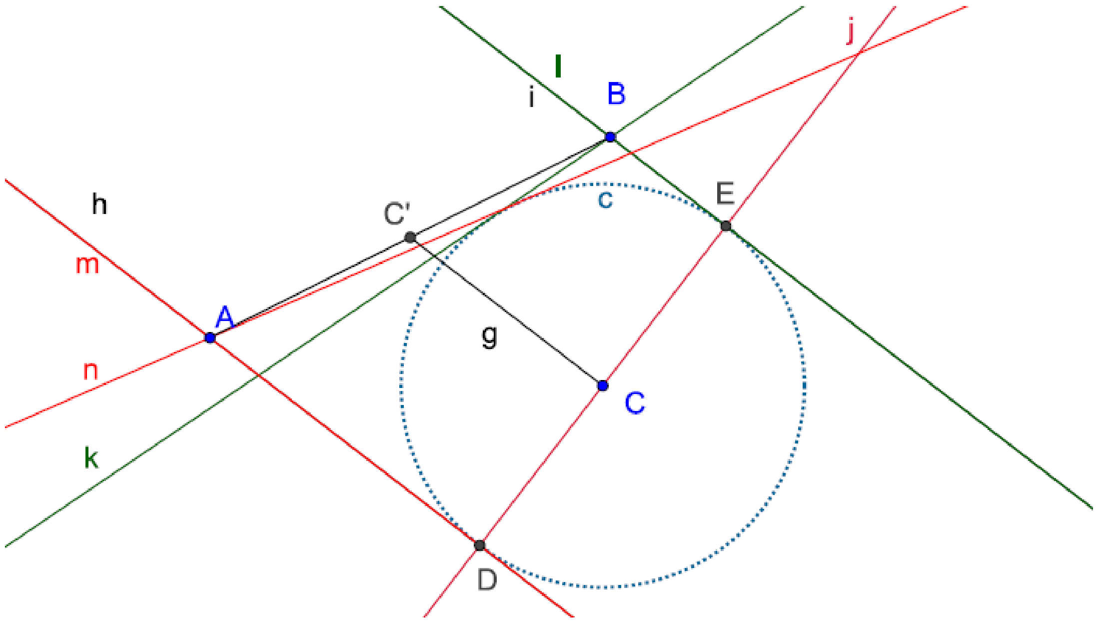
8.- Obtindre la intersecció de j amb h i amb i: D = j∩h; E = j∩i.

9.- Dibuixar la circumferència c, amb centre C que passa per D (o per E)

Comprovació:

10.- Dibuixar les bisectrius a c per B: verd: k i l

11.- .- Dibuixar les bisectrius a c per a: roig: m i n (m = h; i = l)



<u>Març 13 (CMO 1970):</u> Proveu que, donats cinc enters positius, no necessàriament diferents, sempre podem triar-ne tres, la suma dels quals siga divisible per 3

<u>Solució</u>: Donats els cinc enters positius poden ocórrer dues possibilitats: O bé hi ha tres o més enters positius que donen el mateix residu en dividir-los per tres o bé un dels enters positius dona un residu en dividir-lo per tres, hi ha altres dos que donen un altre residu en dividir-los per tres i altres dos que donen l'últim residu possible en dividir-los per tres.

Si hi ha tres o més enters positius amb el mateix residu, tindrem:

$$\text{Si } x, y, z = 0(3) \Rightarrow x + y + z = 0(3)$$

$$\text{Si } x, y, z = 1(3) \Rightarrow x + y + z = 0(3)$$

$$\text{Si } x, y, z = 2(3) \Rightarrow x + y + z = 0(3)$$

Si hi ha un enter positiu que dona un residu, dos enters positius que donen un altre residu i dos últims enters positius que donen l'últim residu possible, és suficient agafar un sumand en cadascun d'aquests tres grups.

$$\text{Si } \left\{\begin{pmatrix} x = 0(3) \\ y = 1(3) \\ z = 2(3) \end{pmatrix}\right\} \Rightarrow \quad x + y + z = 0(3)$$

<u>Març 15 (CMO 1970):</u> Trobar totes les ternes (x, y, z) tals que qualsevol d'aquests números afegit al producte dels altres dos, dona com a resultat 2.

<u>Solució:</u> L'expressió algebraica del requeriment de l'enunciat és:

$$\left.\begin{array}{r} x+yz=2 \\ y+zx=2 \\ z+xy=2 \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{array}{r} yz=2-x \\ zx=2-y \\ xy=2-z \end{array}\right\} \quad (*)$$

Cap membre de cap de les equacions pot anul·lar-se. Per exemple, si el primer membre de la primera equació és zero, llavors y = 0 o z = 0. Si y = 0 llavors el sistema queda:

$$\left.\begin{array}{r} x=2 \\ zx=2 \\ z=2 \end{array}\right\}$$

però, la segona equació està en contradicció amb la primera i la tercera equació.

