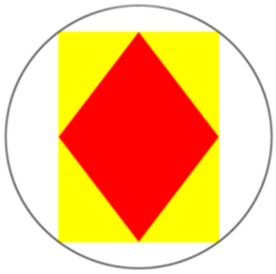
SOLUCIONS ABRIL 2020

PROBLEMES PER A PREPARAR LA OLIMPÍADA MATEMÀTICA DE SEGON CICLE DE L'ESO DE LA FESPM EN 2002 I 2003.

Organitzador: JOSÉ COLÓN LACALLE. Professor jubilat

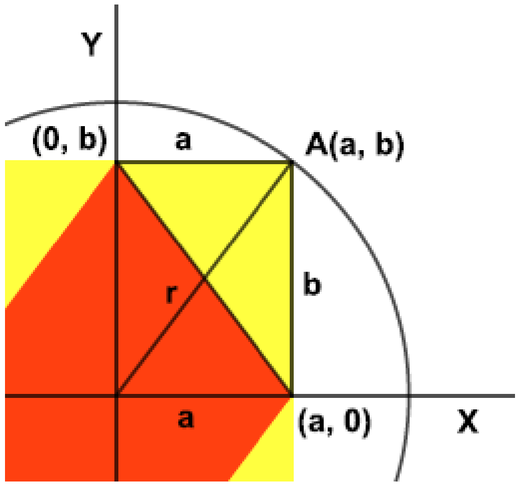
Abril 1-2: En una circumferència hem inscrit un rectangle i en ell, un rombe, prenent els punts mitjans dels costats del rectangle. Proveu que el perímetre del rombe és independent del rectangle inscrit en la circumferència



Solució: Siga A un punt de la circumferència (de ràdio r) triat vèrtex del rectangle. Considerem el sistema d'eixos coordinats format pels punts mitjà del rectangle. Si en aquest sistema de referència les coordenades de A són (a, b), tindrem, en aplicar Pitàgores:

$$a^2 + b^2 = r^2 \;\Rightarrow\; \text{costat del rombe} = r \;\Rightarrow\; P_{rombo} = 4r$$

amb el que tindrem que el perímetre del rombe és funció del radi de la circumferència inicial



Abril 3-4: Rafael, Dani, Laia i Aitana han pres un aperitiu en un bar. Paguen a parts iguals i observen que, encara que tots han pagat el mateix; Rafael ha posat el 10% del que tenia al principi, Dani el 20%, Laia el 30% i Aitana el 40%. Esbrina, raonadament, la quantitat mínima de diners que tenia cadascun, sabent que al principi tots tenien un nombre enter d'euros

Solució: Siguen x = diners que té Rafael; y = diners que té Dani; z = diners que té Laia; t = diners que té Aitana. De l'enunciat tenim:

$$\frac{10}{100}x = \frac{20}{100}y = \frac{30}{100}z = \frac{40}{100}t \quad \Rightarrow \quad 0{,}1x = 0{,}2y = 0{,}3z = 0{,}4t$$

que es transforma en el sistema:

$$\left.\begin{aligned} x &= 2y \\ 2y &= 3z \\ 3z &= 4t \end{aligned}\right\} \qquad \Rightarrow \qquad \left.\begin{array}{lcr} x - 2y & = & 0 \\ 2y - 3z & = & 0 \\ 3z - 4t & = & 0 \end{array}\right\}$$

que és un sistema de tres equacions amb quatre incògnites. De l'última tindrem, en expressar z en funció de t:

$$z = \frac{4}{3}t$$

De la segona, substituint z i aïllant y en funció de t:

$$y = \frac{4}{2}t = 2t$$

De la primera, substituint y i aïllant x en funció de t:

$$x = 4t$$

Perquè z, y i x siguen nombres naturals el menor valor de t ha de ser 3. En aquest cas z = 4, i = 6, x =12 i t =3. La quantitat mínima de diners que tenia cadascun és: Rafael tenia 12 €, Dani tenia 6 €, Laia tenia 4 € i Aitana tenia 3 €.

<u>Abril 5:</u> Trobeu el menor natural que compleix: dona residu 24 en dividir-lo entre 57, dona residu 73 en dividir-lo entre 106 i dona residu 126 en dividir-lo entre 159.

<u>Solució:</u> Tindrem:

$$\left.\begin{array}{r} n = 57k + 24 \\ n = 106k' + 73 \\ n = 159k'' + 126 \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{array}{c} n + 33 = 57k + 57 = 57(k + 1) \\ n + 33 = 106k' + 106 = 106(k' + 1) \\ n + 33 = 159k'' + 159 = 159(k'' + 1) \end{array}\right\}$$

es a dir, n + 33 es múltiple de 57, de 106 i de 159 i per tant n + 33 es múltiple del mcm (57, 106, 159) = 3·2·53·19 = 6042. El valor més petit possible de n és el que compleix n + 33 = 6042, es a dir, n = 6009

<u>Abril 6:</u> Trobeu els números de 4 xifres que són quadrats perfectes i que tenen les dues primeres xifres iguals i les dues últimes xifres iguals.

