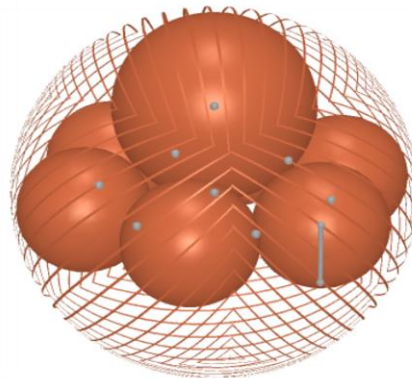


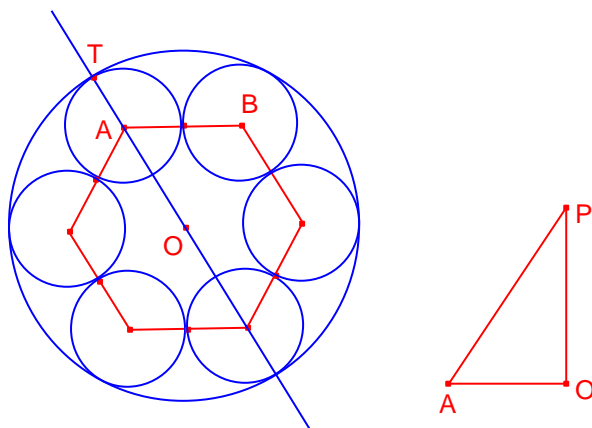
SOLUCIONS JUNE 2020

PROBLEMES PER A UTILITZAR PROGRAMES GEOMÈTRICS. Autor: RICARD PEIRÓ I ESTRUCH. IES "Abastos". València

June 1-2: Sis esferes de radi 1 estan col·locades de manera que els seus centres són els vèrtexs d'un hexàgon regular. Les sis esferes són internament tangents a una esfera de centre el centre de l'hexàgon. Una huitena esfera és externament tangent a les sis esferes de radi 1 i internament tangent a l'esfera més gran. Calculeu el radi de la huitena esfera.



Solució:



Considerem A i B els centres de dues esferes tangents de radis 1 i centres en un hexàgon regular de centre O. $\overline{OA} = 2$. El radi de l'esfera tangent exterior als 6 esferes i de centre O és: $\overline{OT} = 3$. El centre de la huitena esfera té el centre en la recta perpendicular al pla de l'hexàgon regular que passa pel centre O. Siga P el centre de l'esfera i s el seu radi. $\overline{OP} = 3 - s$, $\overline{AP} = 1 + s$. Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle

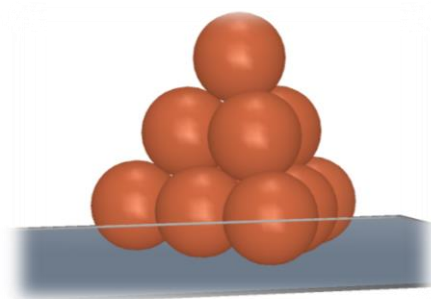
$\triangle AOP$:

Simplificant: $8s = 12$.

Resolent l'equació:

$$s = \frac{3}{2}$$

June 3-4: Hem col·locat deu esferes d'igual radi apilades en tres pisos (mirar il·lustració) sobre una superfície plana. Calcular la distància des del punt més alt de l'apilament a la superfície plana.



Solució:

Els centres de les quatre esferes vèrtexs de l'apilament són els vèrtexs d'un tetraedre regular d'arestes $4r$. La distància del punt més alt al pla tangent a les tres esferes és igual a $2r$ més l'altura del tetraedre regular d'aresta $4r$.

Siguen P, Q i R els centres de les esferes tangents a la superfície plana.

$$\overline{PQ} = \overline{QR} = \overline{PR} = 4r.$$

Siga O el centre de l'esfera superior. Siga A el centre de la cara PQR .

$$\overline{QR} = \frac{2}{3} 2\sqrt{3} r.$$

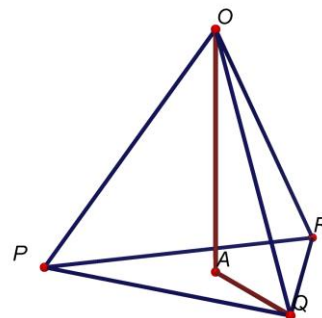
$$\overline{OQ} = 4r.$$

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $O\hat{A}Q$, l'altura del tetraedre regular és:

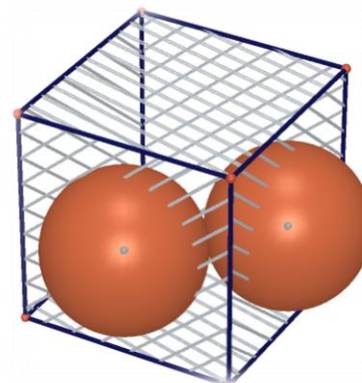
$$\overline{OA} = \sqrt{(4r)^2 - \left(\frac{4}{3}\sqrt{3}r\right)^2} = r\sqrt{\frac{8}{3}} = \frac{4r}{3}\sqrt{6}.$$

La distància del punt més alt a la superfície plana és:

$$4r + \overline{OA} = \left(2 + \frac{4\sqrt{6}}{3}\right)r.$$



Juny 5-6: Calculeu el radi de dues esferes iguals i tangents que tenen els seus centres en els centres de les cares adjacents d'un cub d'aresta 1.



Solució: Siguen P i Q els centres de les dues esferes tangents.

Siga r el seu radi.

$$\overline{PQ} = 2r.$$

Siga M el punt mitjà de l'aresta comuna als dues cares que contenen els centres P i Q .

$$\overline{PM} = \overline{QM} = \frac{1}{2}.$$

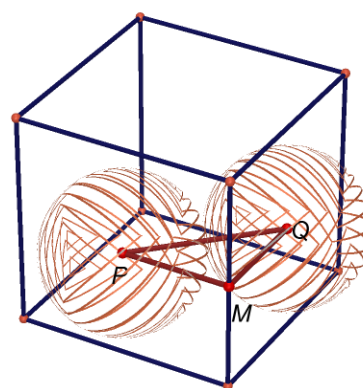
$$\angle AMQ = 90^\circ.$$

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle PMQ :

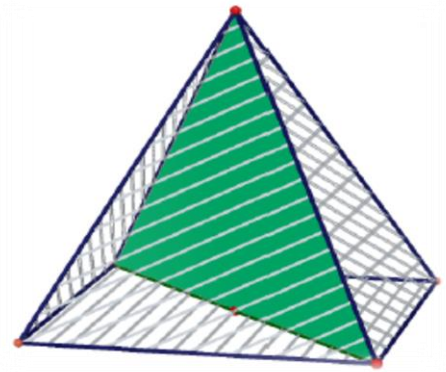
$$(2r)^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2$$

Resolent l'equació:

$$r = \frac{\sqrt{2}}{4}.$$



Juny 7-14: L'àrea de la figura que resulta de tallar una piràmide quadrangular regular per dues arestes laterals oposades és igual a 100 m^2 i l'aresta de la base és de 12 m . Determinar l'àrea total de la piràmide.



Solució: Siga $ABCDV$ la piràmide de base el quadrat $ABCD$ de costat 12 .

Siga O el centre del quadrat, projecció del vèrtex V sobre la base.

Siga $h = \overline{OV}$, l'altura de la piràmide. L'àrea del triangle isòsceles

$\triangle ACV$ es 100 m^2 .

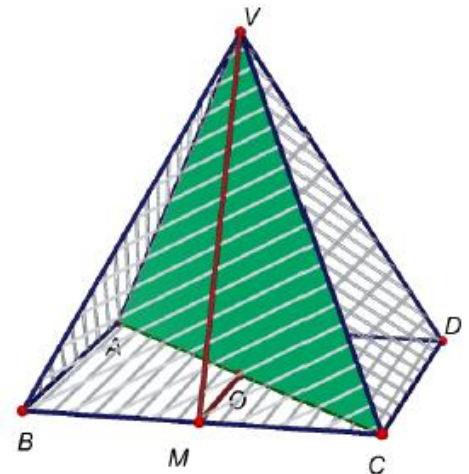
$$100 = \frac{12\sqrt{2} \cdot h}{2}$$

$$h = \frac{25\sqrt{2}}{3}$$

Siga M el punt mitjà de l'aresta \overline{BC} . Siga $\overline{MV} = a$ l'apotema de la piràmide. Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle

$\triangle MOV$:

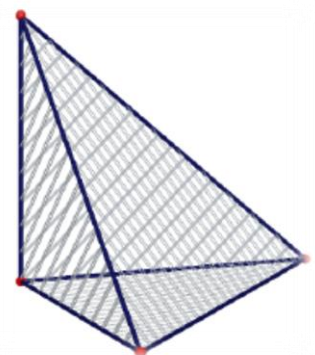
$$a = \sqrt{\left(\frac{25\sqrt{2}}{3}\right)^2 + 6^2} = \frac{\sqrt{1574}}{3}$$