Aprofitant que x $\neq$ 0, tenim:

$$(*) \Leftrightarrow \left.\begin{array}{r} yz=2-x \\ z=\dfrac{2-y}{x} \\ xy=2-z \end{array}\right\}$$

Substituint z en la primera i tercera equació:

$$\left.\begin{array}{r} y\dfrac{2-y}{x}=2-x \\ xy=2-\dfrac{2-y}{x} \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{array}{r} 2y-y^2=2x-x^2 \\ x^2y-2x+2-y=0 \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{array}{c} (x+y)\cdot(x-y)=2(x-y) \\ x^2y-2x+2-y=0 \end{array}\right\} \quad (**)$$

De la primera equació tenim: x – y = 0 (i. e. x = y) o x + y = 2.

Si x = y, la segona equació de (**) queda:

$$x^3-3x+2=0=(x-1)^2\cdot(x+2)$$

	1	0	-3	2
1		1	1	-2
	1	1	-2	0
1		1	2	
	1	2	0	

Per tant, x = 1 o x = - 2. Si x = 1, tindrem y = 1 i

$$z=\frac{2-1}{1}=1$$

Es dir, una solució del problema és (1, 1, 1)

Si x = - 2, tindrem que y = - 2 i

$$z=\frac{2-(-2)}{-2}=-2$$

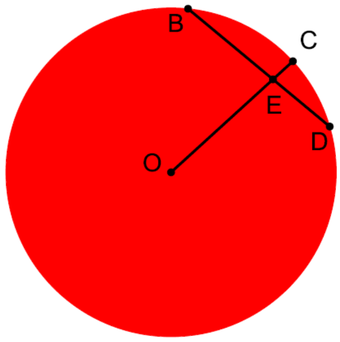
Es dir, altra solució és (- 2, - 2, -2)

Si y = 2 – x, la segona equació de (**) queda:

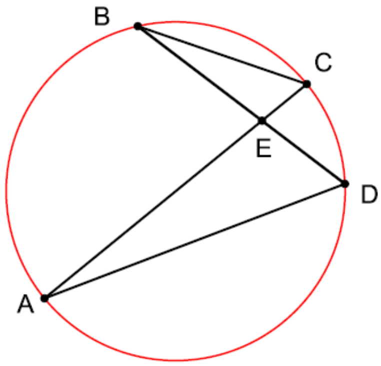
$$x^2(2-x)-2x+2-2+x=0 \Leftrightarrow x^3-2x^2+x=0 \Leftrightarrow x(x-1)^2=0 \underbrace{\Leftrightarrow}_{x\neq 0} x=1$$

Si x = 1 tindrem, y = 2 – 1 = 1 i

$$z=\frac{2-1}{1}=1$$

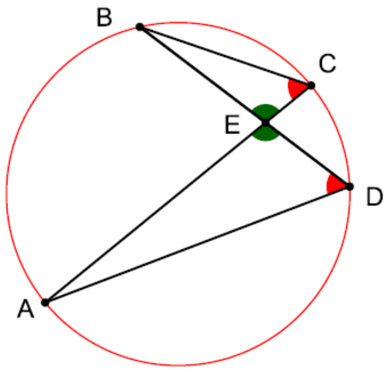


Març 16-17 (CMO 1971): DEB és una corda d'un cercle tal que DE = 3 i EB = 5. Siga O el centre del cercle. Estenem OE fins a tallar al cercle en C (veure il·lustració). Atés que EC = 1, trobar el radi del cercle



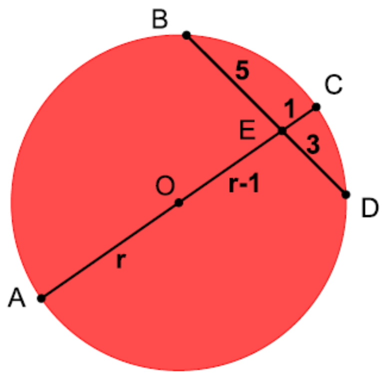
Solució: Lema previ: Siguen AB i CD dues cordes d'un cercle que es tallen en E. Llavors:

$$\frac{\mathrm{BC}}{\mathrm{DA}}=\frac{\mathrm{CE}}{\mathrm{ED}}=\frac{\mathrm{BE}}{\mathrm{EA}} \quad \equiv \quad \begin{cases}\mathrm{BC}\cdot\mathrm{ED}=\mathrm{DA}\cdot\mathrm{CE}\\ \mathrm{CE}\cdot\mathrm{EA}=\mathrm{ED}\cdot\mathrm{BE}\end{cases}$$