<u>Solució:</u> Siga uuvv el número buscat. Tindrem:

uuvv = u·1100 + v·11 = 11·(u·100 + v)

com el número buscat és un quadrat perfecte, tindrem que u·100 + v és un múltiple d'11 i com u i v són dígits, que u + v = 11. A més, com uuvv acaba en $v \Rightarrow v \in \{0, 1, 4, 5, 6, 9\}$ doncs:

si un número acaba en		el seu quadrat acaba en
0	………	0
1, 9	………	1
2, 8	………	4
3, 7	………	9
4, 6	………	6
5	………	5

Si v = 0, com u + v = 11 deu ser u = 11 que no és una xifra.

Si v = 1, com u + v = 11 deu ser u = 10 que no és una xifra.

Si v = 4, com u + v = 11 deu ser u = 7 i una solució serà $7744 = 88^2$.

Si v = 5, com u + v = 11 deu ser u = 6 però com 6655 no és un quadrat perfecte no apareix solució.

Si v = 6, com u + v = 11 deu ser u = 5 però com 5566 no és un quadrat perfecte no apareix solució.

Si v = 9, com u + v = 11 deu ser u = 2 però com 2299 no és un quadrat perfecte no apareix solució.

L'únic número que compleix l'enunciat és $7744 = 88^2$.

<u>Abril 7-8:</u> Un grup de 5 amics cursa estudis de primària i secundària. El dilluns van anar al cinema quatre d'ells, les edats dels quals sumen 38 anys. El dimarts patinaren quatre, les edats dels quals sumen 35 anys. El dimecres van anar al parc d'atraccions quatre, les edats dels quals sumen 36 anys. El dijous van anar quatre a la piscina, les edats dels quals sumen 36 anys. El divendres van anar quatre a una biblioteca, les edats dels quals sumen 38 anys. El dissabte van anar a un partit de futbol quatre, les edats dels quals sumen 39. Si cap va eixir en les sis ocasions, calcula l'edat de cadascun dels amics.

Solució: Siguen x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 les edats (ordenades de menor a major) de les cinc persones. Hi ha cinc subconjunts de quatre elements:

$$\{x_1, x_2, x_3, x_4\};\ \{x_1, x_2, x_3, x_5\};\ \{x_1, x_2, x_4, x_5\};\ \{x_1, x_3, x_4, x_5\};\ \{x_2, x_3, x_4, x_5\}$$

A més, els subconjunts estan ordenats des de menor suma (el primer subconjunt és el que formen els més jóvens) fins el de major suma (l'últim és el que formen els més majors). Com han eixit un total de sis vegades, algun grup ha eixit dues vegades en la mateixa setmana (el dimecres i el dijous (36 anys) o el dilluns i el divendres (38 anys)). En la primera possibilitat, tenim:

$$\begin{array}{lcl}
\{x_1, x_2, x_3, x_4\} & \Rightarrow & x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 35 \\
\{x_1, x_2, x_3, x_5\} & \Rightarrow & x_1 + x_2 + x_3 + x_5 = 36 \\
\{x_1, x_2, x_4, x_5\} & \Rightarrow & x_1 + x_2 + x_4 + x_5 = 38 \\
\{x_1, x_3, x_4, x_5\} & \Rightarrow & x_1 + x_3 + x_4 + x_5 = 38 \\
\{x_2, x_3, x_4, x_5\} & \Rightarrow & x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 39
\end{array}$$

I sumant les cinc igualtats tenim:

$$4 \cdot (x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5) = 186 \ \Rightarrow\ \sum x_i = \frac{186}{4} = 46{,}5 \notin \mathbb{N}$$

Amb la segona possibilitat tenim:

$$\begin{array}{lcl}
\{x_1, x_2, x_3, x_4\} & \Rightarrow & x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 35 \\
\{x_1, x_2, x_3, x_5\} & \Rightarrow & x_1 + x_2 + x_3 + x_5 = 36 \\
\{x_1, x_2, x_4, x_5\} & \Rightarrow & x_1 + x_2 + x_4 + x_5 = 36 \\
\{x_1, x_3, x_4, x_5\} & \Rightarrow & x_1 + x_3 + x_4 + x_5 = 38 \\
\{x_2, x_3, x_4, x_5\} & \Rightarrow & x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 39
\end{array}$$

i sumant les cinc igualtats tenim:

$$4 \cdot (x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5) = 184 \ \Rightarrow\ \sum x_i = \frac{184}{4} = 46$$

