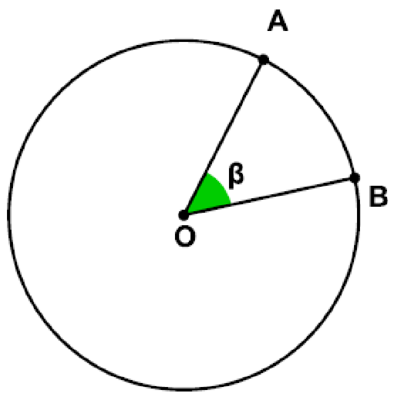
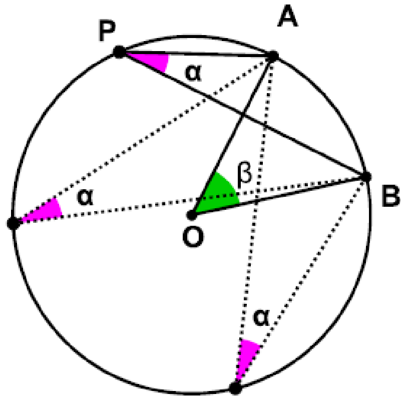
SOLUCIONS MAIG 2020

PROBLEMES SOBRE ANGLES EN LA CIRCUMFERÈNCIA PER A SEGON CICLE DE L'ESO I BATXILLERAT. Autor: MARIO MESTRE. INS "El Pont de Suert"

ANGLES EN LA CIRCUMFERÈNCIA: Siga una circumferència de centre O i A i B dos punts d'ella.



$$\beta = \textbf{angle central} = \widehat{AB}$$

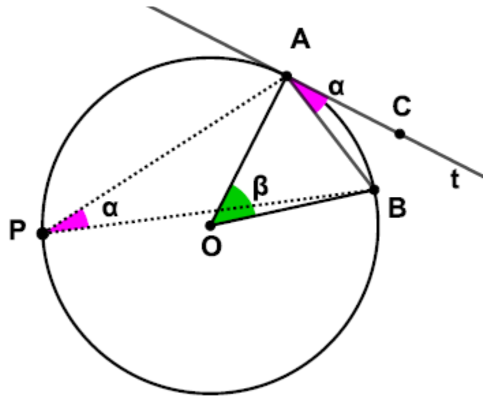


Si P és un punt qualsevol de la circumferència es defineix **angle inscrit** a l'angle ∠APB. Es pot provar que l'angle és el mateix, qualsevol que siga P i:

$$\alpha = \angle APB = \frac{\angle AOB}{2} = \frac{\beta}{2} = \frac{\widehat{AB}}{2}$$

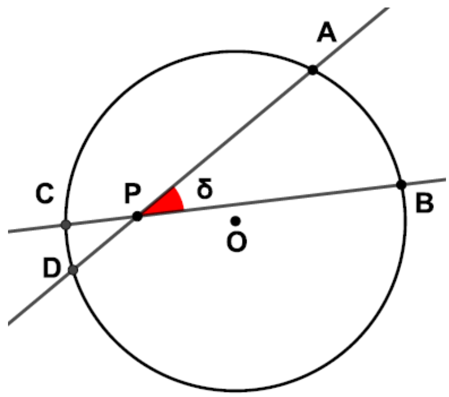
Es a dir:

$$\text{angle inscrit} = \frac{\text{angle central}}{2}$$



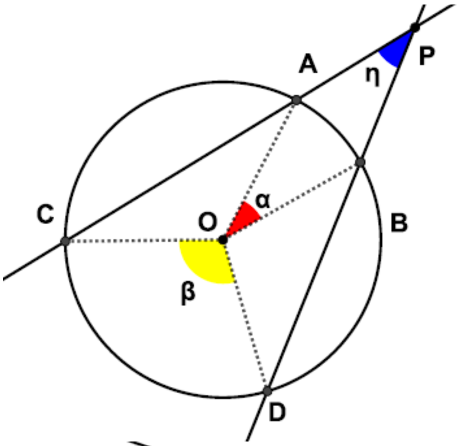
Siga AC la tangent a la circumferència pel punt A. A l'angle ∠CAB se'n diu **angle semiinscrit** en A. Pot demostrar-se que:

$$\angle CAB = \alpha = \text{angle semiinscrit} = \frac{\beta}{2} = \frac{\text{angle central}}{2}$$



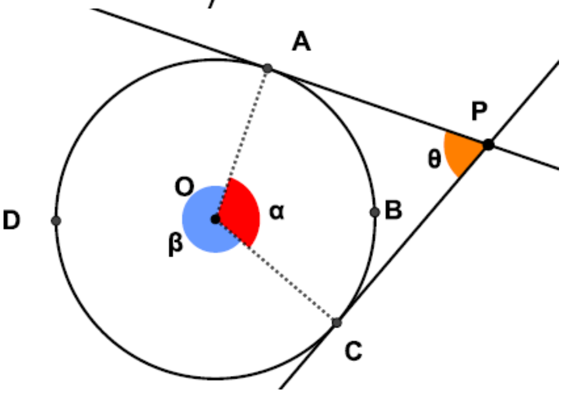
Si P és un punt interior de la circumferència es defineix **angle interior** com l'angle ∠APB (= ∠CPD = δ). Pot provar-se que:

$$\text{angle interior} = \delta = \frac{\widehat{AB} + \widehat{CD}}{2}$$



Si P és un punt exterior de la circumferència es defineix **angle exterior** com l'angle ∠APB (= ∠CPD = η). Pot provar-se que:

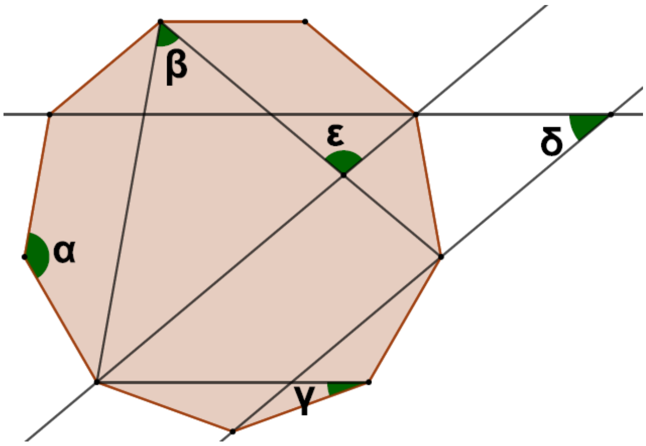
$$\text{angle exterior} = \eta = \frac{\widehat{CD} - \widehat{AB}}{2} = \frac{\beta - \alpha}{2}$$



Si P és un punt exterior de la circumferència i PA i PC són tangents a la circumferència en A i C, es defineix **angle circumscrit** com l'angle ∠APC = θ. Pot provar-se que:

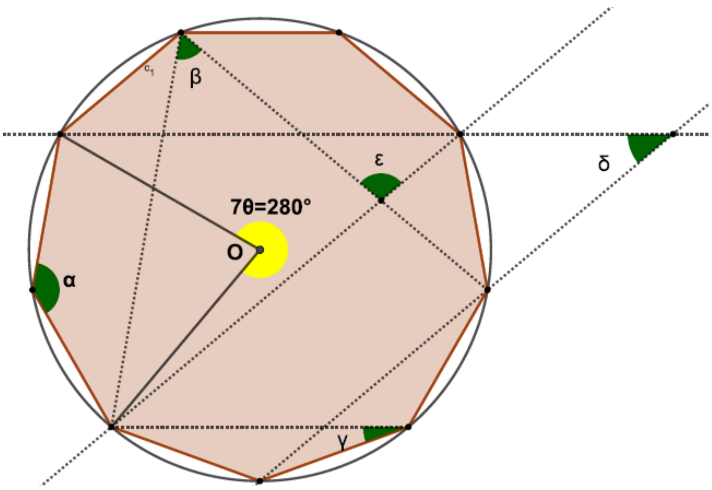
$$\text{angle circumscrit} = \theta = \frac{\widehat{ADC} - \widehat{ABC}}{2} = \frac{\beta - \alpha}{2}$$

Maig 1-2: En la figura hi ha un eneàgon regular. Es demana calcular el valor dels angles α, β, δ, ε i γ



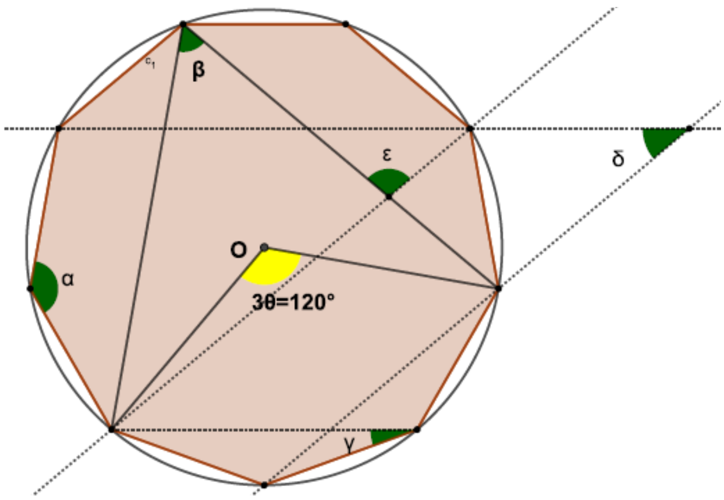
Solució: El eneàgon regular està inscrit en una circumferència de centre O. Si unim dos vèrtexs consecutius del eneàgon amb el punt O queden generat nou triangles isòsceles iguals amb angle en el vèrtex O de (360°/9 =) 40° = θ.

Una vegada clar aquest punt, tindrem:



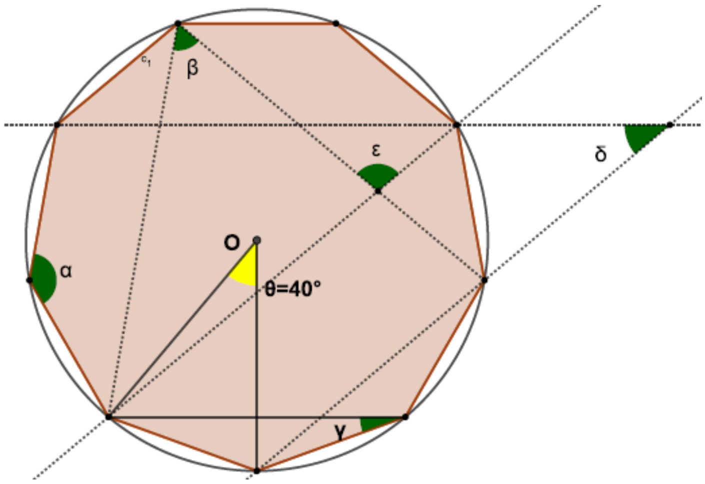
α és l'angle inscrit associat a l'angle central 7·θ, per tant:

$$\alpha = \frac{7\theta}{2} = \frac{280°}{2} = 140°$$



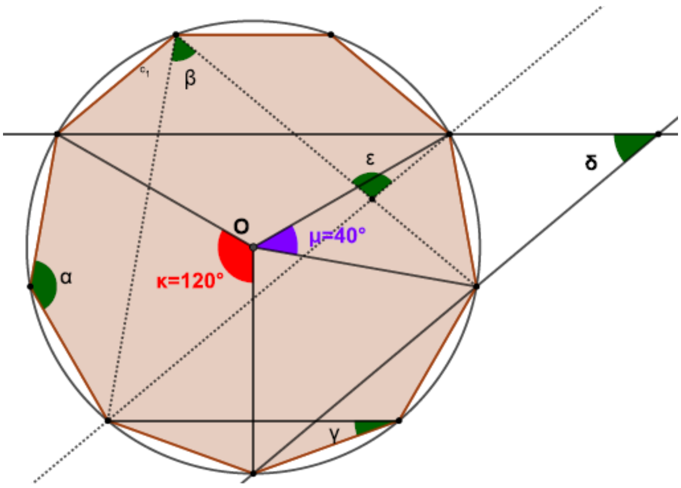
β és l'angle inscrit associat a l'angle central 3·θ, per tant:

$$\beta = \frac{3\theta}{2} = \frac{120°}{2} = 60°$$



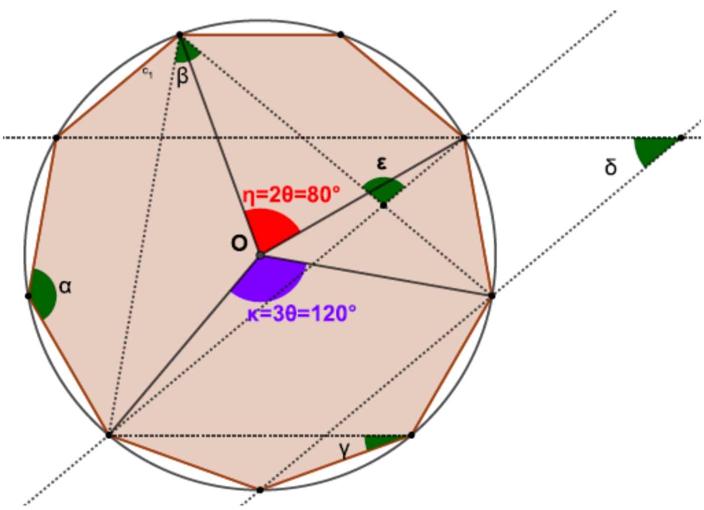
γ és l'angle inscrit associat a l'angle central θ, per tant:

$$\gamma = \frac{\theta}{2} = \frac{40°}{2} = 20°$$



δ és l'angle extern associat als angles centrals κ = 3·θ i μ = θ, per tant:

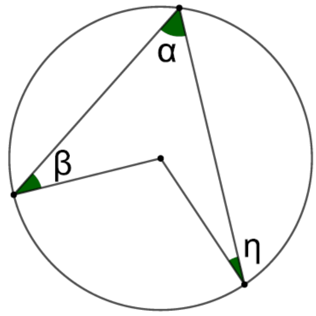
$$\delta = \frac{\kappa - \mu}{2} = \frac{120° - 40°}{2} = 40°$$

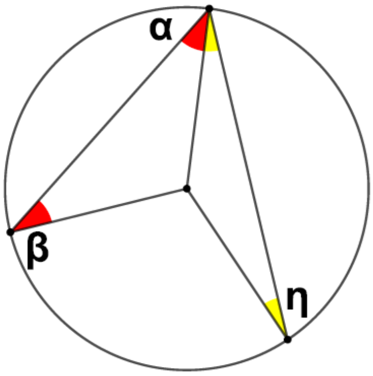


ε és l'angle intern associat als angles centrals κ = 3θ i η = 2θ, per tant:

$$\varepsilon = \frac{\kappa + \eta}{2} = \frac{120° + 80°}{2} = 100°$$

<u>Maig 3:</u> Si β=34°30' i η=20°30', calculeu α.

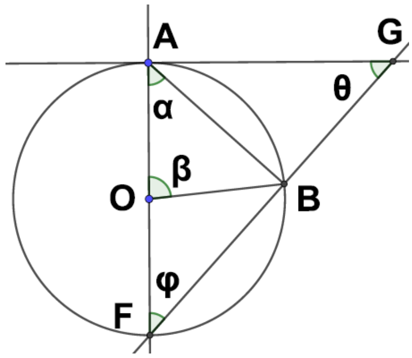




<u>Solució:</u> Si dibuixem el radi que uneix el centre de la circumferència amb el vèrtex de l'angle α queden formats dos triangles isòsceles (perquè tenen dos costats iguals al radi de la circumferència). Amb això

$$\alpha = \beta + \eta = 34°30' + 20°30' = 55°$$

<u>Maig 4-5:</u> Si O es el centre de la circumferència, AG es la tangent per A, l'angle α val 48°, calculeu els angles β, θ i φ