L'àrea total de la piràmide és igual a l'àrea del quadrat $ABCD$ més 4 vegades l'àrea del triangle $\triangle BCV$:

$$S = 12^2 + 4 \cdot \frac{12 \cdot \frac{\sqrt{1574}}{3}}{2} = 144 + 8\sqrt{1574} \approx 461.39 \text{ m}^2$$

Juny 8-15: La base d'una piràmide és un triangle rectangle isòsceles d'hipotenusa 8 m . L'aresta lateral que conté al vèrtex de l'angle recte d'aquesta base és perpendicular a la base i mesura 5 m . Trobar l'àrea total de la piràmide



Solució: Siga la piràmide $ABCD$ de base el triangle rectangle isòsceles $\triangle ABC$, $A = 90^\circ$. $\overline{BC} = 8$. Aleshores:

$$\overline{AB} = \overline{AC} = \frac{\sqrt{2}}{2} \overline{BC} = 4\sqrt{2}$$

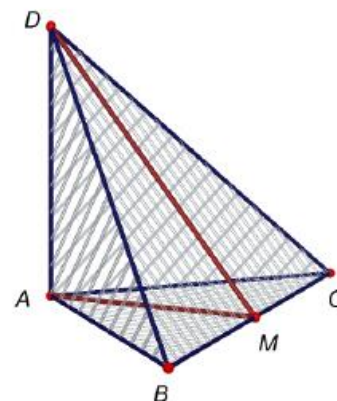
Siga M el punt mitjà de la hipotenusa del triangle $\triangle ABC$.

$$\overline{AM} = \overline{BM} = 4.$$

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{MAD}$

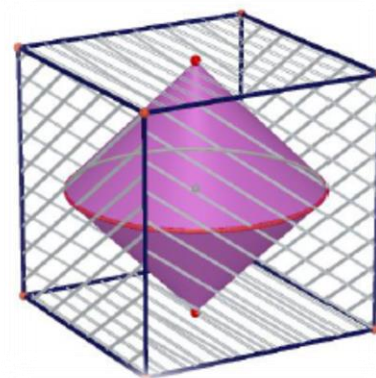
$$\overline{DM} = \sqrt{5^2 + 4^2} = \sqrt{41}.$$

L'àrea total de la piràmide és:



$$S_{ABCD} = S_{ABC} + 2 \cdot S_{ABD} + S_{BCD} = \frac{1}{2}(4\sqrt{2})^2 + 2 \cdot \frac{1}{2} 4\sqrt{2} \cdot 5 + \frac{1}{2} \cdot 8 \cdot \sqrt{41} = 16 + 20\sqrt{2} + 4\sqrt{41} \approx 69.90 \text{ m}^2$$

Juny 9-10: Un cub d'aresta 10 cm té inscrit un doble con que té els vèrtexs en els centres de dues cares oposades i les seues bases comunes són tangents a les altres quatre cares. Calcular la diferència entre els volums dels dos sòlids



Solució: Siga a l'aresta del cub. El volum del cub és:

$$V_{\text{cub}} = a^3.$$

El volum del doble con és igual al volum del con de radi $\frac{1}{2}a$ i altura a.

$$V_{\text{con}} = \frac{1}{3} \pi \left(\frac{1}{2}a\right)^2 a = \frac{\pi}{12} a^3$$

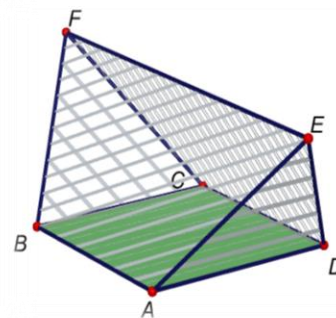
La diferència entre els volums dels dos sòlids és:

$$V = V_{\text{cub}} - V_{\text{con}} = \left(1 - \frac{\pi}{12}\right) a^3.$$

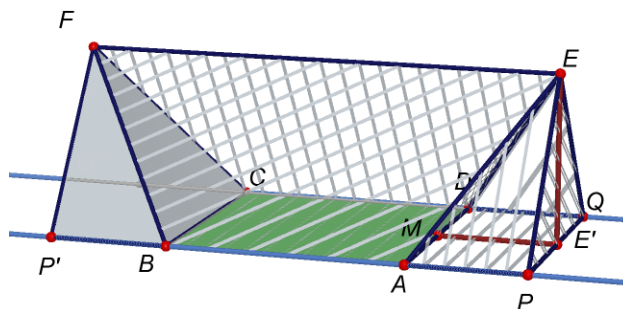
Si $a = 10$:

$$V = \left(1 - \frac{\pi}{12}\right) 10^3 \approx 738.2 \text{ cm}^3.$$

Juny 11-12: En la figura, ABCD es un quadrat de costat $6\sqrt{2}$. EF és paral·lel al quadrat i té longitud $12\sqrt{2}$. Les cares BCF i ADE són triangles equilàters. Calculeu el volum del sòlid ABCDEF