Per la qual cosa, es dona aquesta última possibilitat i aleshores:

$$\begin{array}{lcl}
x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 35 & x_1 = 35 - x_2 - x_3 - x_4\ (*) & \\
x_1 + x_2 + x_3 + x_5 = 36 & \longrightarrow & x_5 - x_4 = 1\ (**) \\
x_1 + x_2 + x_4 + x_5 = 36 & \longrightarrow & x_5 - x_3 = 1\ (***) \\
x_1 + x_3 + x_4 + x_5 = 38 & \longrightarrow & x_5 - x_2 = 3\ (****) \\
x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 39 & & x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 39\ (*****)
\end{array}$$

Sumant les equacions (**), (***), (****) i (*****) tenim: $x_5 = 11$. Substituint aquest valor en (**), (***), (****) i (*) tenim: $x_4 = x_3 = 10$; $x_2 = 8$ y $x_1 = 7$

Abril 9-10: Un capità de vaixell premia a 3 mariners amb entre 200 i 300 monedes. Durant la nit, un mariner es va despertar i va separar les monedes en tres munts iguals, tirant a la mar una moneda que sobrava. Va agafar un munt i, ajuntant els altres dos que quedaven, es va anar al llit. Això mateix van fer els altres mariners, cadascun dels quals va realitzar exactament la mateixa operació. Al matí següent el contramestre reparteix el que queda en tres munts, i es queda amb una moneda que sobrava per paga del seu treball. Quantes monedes hi ha inicialment? Quantes monedes rep cada mariner?

Solució: Siga x el nombre de monedes del principi. Tenim: $200 < x < 300$. El primer mariner tira una a l'aigua i queden $x – 1$, que és un múltiple de tres (perquè es generen tres munts iguals): $199 < x – 1 = 3n < 299$. El menor valor de n és ($\lfloor 199/3 \rfloor + 1 =$) 67 i el major valor de n és ($\lfloor 299/3 \rfloor =$)99. Per tant, hi ha 33 possibilitats per a n, on n és el nombre de monedes que s'emporta el primer mariner; i deixant aquest 2n monedes. D'aquestes una, va a l'aigua i $2n – 1$ és un múltiple de tres (perquè es generen tres munts iguals): $2·67 – 1 = 133 < 2n – 1 = 3k < 197 = 2·99 – 1$. El menor valor de k és ($\lfloor 133/3 \rfloor + 1 =$) 45 i el major valor de k és ($\lfloor 197/3 \rfloor =$)65. Hi ha, per tant, 21 possibilitats per a k, on k en el nombre de monedes que s'emporta el segon mariner; i deixant aquest 2k monedes. D'aquestes una, va a l'aigua i $2k – 1$ és un múltiple de tres (perquè es generen tres munts iguals): $2·45 – 1 = 89 < 2k – 1 = 3r < 129 = 2·65 – 1$. El menor valor de r és ($\lfloor 89/3 \rfloor + 1 =$) 30 i el major valor de r és ($\lfloor 129/3 \rfloor =$)43. Hi ha, per tant, 14 possibilitats per a r, on r en el nombre de monedes que s'emporta el tercer mariner; i deixant aquest 2r monedes. D'aquestes una, se l'emporta el contramestre i $2r – 1$ és un múltiple de tres (perquè es generen tres munts iguals): $2·30 – 1 = 59 < 2r – 1 = 3s < 85 = 2·43 – 1$. El menor valor de s és ($\lfloor 59/3 \rfloor + 1 =$) 20 i el major valor de s és ($\lfloor 85/3 \rfloor =$)28. Hi ha, per tant, 9 possibilitats per a s, on s en el nombre de monedes que s'emporta cadascun dels tres mariners. Recapitulant: el primer mariner s'emporta n + s monedes, el segon mariner s'emporta k + s monedes i el tercer mariner s'emporta r + s monedes

s	$r = \frac{3s+1}{2}$	$k = \frac{3r+1}{2}$	$n = \frac{3k+1}{2}$
20	30,5		
21	32	48,5	
22	33,5		
23	**35**	**53**	**80**
24	36,5		
25	38	57,5	
26	39,5		
27	41	62	93,5
28	42,5		

Per tant, el primer mariner rep (n + s = 80 + 23 =) 103 monedes, el segon mariner rep (k + s = 53 + 23 =) 76 monedes, el tercer mariner rep (r + s = 35 + 23 =) 58 monedes, a l'aigua van 3 monedes i el contramestre rep una moneda; donant un total de 241 monedes.