<u>Solució:</u> α = 48° és l'angle inscrit de l'angle central 180° - β = (2·48° =) 96° $\Rightarrow$ β = 84°

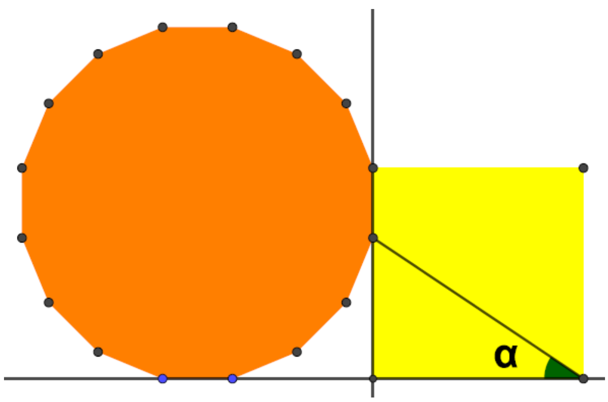
φ és l'angle inscrit de l'angle central β. Per tant;

$$\varphi = \frac{\beta}{2} = \frac{84°}{2} = 42°$$

Per últim, θ es l'angle exterior associat als arcs $\widehat{AB}$ i $\widehat{AF}$, per tant:

$$\theta = \frac{\widehat{AF} - \widehat{AB}}{2} = \frac{\angle AOF - \angle AOB}{2} = \frac{180° - \beta}{2} = \frac{180° - 84°}{2} = 48°$$

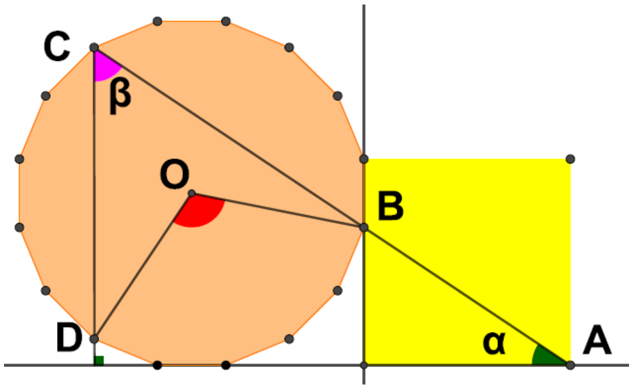
<u>Maig 6-7:</u> En la figura es presenta un quadrat i un polígon regular de 16 costats. Calcular l'angle α



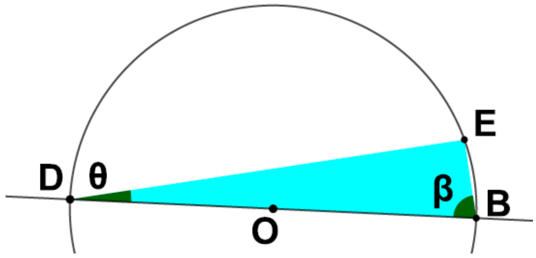
Solució: En prolongar el costat curt de l'angle α obtenim els segments AC i CD. Llavors:

$$\alpha = 90° - \beta, \quad \beta = \frac{\angle DOB}{2} = \frac{5 \cdot \frac{360°}{16}}{2} = 56°\,15'$$

$$\alpha = 90° - 56°\,15' = 33°\,45'$$

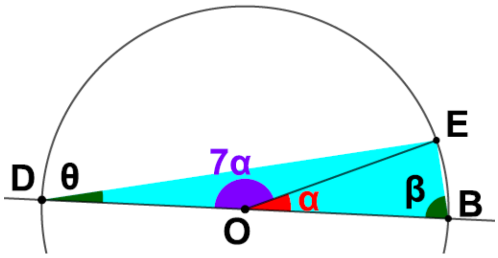


Maig 8-9: Siga una circumferència de centre O. Si arc EB = α i arc ED = 7α, trobeu els angles θ i β



Solució: Una vegada hem dibuixat l'angle central associat a l'arc $\widehat{EB}$, tenim:

$$180° = \widehat{DB} = \widehat{DE} + \widehat{EB} = 7\alpha + \alpha = 8\alpha \quad \Rightarrow \quad \alpha = \frac{180°}{8} = 22°\;30'$$



Per tant:

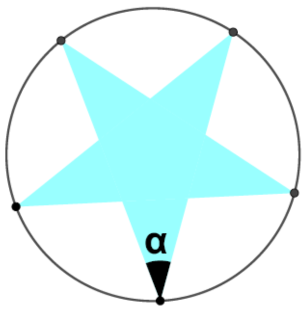
$$\theta = \frac{\alpha}{2} = \frac{22°\;30'}{2} = 11°\;15'$$

Per últim:

$$\beta = 90° - \theta = 78°\;45'$$

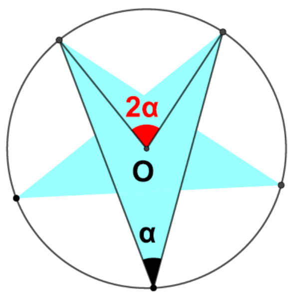
ja que el triangle ΔDEB és rectangle en E

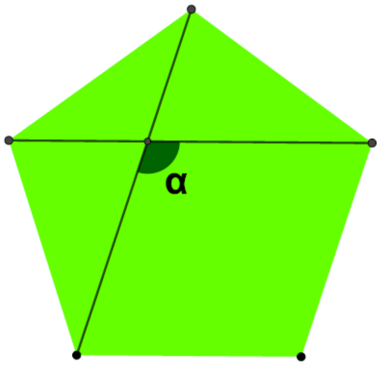
Maig 10: En una estrela regular de 5 puntes, trobeu α