Solució:



Siguen les rectes AB i CD. Siga M el punt mitjà de l'aresta \overline{AD} . Siga E' la projecció de E sobre el pla ABCD. El pla perpendicular a la recta AB que passa per E talla les rectes AB i CD en els punts P i Q, respectivament. El pla perpendicular a la recta AB que passa per F talla a les rectes AB i CD en els punts P' i Q', respectivament.

$$\overline{PP'} = \overline{EF} = 12\sqrt{2}$$

$$\overline{AP} = \overline{BP'} = \frac{1}{2}(\overline{EF} - \overline{AB}) = 3\sqrt{2}.$$

El volum del sòlid ABCDEF es igual al volum del prisma PQEP'Q'F menys dos vegades el volum de la piràmide APQDE. Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\triangle AME$:

$$\overline{EM} = \sqrt{(6\sqrt{2})^2 - (3\sqrt{2})^2} = 3\sqrt{6}.$$

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\triangle ME'E$:

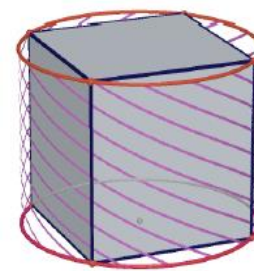
$$\overline{EE'} = \sqrt{(3\sqrt{6})^2 - (3\sqrt{2})^2} = 6.$$

El volum del sòlid ABCDEF és:

$$S_{ABCDEF} = \left(\frac{1}{2} \overline{PQ} \cdot \overline{EE'} \cdot \overline{EF} \right) - 2 \left(\frac{1}{3} \overline{AP} \cdot \overline{PQ} \cdot \overline{EE'} \right).$$

$$S_{ABCDEF} = \left(\frac{1}{2} 6\sqrt{2} \cdot 6 \cdot 12\sqrt{2} \right) - 2 \left(\frac{1}{3} 3\sqrt{2} \cdot 6\sqrt{2} \cdot 6 \right) = 288.$$

Juny 13: Un cilindre d'1 m de diàmetre està circumscribit en un cub. Calcular el volum dels dos cossos.



Solució: Siga a l'aresta del cub. El volum del cub és:

$$V_{\text{cub}} = a^3.$$

La diagonal d'una cara del cub es igual al diàmetre del cilindre: $a\sqrt{2} = 1 \Rightarrow a = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

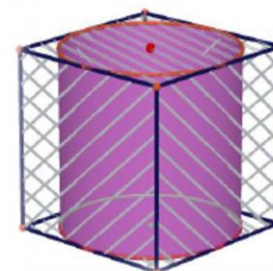
El cilindre té radi $\frac{1}{2}$ i alçada a . El volum del cilindre és:

$$V_{\text{cilindre}} = \pi \left(\frac{1}{2}\right)^2 a = \frac{\pi\sqrt{2}}{8}.$$

El volum del cub és:

$$V_{\text{cub}} = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^3 = \frac{\sqrt{2}}{4}.$$

Juny 16: Un cub d'aresta 1m està circumscribit a un cilindre. Calculeu el volum dels dos sòlids



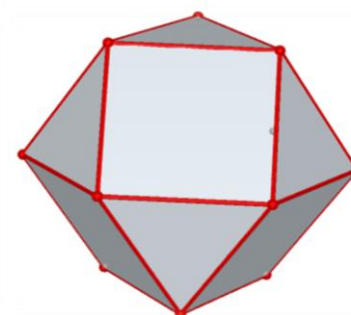
Solució: El radi del cilindre es igual a la meitat de l'aresta del cub i l'alçada es igual a l'aresta.

$$V_{\text{cilindre}} = \pi \left(\frac{1}{2}\right)^2 \cdot 1 = \frac{\pi}{4}$$

El volum del cub és:

$$V_{\text{cub}} = 1^3 = 1$$

Juny 17-18: Un cuboctaedre és un poliedre semiregular format per 8 triangles equilàters i 6 quadrats de costats iguals. Si el cuboctaedre té arestes d'1 cm, calcular la distància entre dues cares triangulars oposades.