Abril 11-12: Una empresa produeix setmanalment 300 bicicletes de muntanya que ven íntegrament al preu de 600 € cadascuna. Després d'anàlisi de mercat observa que, si varia el preu, també varien les seues vendes segons la següent proporció: per cada 7 € que augmente o disminuïsca el preu de les seues bicicletes, disminueix o augmenta la venda en 3 unitats. Trobar el nombre de bicicletes i el preu unitari que aporten els majors ingressos. (Aquest problema ha aparegut en les proves d’accés a la Universitat)

Solució: Si x és el nombre de bicicletes produïdes i y és el preu unitari de cada bicicleta, tindrem que els ingressos són:

$$\mathrm{I(n)} = \mathrm{x} \cdot \mathrm{y} = (300 + 3\mathrm{n}) \cdot (600 - 7\mathrm{n})$$

Desenvolupant, tindrem:

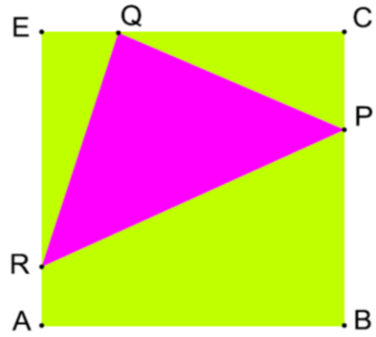
$$\mathrm{I(n)} = 180000 - 300\mathrm{n} - 21\mathrm{n}^2$$

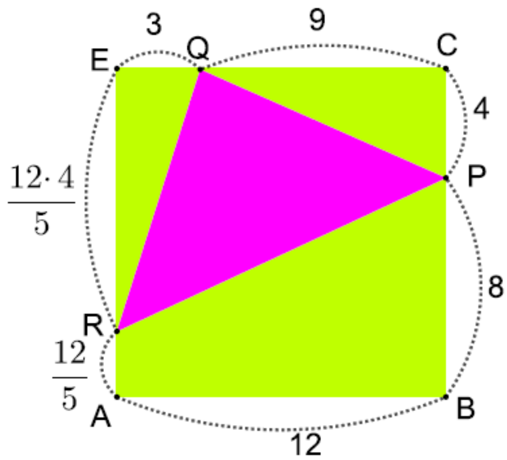
que és una paràbola invertida cap avall (perquè el coeficient de n^2 és negatiu), que aconsegueix el seu màxim en el vèrtex de la paràbola, és a dir en:

$$n_V = \frac{-b}{2a} = \frac{300}{2 \cdot (-21)} = -7{,}42 \ldots$$

Per tant, el màxim ingrés sorgeix quan es produeixen (300 – 3·7 = 300 – 21 =) 279 bicicletes amb un preu unitari de (600 – 7·(- 7) = 600 + 49 =) 649 €, generant-se uns ingressos de (279·649 =) 181.071 €

Abril 13-14: El quadrat ABCE té 144 cm^2 d'àrea. Calculeu l'àrea del triangle ΔPQR si BC = 3·PC, CE = 4·EQ i AE = 5·AR





Solució: Com l'àrea del quadrat és 144 cm^2, el seu costat mesura $\left(\sqrt{144} =\right)$ 12 cm. En la figura adjunta tenim el que mesura cada segment de cada costat. Aleshores:

$$A_{\Delta REQ} = \frac{3 \cdot \frac{12 \cdot 4}{5}}{2} = \frac{72}{5} cm^2$$

$$A_{\Delta QCP} = \frac{4 \cdot 9}{2} = 18 cm^2$$

$$A_{RABP} = \frac{\frac{12}{5} + 8}{2} \cdot 12 = \frac{312}{5} cm^2$$

amb el que:

$$A_{\Delta RQP} = 144 - \left(\frac{72}{5} + 18 + \frac{312}{5}\right) = \frac{246}{5} cm^2$$

Abril 15: Vàries persones decideixen realitzar un viatge per al que lloguen una furgoneta el cost de la qual és 522 € que pagaran a parts iguals. El dia d'eixida no es presenten 3 i els que queden han de pagar 29 € més. Quantes persones tenien pensat realitzar el viatge?