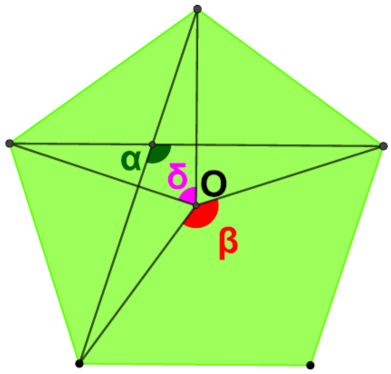
Solució: Una vegada obtingut el centre de la circumferència, tenim que α és l'angle inscrit associat a l'angle central:

$$2\alpha = \frac{360°}{5}; \quad \Rightarrow \quad \alpha = 36°$$



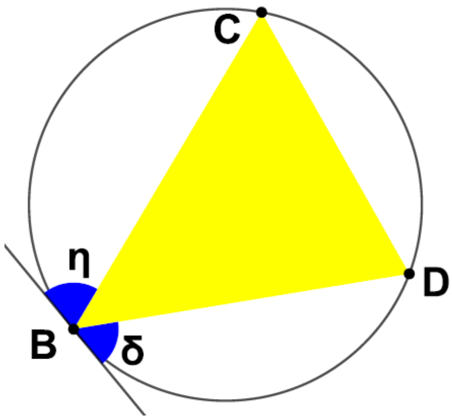


Maig 11: En un pentàgon regular, trobeu α



Solució: Una vegada obtingut el centre, O, de la circumferència que circumscriu el pentàgon regular, tenim que, α és l'angle interior associat als angles centrals β i δ, per la qual cosa:

$$\alpha = \frac{\delta + \beta}{2} = \frac{\frac{360°}{5} + 2 \cdot \frac{360°}{5}}{2} = 108°$$



Maig 12-13: En la figura hi ha una circumferència i una tangent a ella. Si η =70° i δ = 60°, trobeu els angles del triangle ΔBCD

Solució: Òbviament,

$$\angle B = 180° - (\eta + \delta) = 180° - (70° + 60°) = 50°$$

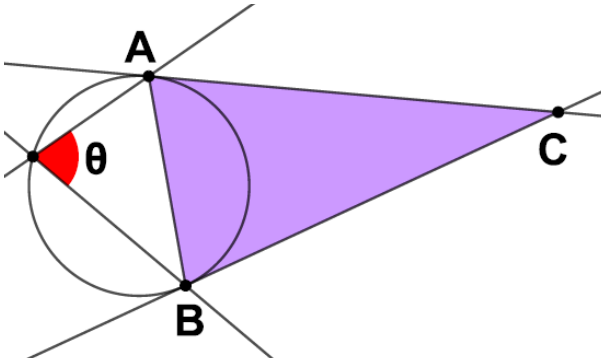
Per altra part, $\angle$C i δ abasten el mateix arc: $\widehat{BD}$, per tant:

$$\angle C = \delta = 60°$$

Per últim:

$$\angle D = 180° - (\angle B + \angle C) = 180° - (50° + 60°) = 70°$$

<u>Maig 14-15:</u> En la circumferència l'angle θ mesura 75°, trobeu els angles del triangle ΔABC.



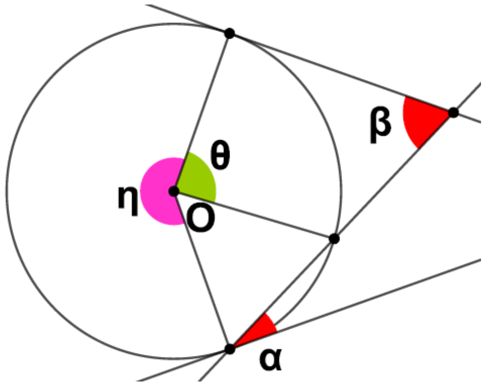
<u>Solució:</u> Els angles θ, $\angle A$ i $\angle B$ són iguals perquè abasten el mateix arc: $\widehat{AB}$. Per tant:

$$\theta = \angle A = \angle B = 75°.$$

Per últim:

$$\angle C = 180° - (\angle A + \angle B) = 180° - (75° + 75°) = 30°$$

<u>Maig 16-17:</u> Siga una circumferència de centre O. Si α = 27° i β = 66°, trobeu els angles η i θ.



<u>Solució:</u> Per un costat, α i 360° - ($\eta + \theta$) són iguals perquè abasten el mateix arc, per tant:

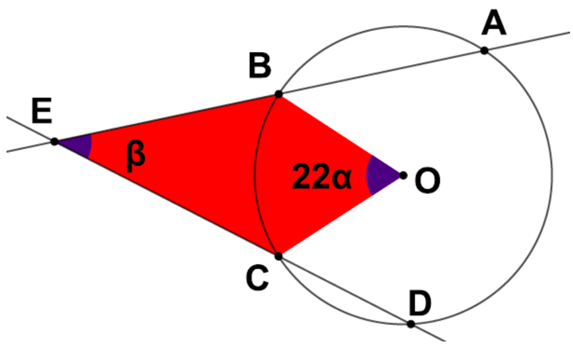
$$2 \cdot 27° = 360° - (\eta + \theta) \;\; \Rightarrow \;\; 306° = \eta + \theta \;\; (*)$$