Solució: Sigui $\triangle ABC$ una cara triangular equilàtera del cubooctaedre: $\overline{AB} = 1$. El cubooctaedre està inscrit en un cub, tal que els vèrtexs del cubooctaedre són els punts mitjans de les arestes del cub. Siguen D i D' vèrtexs oposats del cub tal que la recta DD' és perpendicular a la cara $\triangle ABC$ del cubooctaedre. La recta DD' talla la cara $\triangle ABC$ en el punt P. Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\triangle ABD$:

$$\overline{AD} = \frac{\sqrt{2}}{2} \overline{AB} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

L'aresta del cub és: $a = 2 \cdot \overline{AD} = \sqrt{2}$. La diagonal $\overline{DD'}$ del cub mesura:

$$\overline{DD'} = a\sqrt{3} = \sqrt{6}.$$

P és el centre del triangle equilàter $\triangle ABC$:

$$\overline{BP} = \frac{\sqrt{3}}{3} \overline{AB} = \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

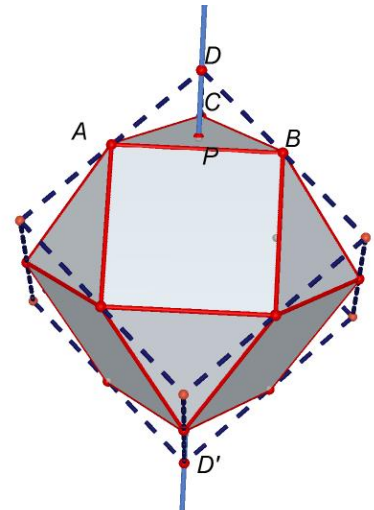
Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\triangle BPD$:

$$\overline{PD} = \sqrt{\overline{AD}^2 - \overline{BP}^2} = \sqrt{\frac{1}{2} - \frac{1}{3}} = \frac{\sqrt{6}}{6}.$$

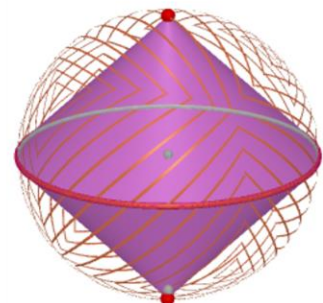
La distància entre dos cares triangulars oposades del cubooctaedre és:

$$d = \overline{DD'} - 2 \cdot \overline{PD} = \sqrt{6} - 2 \cdot \frac{\sqrt{6}}{6} = \frac{2}{3} \sqrt{6}.$$

La distància entre dos cares quadrades oposades es igual a l'aresta del cub.



Juny 19-20: En una esfera de radi R s'ha inscrit un doble con. Calcular la proporció entre els volums i les àrees del doble con i l'esfera



Solució: Comencem amb els volums. El con de radi R i altura R té volum:

$$V_{\text{con}} = \frac{1}{3} \pi R^3.$$

El volum del doble con és:

$$V_{2\text{con}} = \frac{2}{3} \pi R^3 .$$

El volum de l'esfera és:

$$V_{\text{esfera}} = \frac{4}{3} \pi R^3 .$$

La proporció entre els volums del doble con i l'esfera és:

$$\frac{V_{2\text{con}}}{V_{\text{esfera}}} = \frac{\frac{2}{3} \pi R^3}{\frac{4}{3} \pi R^3} = \frac{1}{2} .$$

Seguim amb les àrees. Aplicant el teorema de Pitàgores, la generatriu del con de radi R i altura R és:

$$g = R\sqrt{2} .$$

L'àrea lateral del con de ràdio R i altura R és:

$$S_{L\text{con}} = \pi Rg = \pi\sqrt{2}R^2$$

L'àrea del doble con és:

$$S_{2L\text{con}} = \pi Rg = 2\pi\sqrt{2}R^2 .$$

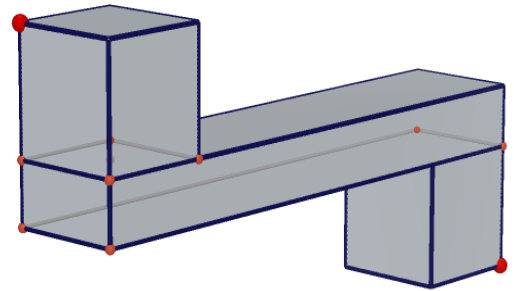
L'àrea de l'esfera és:

$$S_{\text{esfera}} = 4\pi R^2$$

La proporció entre les àrees del doble con i l'esfera és.

$$\frac{S_{2L\text{con}}}{S_{\text{esfera}}} = \frac{2\pi\sqrt{2}R^2}{4\pi R^2} = \frac{\sqrt{2}}{2} .$$

Juny 21-28: En la figura hi ha representat un conducte d'aire de dimensions 1x2x10 i en els seus extrems dos cubs de dimensions 2x2x2. El conducte està completament buit i fet amb xapa. Una aranya va per l'interior des d'un extrem (punt roig) fins a l'altre extrem (punt roig). Esbrinar la distància del camí més curt que pot recórrer l'aranya (CruX Mathematicorum CC327)



Solució: El camí més curt és el format per la línia poligonal ABCDE.