Demostració: Els angles color verd són iguals per ser oposats pel vèrtex i els angles color roig també són iguals per abastar el mateix arc (l'arc $\widehat{\mathrm{BA}}$). Per tant, $\Delta\mathrm{AED}\cong\Delta\mathrm{BCE}$ i d'ací:

$$\frac{\mathrm{BC}}{\mathrm{DA}}=\frac{\mathrm{CE}}{\mathrm{ED}}=\frac{\mathrm{BE}}{\mathrm{EA}}$$



Anem al problema. Si tracem el diàmetre per C, tindrem la il·lustració a la dreta i aplicant a ella el lema tindrem:

$$\mathrm{BE}\cdot\mathrm{ED} = \mathrm{EC}\cdot\mathrm{EA} \;\Rightarrow\; 5\cdot 3 = 1\cdot(2r-1) \;\Rightarrow\; r = 8$$

Març 18 (CMO 1970): Siga f(n) la suma dels primers n termes de la successió: 0, 1, 1, 2, 2, 3, 3, 4, 4, 5, 5, ... Donar una fórmula per a f(n) i provar que f(s + t) – f(s – t) = st on s i t són enters positius i s > t

Solució: Podem ordenar la col·lecció de naturals de la següent forma:

1°	2°	3°	4°	5°	6°	7°	8°	9°	10°	11°	12°	13°	14°	15°	.....		
0		1		2		3		4		5		6		7	......	I	termes imparells de f(n)
	1		2		3		4		5		6		7		......	P	termes parells de f(n)

Per exemple: f(10) el obtindríem de la següent manera:

1°	2°	3°	4°	5°	6°	7°	8°	9°	10°	11°	12°	13°	14°	15°	……		
0		1		2		3		4		5		6		7	….	I	termes imparells de f(n)
	1		2		3		4		5		6		7		……	P	termes parells de f(n)

$$f(10)=\begin{Bmatrix}\text{suma dels números situats}\\ \text{abaix i a la esquerra de }10°\end{Bmatrix}=0+1+2+3+4+1+2+3+4+5=25$$

A partir d'aquesta disposició tenim:

Si n = 2m

$$f(n)=\sum_1^{m-1} I+\sum_1^{m} P=\begin{Bmatrix}\text{suma en la fila I}\\ \text{fins } m-1+\text{suma}\\ \text{en la fila P fins m}\end{Bmatrix}=\frac{0+m-1}{2}m+\frac{1+m}{2}m=m^2=\frac{n^2}{4}$$

Si n = 2m + 1

$$f(n)=\sum_1^{m} I+\sum_1^{m} P=\begin{Bmatrix}\text{suma en la fila I}\\ \text{fins } m+\text{suma}\\ \text{en la fila P fins m}\end{Bmatrix}=\frac{0+m}{2}(m+1)+\frac{1+m}{2}m=m(m+1)=\frac{n^2-1}{4}$$

Per a la segona part del problema, distingim els següents casos:

1.- s i t parells

2.- s parell i t imparell

3.- s imparell i t parell

4.- s i t imparells

Per a 1 i 4, tenim:

$$\left.\begin{matrix}f(s+t)=\dfrac{(s+t)^2}{4}\\ f(s-t)=\dfrac{(s-t)^2}{4}\end{matrix}\right\}\ \Rightarrow\ f(s+t)-f(s-t)=\frac{(s+t)^2}{4}-\frac{(s-t)^2}{4}=\frac{4st}{4}=st$$

Per a 2 i 3, tenim:

$$\left.\begin{matrix}f(s+t)=\dfrac{(s+t)^2-1}{4}\\ f(s-t)=\dfrac{(s-t)^2-1}{4}\end{matrix}\right\}\ \Rightarrow\ f(s+t)-f(s-t)=\frac{(s+t)^2-1}{4}-\frac{(s-t)^2-1}{4}=\frac{4st}{4}=st$$

<u>Març 19 (CMO 1971):</u> Siguen x i y reals positius tals que x + y = 1. Proveu que:

$$\left(\mathbf{1}+\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{x}}\right)\left(\mathbf{1}+\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{y}}\right)\geq \mathbf{9}$$

<u>Solució:</u> Tenim successivament:

$$\left(1+\frac{1}{x}\right)\cdot\left(1+\frac{1}{y}\right)=\left(\frac{x+1}{x}\right)\cdot\left(\frac{y+1}{y}\right)=\frac{xy+x+y+1}{xy}=1+\frac{x+y+1}{xy}=\{x+y=1\}=1+\frac{2}{xy}\ (*)[$$

