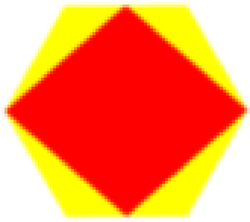
SOLUCIONES SEPTIEMBRE 2020

Problemas para bachillerato. 16-18 años. Autores: Colectivo “Concurso de Primavera”. Comunidad de Madrid. XXI Concurso de Primavera. 2017

https://www.concursoprimavera.es/#libros

Septiembre 1: El área del rombo inscrito en el hexágono regular es 24 cm^2. Hallar el área del hexágono regular



Solución: Sea r el radio de la circunferencia circunscrita al hexágono regular (e igual al lado del hexágono). Entonces el rombo se descompone en cuatro triángulos rectángulos de catetos r y $\frac{r\sqrt{3}}{2}$. Por tanto:

$$A_{\text{rombo}} = 4 \cdot \frac{r \cdot \frac{r \cdot \sqrt{3}}{2}}{2} = r^2 \cdot \sqrt{3} = 24$$

Por último, podemos descomponer el hexágono en seis triángulos equiláteros de lado r. Por tanto:

$$\mathbf{A_{hexagono}} = 6 \cdot A_{\Delta} = 6 \cdot \frac{r \cdot \frac{r \cdot \sqrt{3}}{2}}{2} = \frac{6}{4} \cdot r^2 \cdot \sqrt{3} = \frac{6}{4} \cdot 24 = \mathbf{36\ cm^2}$$

Septiembre 2: Calcular la cifra de las unidades de la suma de todos los productos de ocho en ocho de los números del 1 al 9

Solución: La suma del enunciado es:

$$\sum_{k=1}^{9} \frac{9!}{k}$$

Cada sumando de la anterior suma contiene, al menos, un factor 2 y un factor 5 (y por tanto la cifra de las unidades de cada uno de ellos es 0) excepto el sumando correspondiente a k = 5 que es: 9·8·7·6·4·3·2. Agrupando de dos en dos los factores del producto anterior y teniendo en cuenta únicamente la cifra de las unidades de cada producto:

$$9·8·7·6·4·3·2 \rightarrow 2·2·2·2 \rightarrow 4·4 \rightarrow 6$$

Septiembre 3: Si a, b y c son enteros positivos con

abc + ab + ac + bc + a + b + c = 104

¿cuánto vale $a^2+b^2+c^2$?

Solución: Tenemos sucesivamente:

$$abc + ab + ac + bc + a + b + c = ab(c + 1) + b(c + 1) + a(c + 1) + c = 104$$

Sumando en ambos lados 1, llegamos a:

$$ab(c + 1) + b(c + 1) + a(c + 1) + c + 1 = 105$$

$$(ab + b + a + 1)\,(c + 1) = 105 = 3\cdot5\cdot7$$

$$(a + 1)\,(b + 1)\,(c + 1) = 105 = 3\cdot5\cdot7$$

$$a\cdot b\cdot c = 2\cdot4\cdot6$$

$$a^2 + b^2 + c^2 = 2^2 + 4^2 + 6^2 = 56$$

<u>Septiembre 4:</u> ¿Cuántos puntos de la circunferencia $x^2 + y^2 = 50$ tienen al menos una de las coordenadas enteras?

<u>Solución:</u> hay 30 puntos en los que x es entero: desde x = –7 hasta x = 7 (incluyendo x = 0). Son 15 abscisas enteras. Consideramos el doble porque con la misma abscisa hay dos puntos con ordenadas opuestas. Igualmente hay 30 puntos con y entera. Pero hay 12 puntos que tienen tanto x como y enteras y que han sido contadas dos veces: (±5; ±5); (±1; ±7); (±7; ±1). Así pues, la respuesta es: 30 + 30 – 12 = 48

<u>Septiembre 5:</u> Si

$$\left.\begin{array}{r}\mathbf{tg\,x + tg\,y = 25}\\ \mathbf{cotg\,x + cotg\,y = 30}\end{array}\right\}$$

¿cuánto vale tg (x+y)?

<u>Solución:</u> De las relaciones trigonométricas del ángulo suma y resta tenemos:

$$\mathrm{tg}(x + y) = \frac{\mathrm{tgx} + \mathrm{tgy}}{1 - \mathrm{tgx}\cdot\mathrm{tgy}} = \frac{25}{1 - \mathrm{tgx}\cdot\mathrm{tgy}}$$

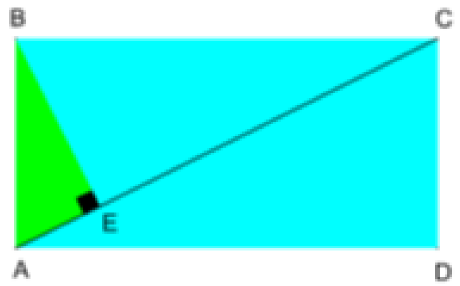
De la segunda ecuación:

$$30 = \frac{1}{\mathrm{tgx}} + \frac{1}{\mathrm{tgy}} = \frac{\mathrm{tgy} + \mathrm{tgx}}{\mathrm{tgx}\cdot\mathrm{tgy}} = \frac{25}{\mathrm{tgx}\cdot\mathrm{tgy}} \quad\Rightarrow\quad \mathrm{tgx}\cdot\mathrm{tgy} = \frac{25}{30} = \frac{5}{6}$$