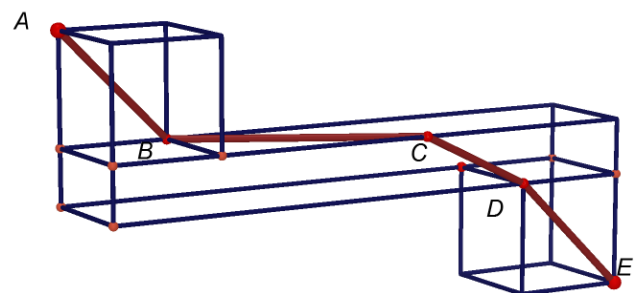
Fent el desenvolupament pla del conducte:

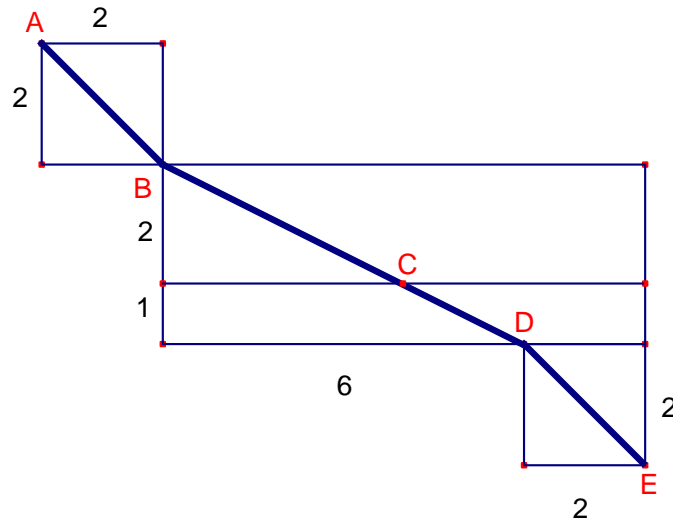
Aplicant el teorema de Pitàgores:

$$\overline{AB} = \overline{DE} = 2\sqrt{2} .$$

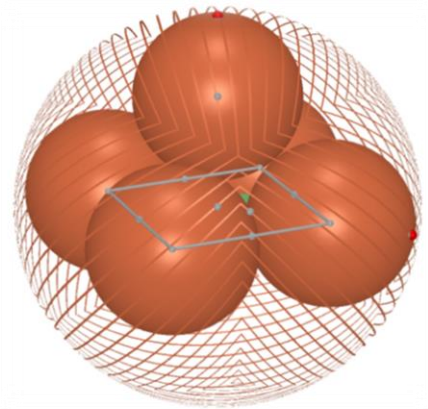
$$\overline{BD} = 3\sqrt{5} .$$

$$\overline{AB} + \overline{BD} + \overline{DE} = 4\sqrt{2} + 3\sqrt{5} = \sqrt{32} + \sqrt{45} .$$

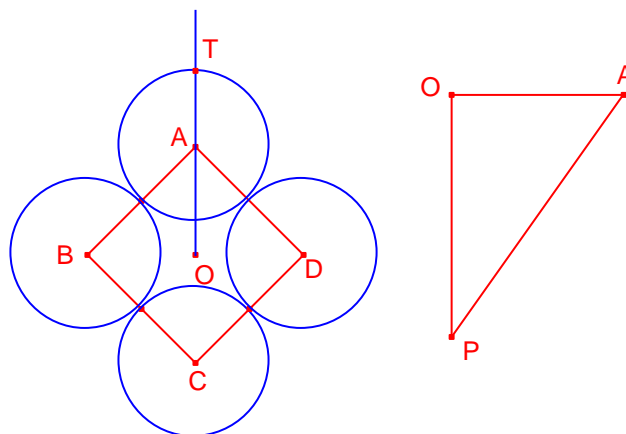




Juny 22-23: Quatre esferes de radi 1 es posicionen de manera que els seus centres estan en els vèrtexs d'un quadrat de costat 2. Les quatre esferes són internament tangents a una esfera més gran amb centre el centre del quadrat. Una sisena esfera és externament tangent a les quatre més xicotetes i internament tangent a la més gran. Calcular el radi d'aquesta sisena esfera



Solució:



Considerem A, B, C i D els centres dels quatre esferes tangents de radis 1 i vèrtexs d'un quadrat de centre O.

$$\overline{OA} = \sqrt{2} .$$

El radi de l'esfera tangent exterior a les esferes i de centre O és:

$$\overline{OT} = 1 + \sqrt{2} .$$

El centre de la sisena esfera està en la recta perpendicular al pla del quadrat que passa pel centre O. Siga P el centre d'aqueixa esfera i s el seu radi.