Solució: Siga x el nombre de persones que tenien pensat realitzar el viatge i y el cost del viatge per persona, llavors de l'enunciat:

$$\left.\begin{aligned} xy &= 522 \\ (x-3)\cdot(y+29) &= 522 \end{aligned}\right\}$$

De la primera equació:

$$y = \frac{522}{x}$$

(perquè, òbviament $x \neq 0$) i substituint en la segona:

$$(x-3)\cdot\left(\frac{522}{x} + 29\right) = 522; \; -1566 + 29x^2 - 87x = 0; \; x = \frac{87 \pm \sqrt{87^2 + 4 \cdot 29 \cdot 1566}}{2 \cdot 29} = \begin{cases} 9 \\ -6 \end{cases}$$

Com la solució x = - 6 no té sentit, concloem que el viatge l'esperaven fer 9 persones i cadascuna d'elles havia d'aportar $\left(y = \frac{522}{9} =\right)$ 58 €

Abril 16: En una festa hi ha 15 dones i alguns homes; tots ells viuen en A o en B. Primer cada dona li regala un bombó cada home que viu en A i aquests se'ls mengen. Després cada home que viu en B li regala un bombó a cada dona. En total es regalen 240 bombons. Quants homes hi ha en la festa?

Solució: Tindrem la següent taula de contingència, on F (M) indica sexe femení (masculí) i A (B) indica resident a la ciutat A (B)

	F	M	
A	n	p	n + p
B	15 - n	q	15 – n + q
	15	p + q	15 + p + q

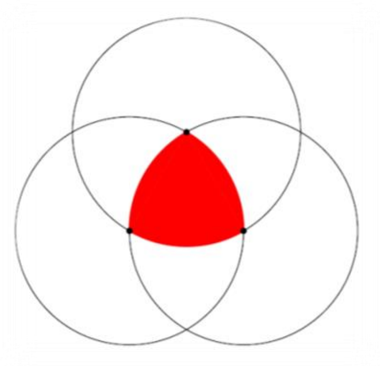
Les afirmacions: “Primer cada dona li regala un bombó cada home que viu en A i aquests se'ls mengen. Després cada home que viu en B li regala un bombó a cada dona. En total es regalen 240 bombons.” es tradueixen en: 15p + 15q = 240.

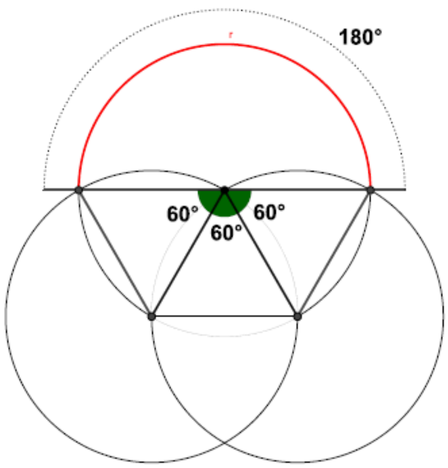
D'aquesta última igualtat:

$$p + q = \frac{240}{15} = 16$$

es a dir, en la reunió havia 16 homes.

Abril 17-18: En la figura hi ha tres circumferències iguals de radi 5 amb centres en els punts on es tallen dos d'elles. Trobar l'àrea de la zona comuna a les tres i el perímetre exterior a les tres circumferències.



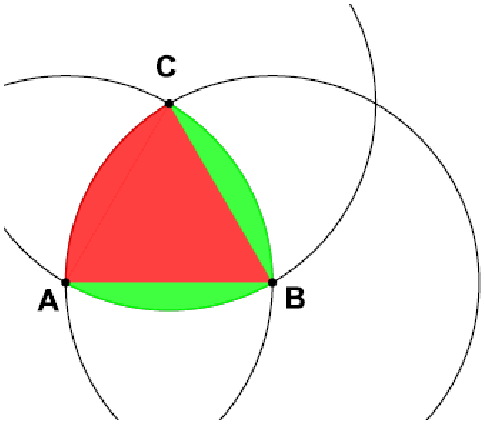


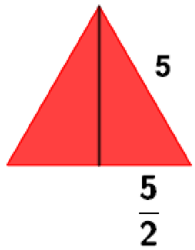
Solució: Si ens fixem en la circumferència superior, tenim que queden formats tres triangles equilàters (perquè els seus costats coincideixen amb el radi de la circumferència) en la zona interior. Els tres formen un angle de (60·3 =) 180°. Per tant, el perímetre exterior provocat per aquesta circumferència és:

$$\left(\frac{2\pi r}{2} =\right) \pi \cdot r = 5\pi$$

Per simetria, cada circumferència aporta el mateix perímetre exterior. D'ací, que, el perímetre exterior siga:

$$3 \cdot 5\pi = 15\pi \text{ cm}$$





$$\mathbf{h} = \sqrt{25 - \frac{25}{4}} = \frac{5\sqrt{3}}{2}$$

Per a l’àrea tenim:

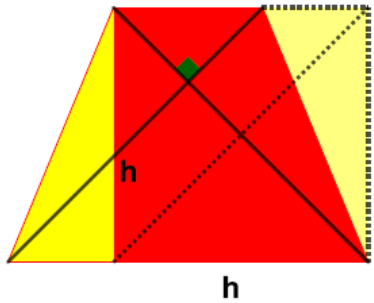
$$\text{Àrea} = \left\{\begin{matrix}\text{àrea sector}\\ \text{circular ACB}\end{matrix}\right\} + 2\left\{\begin{matrix}\text{àrea segment}\\ \text{circular CB}\end{matrix}\right\} = \frac{5^2\pi}{6} + 2\left\{\frac{5^2\pi}{6} - A_{\Delta ABC}\right\} = \frac{5^2\pi}{6} - 2\left(\frac{5^2\pi}{6} - \frac{5\cdot\frac{5\sqrt{3}}{2}}{2}\right)$$

$$= \frac{25}{2}(\pi - \sqrt{3})$$

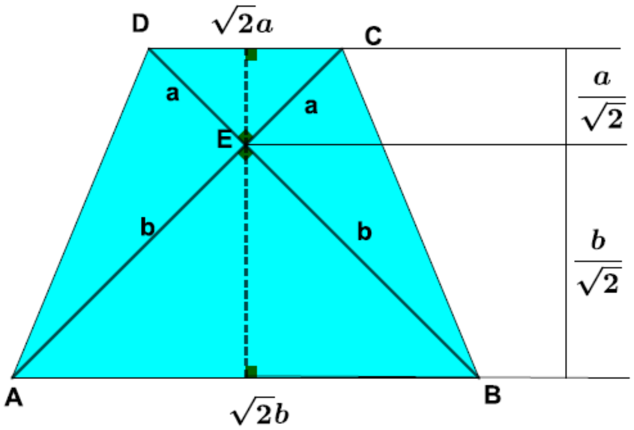
<u>Abril 19:</u> D'un trapezi isòsceles se sap que les seues diagonals són perpendiculars i la seua àrea és igual a 98. Trobeu l'altura del trapezi.

<u>Solució (Petar P. 3 ESO. “Almadraba”. Tarifa (Cádiz)):</u> Tracem l'altura h, des del vèrtex superior esquerre amb la qual cosa se'ns forma un triangle rectangle a la nostra esquerra. Si ho tallem encaixa perfectament a la nostra dreta, donant lloc a un quadrat de costat h (perquè les seues diagonals són perpendiculars i iguals) l'àrea de les quals continua sent 98. Per tant, tindrem:

$$h^2 = 98 \quad \Rightarrow \quad h = 7\sqrt{2}$$



<u>Solució (@Bannu16750368):</u> Els triangles ΔAEB i ΔDEC són rectangles isòsceles i aplicant Pitàgores s'obtenen les mesures dels segments de la figura adjunta. Una vegada fet això, tenim:



$$A = \text{semisuma bases} \cdot \text{alçària}$$

$$= \frac{\sqrt{2}a + \sqrt{2}b}{2} \cdot \left(\frac{a}{\sqrt{2}} + \frac{b}{\sqrt{2}}\right) = 98$$

D’on:

$$(a+b)^2 = 2 \cdot 98 \quad \Rightarrow \quad a + b = 14$$

i, per últim:

$$\text{alçària} = \frac{a+b}{\sqrt{2}} = \frac{14}{\sqrt{2}} = 7\sqrt{2}$$

Abril 20: Calculeu l'exponent de la màxima potència de 3 que siga divisor de 100!

Solució: Recordem que:

$$100! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 10 \cdot 1\,1 \cdot 12 \cdot \cdots \cdot 95 \cdot 96 \cdot 97 \cdot 98 \cdot 99 \cdot 100$$

Cada 3 factors successius contenen un factor tres. Per tant, hi ha $\left(\left\lfloor\frac{100}{3}\right\rfloor =\right)$ 33 factors 3.

Cada 9 (= 3^2) factors successius existeix un factor 3 (no comptabilitzat). Per tant, hi ha $\left(\left\lfloor\frac{100}{9}\right\rfloor =\right)$ 11 factors 3 a afegir.

Cada 27 (= 3^3) factors successius existeix un factor 3 (no comptabilitzat). Per tant, hi ha $\left(\left\lfloor\frac{100}{27}\right\rfloor =\right)$ 3 factors 3 a afegir.

Cada 81 (= 3^4) factors successius existeix un factor 3 (no comptabilitzat). Per tant, hi ha $\left(\left\lfloor\frac{100}{81}\right\rfloor =\right)$ 1 factor 3 a afegir.

En total hi ha (33 + 11 + 3 + 1 =) 48 factors 3 en 100!

Abril 21-22: En un bloc de 5 habitatges viuen 5 matrimonis amb dos fills cadascun d'ells i les edats dels quals són totes diferents i van des dels 4 als 13 anys. Les sumes d'edats de les parelles de germans són 10, 13, 17, 22 i 23 anys respectivament. Clara té 7 anys. Determinar l'edat del seu germà.