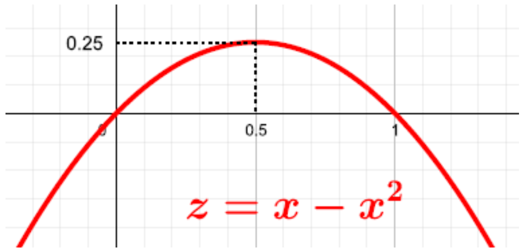
Considerem l'expressió xy amb x + y = 1

$$z = z \cdot y = x \cdot (1 - x) = x - x^2$$

és una paràbola dirigida cap abaix amb vèrtex:

$$x_V = \frac{-b}{2a} = \frac{1}{2}; \quad z_V = \frac{1}{2} - \frac{1}{4} = \frac{1}{4}$$

que passa per (0, 0) i per (1, 0). Per tant, si x $\in$[0, 1] aleshores $x - x^2 = xy \leq \frac{1}{4} \Rightarrow \frac{1}{xy} \geq 4 \Rightarrow \frac{2}{xy} \geq 8$

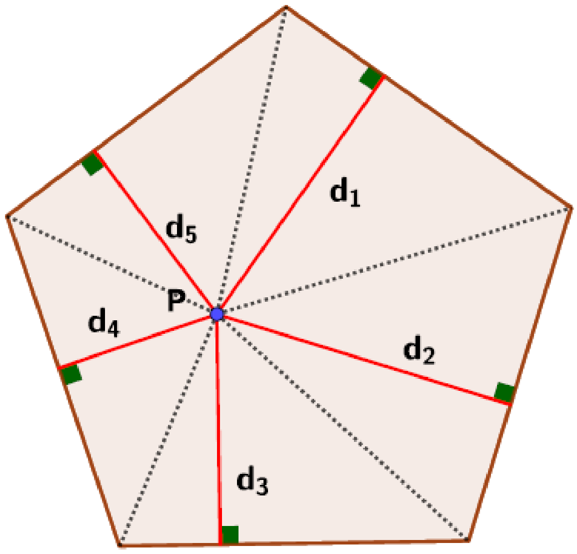


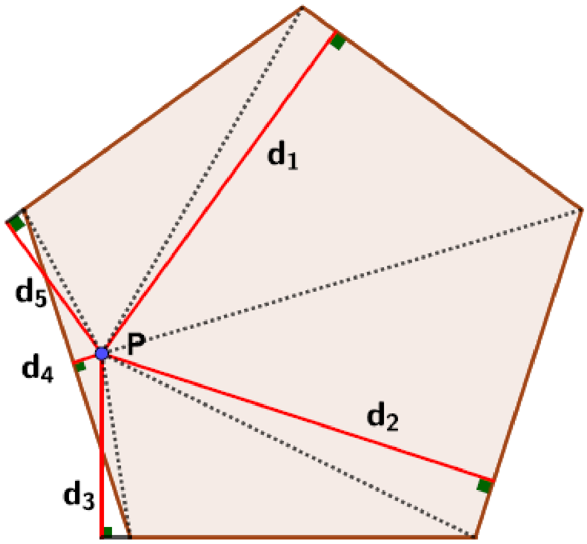
Per tant, en (*) tenim (x i y reals positius tals que x + y = 1):

$$\left(1 + \frac{1}{x}\right) \cdot \left(1 + \frac{1}{y}\right) 1 + \frac{2}{xy} \geq 1 + 8 = 9$$

Març 20-21 (CMO 1971): Un pentàgon regular està inscrit en un cercle de ràdio r. P és qualsevol punt dins del pentàgon. Són dibuixades perpendiculars des de P als costats o a les prolongacions dels costats del pentàgon. Provar que la suma de longituds d'aquestes perpendiculars és constant i expressar aquesta constant en funció de r

Solució: Visualitzem el problema:



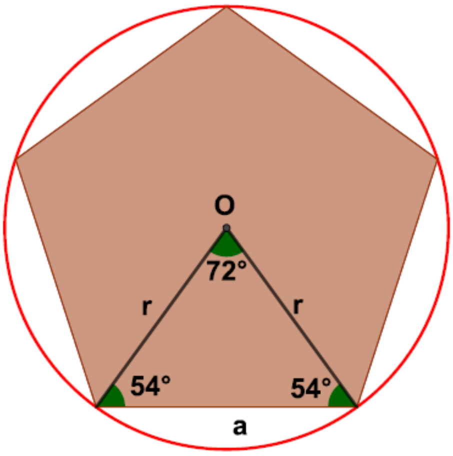


Hem de provar que $\sum_{i=1}^{5} d_i$ és constant independentment de la posició del punt P i trobar aqueixa quantitat únicament en funció del radi de la circumferència en la qual està inscrit el pentàgon regular.