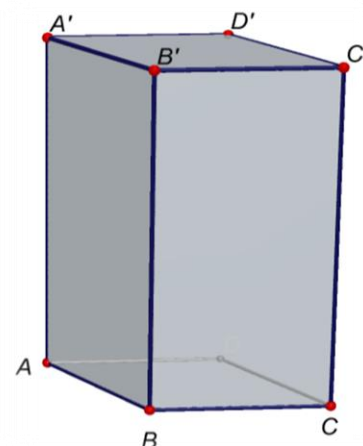
$$\overline{OP} = 1 + \sqrt{2} - s , \overline{AP} = 1 + s .$$

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\triangle AOP$:

$$(s+1)^2 = (\sqrt{2})^2 + (1+\sqrt{2}-s)^2.$$

Resolent l'equació: $s = 1$.

Juny 24-25: La base d'un paral·lelepípede recte és un rombe de costat 12 cm. Un dels angles de la base mesura 120° i l'aresta lateral del paral·lelepípede mesura 25 cm. Calcular les longituds de les diagonals, l'àrea total i el volum del paral·lelepípede.



Solució:

Siga $ABCA'B'C'D'$ el paral·lelepípede recte de base el rombe ABCD

$$\overline{AB} = 12, \angle B = \angle D = 120^\circ, \angle A = \angle C = 60^\circ$$

i arista lateral $\overline{AA'} = 25$.

$$\overline{AC} = 12\sqrt{3}, \overline{BD} = 12.$$

$$S_{ABCD} = \frac{12 \cdot 12\sqrt{3}}{2} = 72\sqrt{3} \approx 124.71 \text{ cm}^2.$$

El volum del paral·lelepípede és:

$$V = S_{ABCD} \cdot \overline{AA'} = 25 \cdot 72\sqrt{3} = 1800\sqrt{3} \approx 3117.69 \text{ cm}^3.$$

L'àrea total del paral·lelepípede és:

$$S = 2 \cdot S_{ABCD} + 4 \cdot S_{ABBA'} = 2 \cdot 72\sqrt{3} + 4 \cdot 12 \cdot 25 = 1200 + 144\sqrt{3} \approx 1449.42 \text{ cm}^2.$$

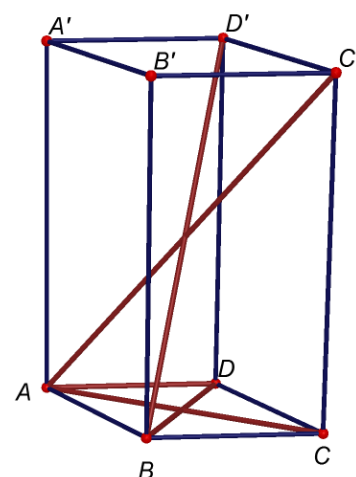
Siguen $\overline{AC'}$ la diagonal major, $\overline{BD'}$ la diagonal menor.

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\triangle ACC'$:

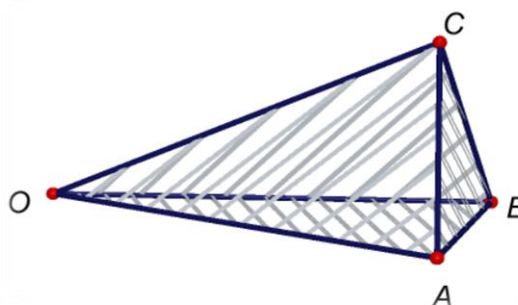
$$\overline{AC'} = \sqrt{(12\sqrt{3})^2 + 25^2} = \sqrt{1057} \approx 32.51 \text{ cm}.$$

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\triangle BDD'$:

$$\overline{BD'} = \sqrt{12^2 + 25^2} = \sqrt{769} \approx 27.73 \text{ cm}.$$



Juny 26-27: El vèrtex O d'un triedre, forma amb les tres cares iguals angles de 30° i les tres arestes que salen del vèrtex mesuren 12 cm. Calcular l'àrea total i el volum del tetraedre que es forma



Solució: Les tres cares que formen el triedre de vèrtex O són triangles isòsceles, per tant, el tetraedre (de base el $\triangle ABC$) és recte. A més, el triangle $\triangle ABC$ és equilàter.