Solució: Les possibles edats dels (5·2 =) 10 xiquets són: 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12 i 13. De, entre aquests, només el parell 4 i 6 sumen 10. És a dir, les edats de dos germans són {4, 6}. De les edats que queden, només 5 i 8 sumen 13. És a dir, les edats de dos germans són {5, 8}. De les edats que queden, només 10 i 7 sumen 17. És a dir, les edats de dos germans són {7, 10}. De les edats que queden, només 9 i 13 sumen 22. És a dir, les edats de dos germans són {9, 13}. I ens queden 11 i 12 que sumen 23. En definitiva, les edats dels germans són: {4, 6}; {5, 8}; {7, 10}; {9, 13} i {11, 12}. Per tant, el germà de Clara té 10 anys.

Abril 23-24: En un edifici d'apartaments, la meitat de les finestres té cortines, la quarta part de les finestres tenen jardineres i la sisena part té cortines i jardineres. Hi ha 375 finestres que no tenen cortines ni jardineres. A més, se sap que 1/5 dels apartaments tenen 5 finestres, 2/5 dels apartaments tenen 3 finestres i els altres tenen 2 finestres. Quants apartaments té l'edifici?.

Solució: Siga x el número de finestres. De l'enunciat tenim:

$$\frac{x}{2} \;\rightarrow\; \text{cortines; } \frac{x}{4} \;\rightarrow\; \text{jardineres; } \frac{x}{6} \;\rightarrow\; \text{cortines i jardineres; } 375 \;\rightarrow\; \text{sense cortines ni jardineres}$$

Per tant:

$$\frac{x}{2}+\frac{x}{4}-\frac{x}{6}+375 = x;\;\; 7x+450012x;\;\; x = 900$$

es a dir, en l'edifici hi ha 900 finestres. Siga ara, y el número d'apartaments. Aleshores:

$$\frac{y}{5}\cdot 5+\frac{2}{5}y\cdot 3+\left(y-\frac{y}{5}-\frac{2y}{5}\right)\cdot 2 = 900;\;\; \frac{15y}{5} = 900;\;\; y = 300$$

Es a dir, en l'edifici hi ha 300 apartaments.

Abril 25-26: Un joier va arribar a Bagdad a vendre joies i va prometre pagar a Salim 20 dinars si venia les joies per 100 dinars i 35 dinars si venia les joies per 200 dinars. Al cap d'uns dies va vendre les joies per 140 dinars i el joier i Salim van calcular per separat l'import de l'hostalatge. El joier va opinar que havia de pagar 24 dinars i mig i Salim va opinar que havia de pagar 28 dinars. Hi ha alguna solució més encertada que les propostes pel joier i per Salim?

Solució: Siga y el cost de l'hostalatge i x el preu de venda de les joies. Podem assumir que el cost de l'hostalatge és suma d'una constant (que no depèn de l'altra variable considerada) i d'un altre sumand que és directament proporcional al preu de venda de les joies. És a dir que y = n + mx. De l'enunciat tenim, que (100, 20) i (200, 35) són punts d'ella. Llavors:

$$\left.\begin{array}{l} 20 = \mathrm{n} + 100\mathrm{m} \\ 35 = \mathrm{n} + 200\mathrm{m} \end{array}\right\} \Rightarrow \quad \mathrm{m} = 0{,}15; \;\; \mathrm{n} = 5 \;\; \mathrm{y} = 0{,}15\mathrm{x} + 5$$

Si el joier ven les joies per 140 dinars, ha de pagar per l'hostalatge: y = 0,15·140 + 5 = 26 dinars.

Les solucions aportades per Salim i pel joier són no adequades ja que no apliquen bé la proporcionalitat directa entre els increments de les magnituds cost d'hostalatge i diners aconseguits per les joies.

Salim raona:

$$\left.\begin{array}{ccc} \text{preu joies} & ---- & \text{cost hostatge} \\ 100 & ---- & 20 \\ 140 & ---- & \mathrm{z} \end{array}\right\} \; \mathrm{z} = \frac{20 \cdot 140}{100} = 28 \text{ dinares}$$

El joier raona:

$$\left.\begin{array}{ccc} \text{preu joies} & ---- & \text{cost hostatge} \\ 200 & ---- & 35 \\ 140 & ---- & \mathrm{z} \end{array}\right\} \; \mathrm{z} = \frac{35 \cdot 140}{200} = 24{,}5 \text{ dinares}$$

Quan el raonament correcte és:

$$\left.\begin{array}{ccc} \nabla \text{ preu joies} & ---- & \nabla\text{cost hostatge} \\ 100\ (= 200 - 100) & ---- & 15\ (= 35 - 20) \\ 40\ (= 140 - 100) & ---- & \mathrm{z} \end{array}\right\} \; \mathrm{z} = \frac{40 \cdot 15}{100} = 6 \text{ dinares}$$

Amb el que s'ha de pagar per l'hostalatge (20 + 6 =) 26 dinars, com hem trobat abans.