Els vèrtexs del pentàgon juntament amb el punt P, divideixen el pentàgon en cinc triangles de base a (el costat del pentàgon) i altura d_i. Tindrem llavors:

$$A = \left\{ \begin{array}{c} = \dfrac{15}{12} a^2 \sqrt{\dfrac{5 + 2\sqrt{5}}{5}} \\ = \dfrac{a \cdot d_1}{2} + \dfrac{a \cdot d_2}{2} + \dfrac{a \cdot d_3}{2} + \dfrac{a \cdot d_4}{2} + \dfrac{a \cdot d_5}{2} = \dfrac{a}{2} \displaystyle\sum_{1=1}^{5} d_i \end{array} \right\} \Rightarrow \sum_{i=1}^{5} d_i = \frac{15}{6} a \sqrt{\frac{5 + 2\sqrt{5}}{6}}$$

Per a la segona part del problema tenim:



L'angle central corresponent a una aresta del pentàgon és $\left(\frac{360}{5}=\right)$ 72°, i aplicant el teorema dels cosinus al triangle de la figura:

$$a^2 = r^2 + r^2 - 2r \cdot r\cos(72°) = 2r^2\big(1-\cos(72°)\big)$$

D'on:

$$a = r\sqrt{2}\sqrt{1-\cos(72°)}$$

Por la qual cosa:

$$\sum_{i=1}^{5} d_i = \frac{15}{6}a\sqrt{\frac{5+2\sqrt{5}}{6}} = \frac{15r\sqrt{2}}{6}\sqrt{1-\cos(72°)}\sqrt{\frac{5+2\sqrt{5}}{6}}$$

<u>Març 22-29 (CMO 1971):</u> Siga:

$$\mathbf{P(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_{n-1}x + a_n}$$

on els coeficients a_i són nombres enters. Si P(0) i P(1) són tots dos imparells, proveu que P(x) no té arrels enteres

<u>Solució:</u> De l'enunciat tenim:

$$\left.\begin{array}{r} P(0) = a_n \text{ és imparell} \\ P(1) = \displaystyle\sum_{i=0}^{n} a_i \text{ és imparell} \end{array}\right\} \Rightarrow P(1) - P(0) = \sum_{i=0}^{n-1} a_i \text{ és parell}$$

Suposem que el polinomi té una rail entera. Caben dues possibilitats: que la rail siga parell o que siga imparell.

Suposem que la rail és parell. Aleshores

$$a_i x^{n-i} \text{ és parell } \forall i \in \{0,1,2,\cdots,n-1\} \Rightarrow \sum_{i=0}^{n-1} a_i x^{n-i} \text{ és parell}$$

i como a_n es imparell, tindrem que

$$0 = P(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^{n-i} \rightarrow 0 \text{ és (parell + imparell =) imparell}$$

que és un absurd.

Suposem que la rail és imparell. Considerem J el conjunt de subíndex de {0, 1, 2, ⋯ , n-1} per a els que els coeficients són imparells

$$j \in J \Leftrightarrow a_j \text{ és imparell}$$

$$i \in \bar{J} \Leftrightarrow a_i \text{ és parell}$$

Com $\sum_{i=0}^{n-1} a_i$ és parell tindrem que J té cardinalitat parell. A més:

1.- per a $j \in J$, $a_j x^{n-j}$ (imparell · imparell) es imparell y com J té cardinalitat parell:

$$\sum_{j\in J} a_j x^{n-j} \text{ és parell}$$

2.- per a $j \in \bar{J}$, $a_j x^{n-j}$ (parell · imparell) es parell i per tant:

$$\sum_{j\in\bar{J}} a_j x^{n-j} \text{ és parell}$$

per tant:

$$\sum_{j\in J} a_j x^{n-j} + \sum_{j\in\bar{J}} a_j x^{n-j} = \sum_{i=0}^{n-1} a_i x^{n-i} \text{ és parell}$$

y como a_n es imparell, tindrem que

$$0 = P(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^{n-i} \rightarrow \text{ 0 és (parell + imparell =) imparell}$$

que és un absurd.