Per altre costat, β és l'angle exterior associat a η i θ, per tant:

$$66° = \frac{\eta - \theta}{2} \;\; \Rightarrow \;\; 132° = \eta - \theta \;\; (**)$$

Per últim, (*) i (**) formen un sistema, fàcilment resoluble que proporciona: η = 219° i θ = 87°

<u>Maig 18-19:</u> En la figura hi ha una circumferència de centre O. Si arc DA = 48α, arc BADC = 98α, arc BC = 22α calculeu α i β



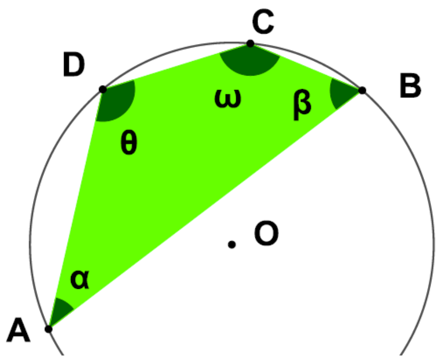
<u>Solució:</u> Tindrem:

$$\widehat{BC} + \widehat{BAC} = 360° \;\; \Rightarrow \;\; 22\alpha + 98\alpha = 360° \;\; \Rightarrow \;\; \alpha = 3°$$

Ara, β és l'angle extern associat a $\widehat{AD}$ i $\widehat{BC}$, per tant:

$$\beta = \frac{\widehat{AD} - \widehat{BC}}{2} = \frac{48\alpha - 22\alpha}{2} = 13 \cdot \alpha = 13 \cdot 3° = 39°$$

<u>Maig 20-21:</u> En la figura hi ha una circumferència de centre O. α, β i ω estan en raó 8:12:28. Trobeu α, β, ω y θ



<u>Solució:</u> Com que estem davant un quadrilàter cíclic, tenim:

$\alpha + \omega$ = 180° (1) i $\theta + \beta$ = 180° (2).

De l'enunciat:

$$\frac{\alpha}{\omega} = \frac{8}{28} \;\; \Rightarrow \;\; \alpha = \frac{8}{28}\omega \;\; (3)$$

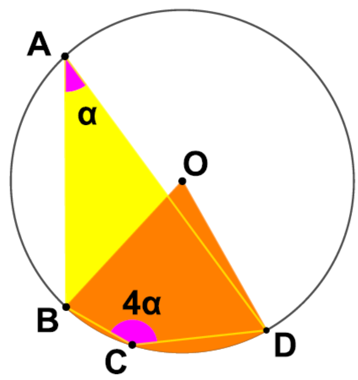
Les equacions (1) i (3) formen un sistema amb solució: ω = 140° i α = 40°.

De l'enunciat:

$$\frac{\alpha}{\beta} = \frac{8}{12} = \frac{40°}{\beta} \;\; \Rightarrow \;\; \beta = 60°$$

Per últim, de (2): $\theta = 180° - 60° = 120°$

Maig 22-23: En la figura tenim una circumferència de radi 25 cm. Trobar àrea i perímetre del sector circular de color taronja.



Solució: Tindrem:

$$360° = \widehat{BD} + \widehat{BAD} = 2\alpha + 8\alpha \;\Rightarrow\; \alpha = \frac{360°}{10} = 36°$$

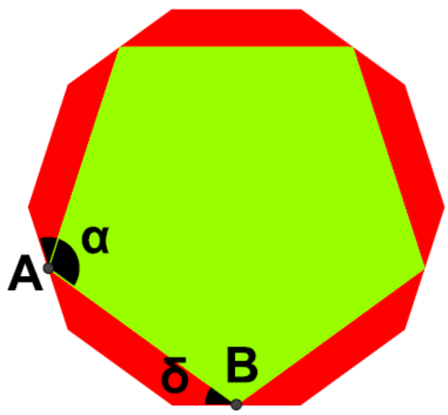
Per tant, l'angle del sector circular taronja és: $\angle BOD = 2\alpha = 2 \cdot 36° = 72°$. La seua àrea és, aleshores:

$$A = \frac{72 \cdot 25^2 \cdot \pi}{360} = 125\pi \text{ cm}^2$$

I el seu perímetre és:

$$P = 2r + \frac{2\pi \cdot 25 \cdot 72}{360} = 50 + 10\pi = 10(5 + \pi)$$

Maig 24: El pentàgon i el decàgon són regulars. Els punts A i B, són punts mitjans. Trobeu α i δ.