Abril 27-28: Dani i Laia aposten un sopar. Per a això un amic de tots dos prepara 6 sobres, un dels quals conté una targeta negra i els altres una targeta verda cadascun. Comença Dani triant un sobre, si dins està la targeta negra, pagarà el sopar. En cas contrari el sobre triat per Dani es retira i ara és Laia la que tria un sobre dels 5 restants. Si el triat per ella conté la targeta negra, ella paga el sopar. En cas contrari es retira el sobre triat i contínua el joc en les mateixes condicions, fins que un dels dos tria el sobre amb la targeta negra. És el joc equitatiu? Ocorreria el mateix si es jugara amb 5 sobres amb 4 targetes verdes i una negra?

Solució: Representarem per N_i (V_j) traure targeta negra (verda) en l'extracció i-èsima (j-èsima). Tindrem:

P(perd Dani) = P (N_1 o (V_1 i V_2 i N_3) o (V_1 i V_2 i V_3 i V_4 i N_5)) = P (N_1) + P(V_1 i V_2 i N_3) + P(V_1 i V_2 i V_3 i V_4 i N_5)

ja que els esdeveniments són incompatibles. I aleshores:

$$\mathrm{P(perd\ Dani)} = \frac{1}{6} + \frac{5}{6} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{1}{4} + \frac{5}{6} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{1}{2}$$

i el joc és equitatiu.

Si sòls se preparen cinc sobres, tenim:

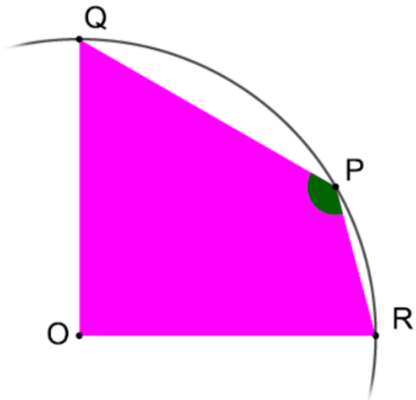
P(perd Dani) = P (N_1 o (V_1 i V_2 i N_3) o (V_1 i V_2 i V_3 i V_4 i N_5)) = P (N_1) + P(V_1 i V_2 i N_3) + P(V_1 i V_2 i V_3 i V_4 i N_5)

i aleshores:

$$\mathrm{P(perd\ Dani)} = \frac{1}{5} + \frac{4}{5}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{3} + \frac{4}{5}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2}\cdot 1 = \frac{1}{5} + \frac{1}{5} + \frac{1}{5} = \frac{3}{5}$$

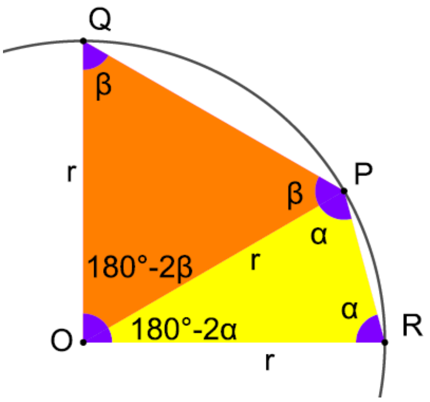
i el joc no és equitatiu.

<u>Abril 29-30:</u> Siga OQR un quadrant de circumferència de radi OQ. Siga P un punto qualsevol del quadrant. Trobeu l'angle $\angle$QPR



<u>Solució 1:</u> L'angle central de 270° porta associat l'angle inscrit $\angle$QPR (perquè tots dos abasten l'arc QP'R sent P' el simètric de P respecte al punt O, centre de la circumferència). D'on:

$$\angle \mathrm{QPR} = \frac{270°}{2} = 135°$$



<u>Solució 2:</u> Donat el punt P, es generen els triàngles ΔPOR i ΔPOQ. Tots dos són isòsceles perquè OR = OP = OQ = radi de la circumferència = r. D'ací es tenen els angles reflectits en la figura adjunta. Com:

$$90 = 180° - 2\alpha + 180° - 2\beta \;\Rightarrow\; 270° = 2(\alpha + \beta)$$

tindrem:

$$\angle \mathrm{QPR} = \alpha + \beta = \frac{270°}{2} = 135°$$