Aplicant el teorema del cosinus al triangle $\triangle OAB$:

$$\overline{AB}^2 = 12^2 + 12^2 - 2 \cdot 12 \cdot 12 \cdot \cos 30^\circ .$$

$$\overline{AB}^2 = 144(2 - \sqrt{3}).$$

L'àrea del triangle equilàter $\triangle ABC$ és:

$$S_{ABC} = \frac{\sqrt{3}}{4} \overline{AB}^2 = 36(-3 + 2\sqrt{3}).$$

L'àrea del triangle $\triangle OAB$ és:

$$S_{OAB} = \frac{1}{2} \cdot 12 \cdot 12 \cdot \sin 30^\circ = 36 .$$

L'àrea total del tetraedre OABC és:

$$S = S_{ABC} + 3 \cdot S_{OAB} = 36(-3 + 2\sqrt{3}) + 3 \cdot 36 = 72\sqrt{3} \approx 124.71 \text{cm}^2 .$$

La projecció del vèrtex O sobre la base $\triangle ABC$ és el baricentre G del triangle equilàter.

Siga M el punt mitjà del costat \overline{AB} .

$$\overline{CM} = \frac{\sqrt{3}}{2} \overline{AB} = 6\sqrt{6 - 3\sqrt{3}} .$$

Aplicant la propietat del baricentre:

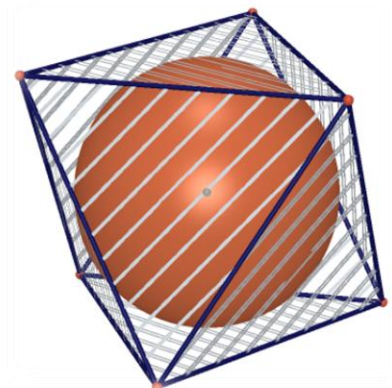
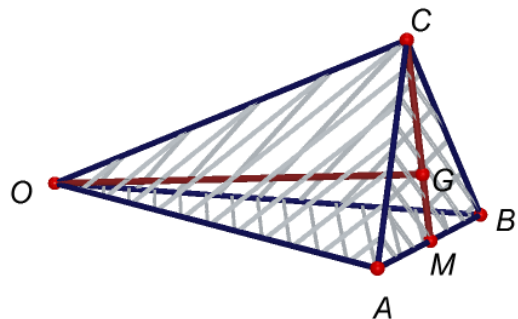
$$\overline{CG} = \frac{2}{3} \overline{CM} = 4\sqrt{6 - 3\sqrt{3}} .$$

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\triangle OPC$:

$$\overline{OP} = \sqrt{12^2 - (4\sqrt{6 - 3\sqrt{3}})^2} = 4\sqrt{3 + 3\sqrt{3}} .$$

El volum del tetraedre és:

$$V = \frac{1}{3} S_{ABC} \cdot \overline{OP} = \frac{1}{3} 36(-3 + 2\sqrt{3}) 4\sqrt{3 + 3\sqrt{3}} = 48(-3 + 2\sqrt{3})\sqrt{3 + 3\sqrt{3}} \approx 63.78 \text{cm}^3 .$$



Juny 29-30: L'aresta d'un octaedre regular mesura 12 cm. Calcular el radi i l'àrea de l'esfera inscrita en ell.

Solució: Quatre vèrtexs de l'octaedre (que determinen un pla), determinen un quadrat de costat 12. El centre O d'aquest quadrat és el centre de l'esfera inscrita i circumscrita a l'octaedre. La diagonal d'aquest quadrat és igual al diàmetre de l'esfera circumscrita. Llavors el radi de l'esfera circumscrita és:

$$R = \overline{OA} = 6\sqrt{2}$$

Considerem la cara $\triangle ABC$ del octaedre regular. La projecció del centre O sobre la cara $\triangle ABC$ és el baricentre G del triangle equilàter $\triangle ABC$. El radi de l'esfera inscrita al octaedre és $r = \overline{OG}$

$$\overline{AG} = \frac{\sqrt{3}}{3} \overline{AB} = 4\sqrt{3}.$$

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\triangle AGO$:

$$r = \sqrt{(6\sqrt{2})^2 - (4\sqrt{3})^2} = 2\sqrt{6}.$$

L'àrea de l'esfera inscrita al octaedre és:

$$S = 4\pi r^2 = 96\pi \approx 3018.59\text{cm}^2.$$