<u>Març 23 (CMO 1971):</u> Proveu que, per a tots els nombres enters n

$n^2 + 2n + 12$

no és múltiple de 121

<u>Solució:</u> Estudiem congruències mòdul 11

$n = 0(11) \Rightarrow n\cdot(n+2) = 0(11) \Rightarrow n\cdot(n+2) + 12 = n^2 + 2n + 12 = 1(11)$

$n = 1(11) \Rightarrow n\cdot(n+2) = 3(11) \Rightarrow n\cdot(n+2) + 12 = n^2 + 2n + 12 = 4(11)$

$n = 2(11) \Rightarrow n\cdot(n+2) = 8(11) \Rightarrow n\cdot(n+2) + 12 = n^2 + 2n + 12 = 9(11)$

$n = 3(11) \Rightarrow n\cdot(n+2) = 4(11) \Rightarrow n\cdot(n+2) + 12 = n^2 + 2n + 12 = 5(11)$

$n = 4(11) \Rightarrow n\cdot(n+2) = 2(11) \Rightarrow n\cdot(n+2) + 12 = n^2 + 2n + 12 = 3(11)$

$n = 5(11) \Rightarrow n\cdot(n+2) = 2(11) \Rightarrow n\cdot(n+2) + 12 = n^2 + 2n + 12 = 3(11)$

$n = 6(11) \Rightarrow n\cdot(n+2) = 4(11) \Rightarrow n\cdot(n+2) + 12 = n^2 + 2n + 12 = 5(11)$

$n = 7(11) \Rightarrow n\cdot(n+2) = 8(11) \Rightarrow n\cdot(n+2) + 12 = n^2 + 2n + 12 = 9(11)$

$n = 8(11) \Rightarrow n\cdot(n+2) = 3(11) \Rightarrow n\cdot(n+2) + 12 = n^2 + 2n + 12 = 4(11)$

$n = 9(11) \Rightarrow n\cdot(n+2) = 0(11) \Rightarrow n\cdot(n+2) + 12 = n^2 + 2n + 12 = 1(11)$

$n = 10(11) \Rightarrow n\cdot(n+2) = 10(11) \Rightarrow n\cdot(n+2) + 12 = n^2 + 2n + 12 = 0(11)$

Els únics aspirants a ser divisibles per 121 són els enters n = 10(11). Però, per a aquestos, tenim:

$$N = n^2 + 2n + 12 = (11k-1)^2 + 2(11k-1) + 12 = 121k^2 + 11 \neq \overset{\bullet}{\widehat{121}}$$

<u>Març 24 (CMO 1971):</u> Trobeu els reals a tals que els polinomis $x^2 + ax + 1$ y $x^2 + x + a$ tinguen almenys una arrel comuna.

<u>Solució</u>: Si a = 1, llavors els dos polinomis no sols tenen una arrel en comú (en aquest cas complexes, perquè el discriminant de l'equació és negatiu) sinó les dues.

Suposem $a \neq 1$. Si x_1 és l'arrel comuna a les dues equacions tenim:

$$\left.\begin{aligned} x_1^2 + ax_1 + 1 = 0 \\ x_1^2 + x_1 + a = 0 \end{aligned}\right\} \underbrace{\Rightarrow}_{\text{restant}} (a-1)x_1 + (1-a) = 0 \underbrace{\Rightarrow}_{a\neq 1} x_1 = \frac{a-1}{a-1} = 1$$

Si x_0 és l'altra arrel de la primera equació i x_2 és l'altra arrel de la segona equació, per les relacions de Cardano-Vietà, tindrem:

$$\left.\begin{aligned}-a &= x_0 + 1\\ 1 &= x_0 \cdot 1\end{aligned}\right\} \Rightarrow a = -2$$

$$\left.\begin{aligned}-1 &= x_2 + 1\\ a &= x_2 \cdot 1\end{aligned}\right\} \Rightarrow a = -2$$

És a dir, per a a = 1 i a = - 2 es compleix l'enunciat

Març 25 (CMO 1971): ABEI és un quadrilàter convex amb AI = BE. Si l'angle Î és major que l'angle Ê, provar que AE > BI

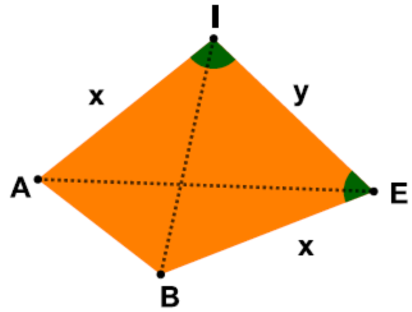
Solució: Hem de demostrar:

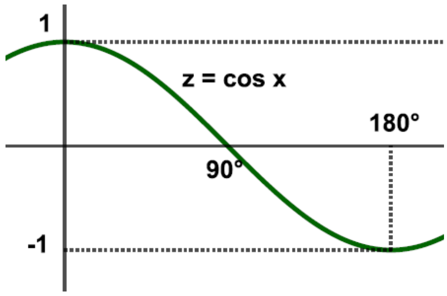
$$\hat{I} > \hat{E} \Rightarrow AE > BI$$