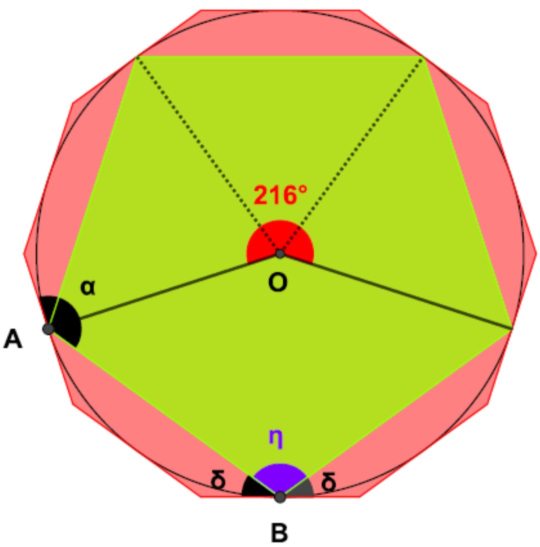


Solució: Una vegada trobat el centre, O, de la circumferència que inscriu al pentàgon, tindrem que η és l'angle inscrit associat a l'angle central

$$3\frac{360°}{5} = 216° \;\Rightarrow\; \eta = \frac{216°}{2} = 108°$$

I, per tant:

$$\delta + \eta + \delta = 180° \;\Rightarrow\; \delta = \frac{180° - 108°}{2} = 36°$$



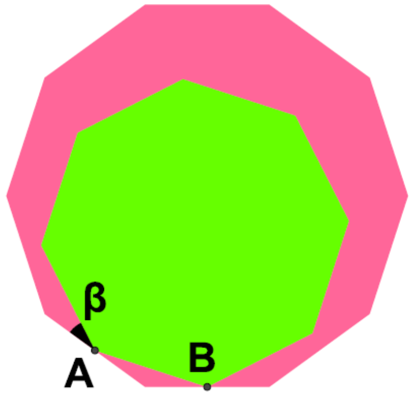
Per a α, tenim:

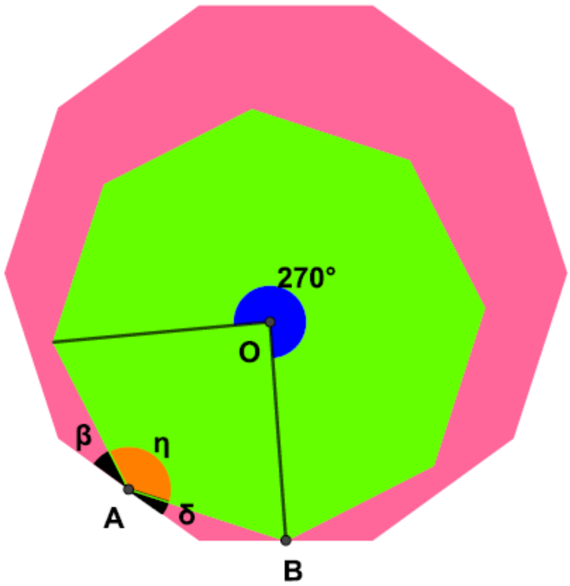
$$\alpha = 180° - \delta = 180° - 36° = 144°$$

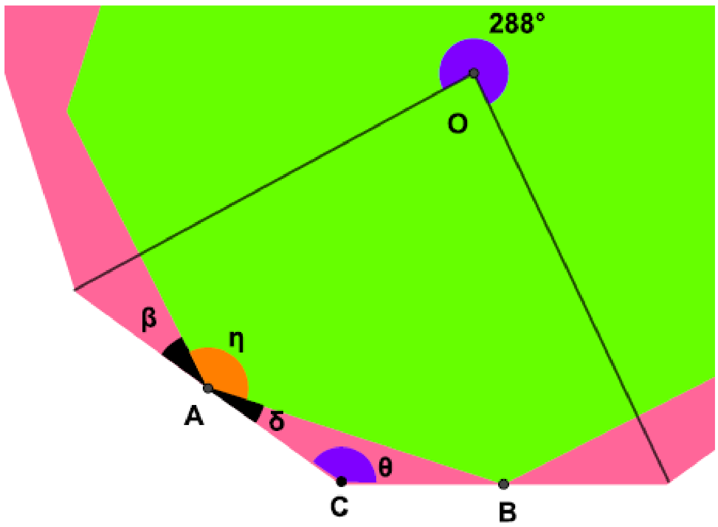
O també:

$$\alpha = \eta + \delta = 108° + 36° = 144°$$

Maig 25: En la següent il·lustració, A i B són els punts mitjans de dos costats consecutius d'un decàgon regular i els extrems d'un costat d'un octògon regular. Trobeu β







Solució: Considerem l'angle η, generat per les arestes amb extrem A de l'octògon regular. El seu angle central associat és:

$$6 \cdot \frac{360^\circ}{8} = 270^\circ$$

per tant:

$$\eta = \frac{270^\circ}{2} = 135^\circ$$

Considerem, ara, el triangle ΔABC, que és isòsceles, ja que AC = CB. En aquest triangle, l'angle θ és l'angle inscrit en el decàgon, associat a l'angle central

$$8 \cdot \frac{360^\circ}{10} = 288^\circ$$

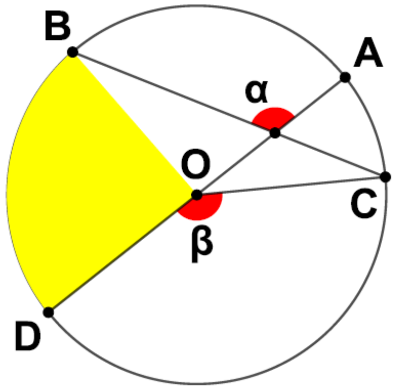
por la qual cosa:

$$\theta = \frac{288^\circ}{2} = 144^\circ \;\Rightarrow\; \delta = \frac{180^\circ - 144^\circ}{2} = 18^\circ$$

Per últim:

$$\beta + \eta + \delta = 180^\circ \;\Rightarrow\; \beta = 180^\circ - 135^\circ - 18^\circ = 27^\circ$$