Tindrem en aplicar la llei dels cosinus a AE (en ΔAIE) i a BI (en ΔIBE)

$$AE^2 = x^2 + y^2 - 2xy\cos\hat{I}$$

$$BI^2 = x^2 + y^2 - 2xy\cos\hat{E}$$





Caben ara tres possibilitats amb els angles Ê i Î

1.- 0° < Ê < Î ≤ 90°

2.- Ê ≤ 90° < Î

3.- 90° < Ê < Î < 180°

Tindrem:

Per a 1:

$$\cos\hat{E} > \cos\hat{I} \Rightarrow 2xy\cos\hat{E} > 2xy\cos\hat{I} \Rightarrow -2xy\cos\hat{E} < -2xy\cos\hat{I} \Rightarrow BI^2 < AE^2 \underbrace{\Rightarrow}_{z=\sqrt{x}\uparrow} BI < AE$$

Per a 2:

$$\cos\hat{E} > 0, \qquad \cos\hat{I} < 0 \Rightarrow -2xy\cos\hat{E} < -2xy\cos\hat{I} \Rightarrow BI^2 < AE^2 \underbrace{\Rightarrow}_{z=\sqrt{x}\uparrow} BI < AE$$

Per a 3:

$$0 > \cos\hat{E} > \cos\hat{I} \Rightarrow -2xy\cos\hat{E} < -2xy\cos\hat{I} \Rightarrow BI^2 < AE^2 \underbrace{\Rightarrow}_{z=\sqrt{x}\uparrow} BI < AE$$

Març 26-27 (CMO 1971): Suposem que n persones coneixen cadascuna d'elles un tros d'informació i que tots els n trossos són diferents. Cada vegada que una persona A telefona a una altra B, A comunica a B tot el que sap, mentre que B no diu res a A. Quin és el mínim nombre de trucades telefòniques entre parells de persones necessari perquè totes ho coneguen tot? Prova que la teua contestació és un mínim

Solució: Siguen $A_1, A_2, A_3, \cdots, A_{n-1}, A_n$ les persones del col·lectiu. Si A_i telefona a A_{i+1} $\forall i$, tenim que la totalitat d'informació és coneguda per An. Si ara cada A_i telefona a A_{i-1} $\forall i$, llavors tota la informació és coneguda per $A_{n-1}, A_{n-2}, \cdots, A_2, A_1$. Per tant, són necessàries i suficients $2\cdot(n-1)$ trucades telefòniques.

Març 28 (CMO 1971): Siga n un número de 5 xifres i siga m el número que resulta d'eliminar en n la xifra central. Determinar tots els n per als quals n/m és un enter.

Solució: Siga $n=\ \overline{abycd}\ (a\cdot 10000+b\cdot 1000+y\cdot 100+c\cdot 10+d)$, aleshores $m=\overline{abcd}$. Ens demanen tots els n tals que n = k·m amb k$\in\mathbb{N}$.

Si k = 10

$$\overline{abycd}=k\cdot\overline{abcd}=10\cdot\overline{abcd}=\overline{abcd0}$$

i la igualtat porta com conseqüència que y = c, c = d i d = 0, es a dir y = c = d = 0. Por la qual cosa, una solució al problema és:

$$n=\overline{ab000},\qquad m=\overline{ab00},\qquad k=10$$

on a i b son qualsevol (a $\neq$ 0).

Si k = 11 tindríem:

$$k\cdot\overline{abcd}=(10+1)\cdot\overline{abcd}=\left\{\begin{array}{ccccc} a & b & c & d & 0\\ & a & b & c & d\\ & \vee & & & \\ & b & & & \end{array}\right\}>\ \overline{abycd}$$

Si k > 11

$$k\cdot\overline{abcd}>11\cdot\overline{abcd}>\overline{abycd}$$

Si k = 9

$$\overline{abycd}=9\cdot\overline{abcd}=(10-1)\cdot\overline{abcd}=\overline{abcd0}-\overline{abcd}\quad\Rightarrow\quad\overline{abcd0}=\overline{abycd}+\overline{abcd}$$

que es un absurd, ja que les unitats de miler de $\overline{abycd}+\overline{abcd}$ són superiores a b, que es la unitat de miler de $\overline{abycd}$