Maig 26-27: En la figura hi ha una circumferència de centre O i radi 2020. Si α = 116° i β = 147°, trobeu àrea i perímetre del sector circular groc



Solució: Tenim:

$$116° = \alpha = \frac{\widehat{DC} + \widehat{AB}}{2} = \frac{\beta + \widehat{AB}}{2} \quad \Rightarrow \quad \widehat{AB} = 2 \cdot 116° - 147° = 85°$$

Per altra part:

$$\widehat{AC} = 180° - \widehat{DC} = 180° - 147° = 33°$$

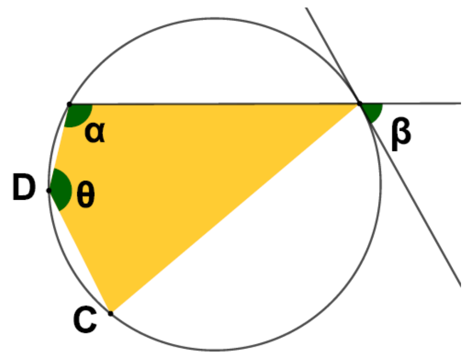
Per últim:

$$\widehat{DB} = 360° - \widehat{AB} - \widehat{AC} - \widehat{DC} = 360° - 85° - 33° - 147° = 95°$$

Per conseqüent:

$$A = \frac{95 \cdot \pi \cdot 2020^2}{360} = \frac{9690950}{9}\pi; \quad P = 2 \cdot 2020 + \frac{2 \cdot \pi \cdot 2020 \cdot 95}{360} = 4040 + 9595\pi$$

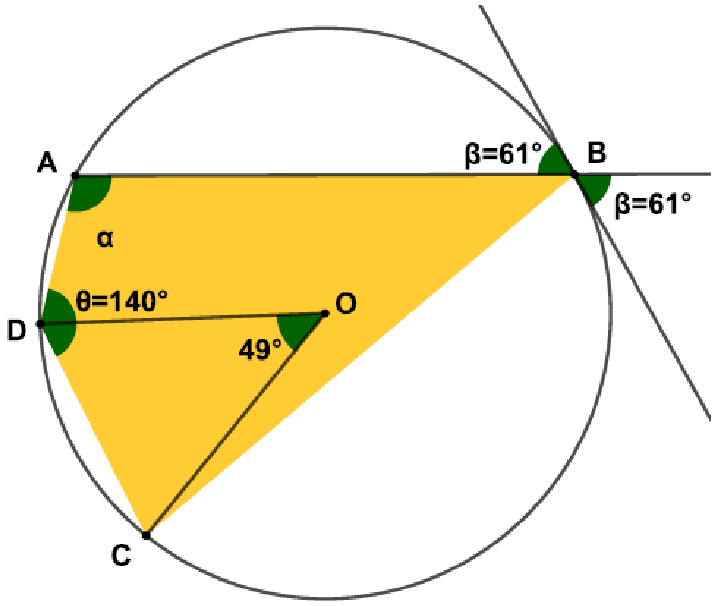
Maig 28-29: En la figura hi ha una circumferència i una tangent a ella. Si θ = 140°, arc DC = 49° i β = 61°, trobeu α.



Solució: Tindrem:

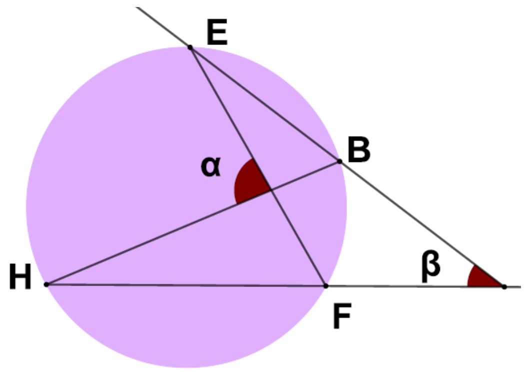
$$\alpha = \frac{\widehat{DCB}}{2} = \frac{\widehat{DC} + \widehat{CB}}{2} = \frac{49° + \widehat{CB}}{2} \; (*)$$

$$\widehat{CB} = \widehat{CBA} - \widehat{BA} = 2\theta - 2\beta = 2 \cdot 140° - 2 \cdot 61° = 158°$$



Per tant, en (*):

$$\alpha = \frac{49° + \widehat{CB}}{2} = \frac{49° + 158°}{2} = 103° \;\; 30'$$



Maig 30-31: En la figura tenim una circumferència. Trobeu arc FB i arc EH si α = 83° i β = 37°

Solució: Tindrem:

$$\left.\begin{array}{l} 83° = \alpha = \dfrac{\widehat{\mathrm{HE}} + \widehat{\mathrm{FB}}}{2} \\ 37° = \beta = \dfrac{\widehat{\mathrm{HE}} - \widehat{\mathrm{FB}}}{2} \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{c} \widehat{\mathrm{HE}} + \widehat{\mathrm{FB}} = 166° \\ \widehat{\mathrm{HE}} - \widehat{\mathrm{FB}} = 74° \end{array}\right\} (*)$$

Sumant totes dues equacions:

$$2 \cdot \widehat{\mathrm{HE}} = 240° \;\; \Rightarrow \;\; \widehat{\mathrm{HE}} = 120°$$

Substituint en la primera equació de (*):

$$\widehat{\mathrm{FB}} = 166° - 120° = 46°$$