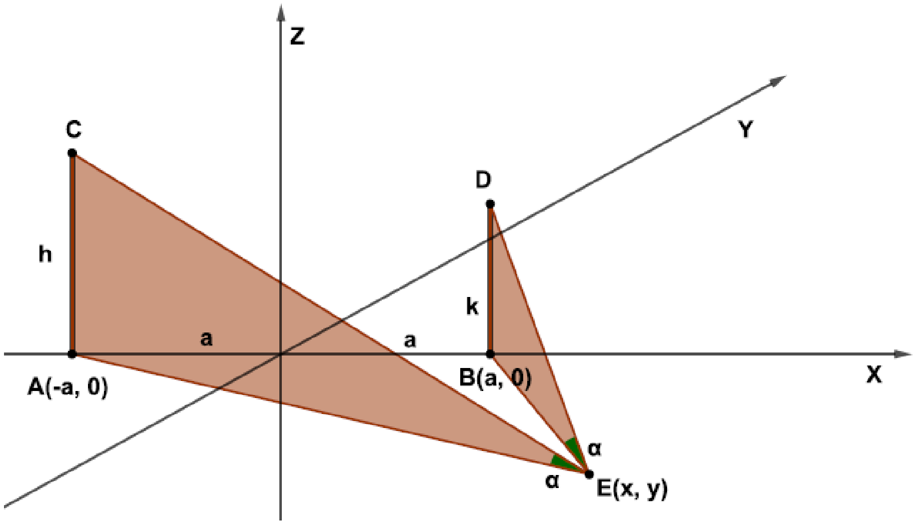
Una demostració semblant serveix per a k$\in${8,7,6,5,4,3,2,1}. Per tant, l'única solució és:

$$n=\overline{ab000},\qquad m=\overline{ab00},\qquad k=10$$

on a i b són qualsevol (a $\neq$ 0).

Març 30-31: Dos pals d'altures h i k estan separats 2a unitats en un pla anivellat. Trobar el lloc geomètric dels punts de pla anivellat de manera que els angles d'elevació als extrems dels pals són iguals

Solució: Establim l'origen del sistema de coordenades en el punt mitjà entre els dos pals i l'eix X és l'eix que uneix els punts de suport dels pals. Suposarem que el de major altura és el d'altura h i que està situat a l'esquerra. Siga E(x, y) un punt del lloc geomètric buscat.



Tindrem llavors, que els triangles ΔACE i ΔBED són semblants (perquè tots dos són rectangles i l'angle en E és el mateix). Per tant:

$$\frac{d(A,E)}{d(B,E)} = \frac{h}{k} \quad \Rightarrow \quad \frac{d^2(A,E)}{d^2(B,E)} = \frac{h^2}{k^2}$$

però:

$$d^2(A,E) = d^2\big((-a,0),(x,y)\big) = (x+a)^2 + y^2$$

$$d^2(B,E) = d^2\big((a,0),(x,y)\big) = (x-a)^2 + y^2$$

amb el que:

$$k^2[(x+a)^2 + y^2] = h^2[(x-a)^2 + y^2]$$

i desenvolupant:

$$0 = (h^2 - k^2)x^2 - 2ax(h^2 + k^2) + a^2(h^2 - k^2) + y^2(h^2 - k^2)$$

Si h ≠ k, podem dividir l'expressió per $h^2 - k^2$ i amb això:

$$0 = x^2 + a^2 + y^2 - 2ax\frac{h^2 + k^2}{h^2 - k^2}$$

$$0 = x^2 + a^2 + y^2 - 2ax\frac{h^2 + k^2}{h^2 - k^2} + a^2\frac{(h^2 + k^2)^2}{(h^2 - k^2)^2} - a^2\frac{(h^2 + k^2)^2}{(h^2 - k^2)^2}$$

$$0 = \left(x - a\frac{h^2 + k^2}{h^2 - k^2}\right)^2 - a^2\left(\frac{(h^2 + k^2)^2}{(h^2 - k^2)^2} - 1\right) + y^2$$

$$a^2\left(\frac{(h^2 + k^2)^2}{(h^2 - k^2)^2} - 1\right) = \left(x - a\frac{h^2 + k^2}{h^2 - k^2}\right)^2 + y^2$$

$$a^2\frac{4h^2k^2}{(h^2 - k^2)^2} = \left(x - a\frac{h^2 + k^2}{h^2 - k^2}\right)^2 + y^2$$

es a dir, una circumferència de centre

$$\left(a\frac{h^2 + k^2}{h^2 - k^2}, 0\right)$$

i radi

$$a\frac{2hk}{h^2 - k^2}$$

Si h = k (i amb això $h^2 - k^2 = 0$) l'equació del lloc geomètric es redueix a $0 = -2ax(h^2 + k^2)$ es a dir, x = 0, o en altres paraules l'eix Y