Por último:

$$\mathrm{tg}(x + y) = \frac{25}{1 - \mathrm{tgx}\cdot\mathrm{tgy}} = \frac{25}{1 - \frac{5}{6}} = 150$$

Septiembre 7-8: Los lados del rectángulo de la figura son uno el doble del otro. Si BE⊥AC. ¿Cuál es el cociente entre el área del triángulo ABE y el área del rectángulo ABCD?



Solución: Si consideramos AB = 1 entonces AD = 2 y AC = $\sqrt{5}$. Además, tenemos: ∆AEB ≅∆ABC (al ser ambos rectángulos y tener en común el ángulo en A). Por tanto:

$$\frac{1}{\sqrt{5}} = \frac{BE}{2} \Rightarrow BE = \frac{2}{\sqrt{5}} \Rightarrow AE = \sqrt{1^2 - BE^2} = \sqrt{1 - \frac{4}{5}} = \frac{1}{\sqrt{5}} \Rightarrow A_{\Delta ABE} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \frac{2}{\sqrt{5}} = \frac{1}{5}$$

$$\frac{A_{\Delta ABE}}{A_{ABCD}} = \frac{\frac{1}{5}}{2 \cdot 1} = \frac{1}{10}$$

Septiembre 9: Sea dado z = 9 + bi con b>0. Si las partes imaginarias de z^2 y z^3 son iguales, ¿cuál es el valor de b?

Solución: Tenemos:

$$z^2 = (9 + bi)^2 = 81 - b^2 + 18bi$$
$$z^3 = (9 + bi)^3 = 729 - 27b^2 + (162b + 81b - b^3)i$$

Como las partes imaginarias de ambos complejos son iguales, tenemos:

$$18b = 243b - b^3 \quad \Rightarrow \quad 0 = -b^3 + 225b \quad \Rightarrow \quad b \in \{0, -15, 15\}$$

Y como b > 0, tenemos b = 15

Septiembre 10: Resolver en ℕ

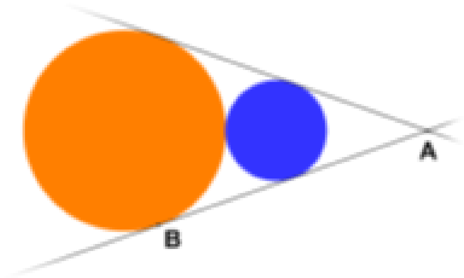
$$\left.\begin{array}{r} \mathbf{p + q \leq 100} \\ \dfrac{\mathbf{p + q^{-1}}}{\mathbf{p^{-1} + q}} = \mathbf{17} \end{array}\right\}$$

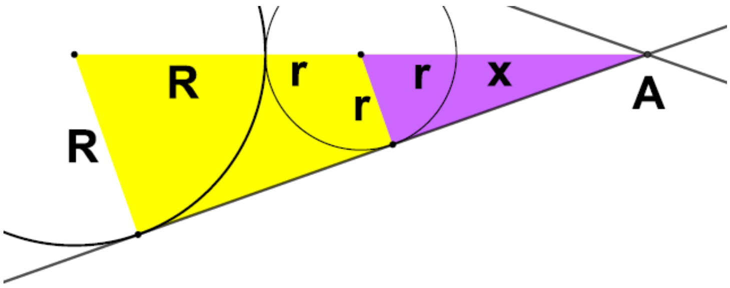
Solución: De la ecuación tenemos:

$$\frac{p + q^{-1}}{p^{-1} + q} = 17; \quad \frac{p + \frac{1}{q}}{\frac{1}{p} + q} = 17; \quad \frac{\frac{pq + 1}{q}}{\frac{1 + pq}{p}} = 17; \quad \frac{p}{q} = 17; \quad p = 17q$$

Y como p + q $\leq$ 100, tenemos que 18q $\leq$ 100. De donde q∈{1, 2, 3, 4, 5} y p = 17q ∈{17, 34, 51, 68, 85}. En definitiva: (q,p) ∈{(1,17); (2, 34); (3, 51); (4, 68); (5, 85)}

Septiembre 11-12: En la figura hay dos circunferencias tangentes entre sí y tangentes a dos rectas que se cortan en A. Si B es un punto de tangencia, hallar AB en función de los radios de las circunferencias





Solución: Los triángulos de la figura adjunta son semejantes (pues son rectángulos al ser radio y tangente perpendiculares y tener el ángulo en A común), por tanto:

$$\frac{x+r}{r}=\frac{x+2r+R}{R}$$

De donde, obtenemos:

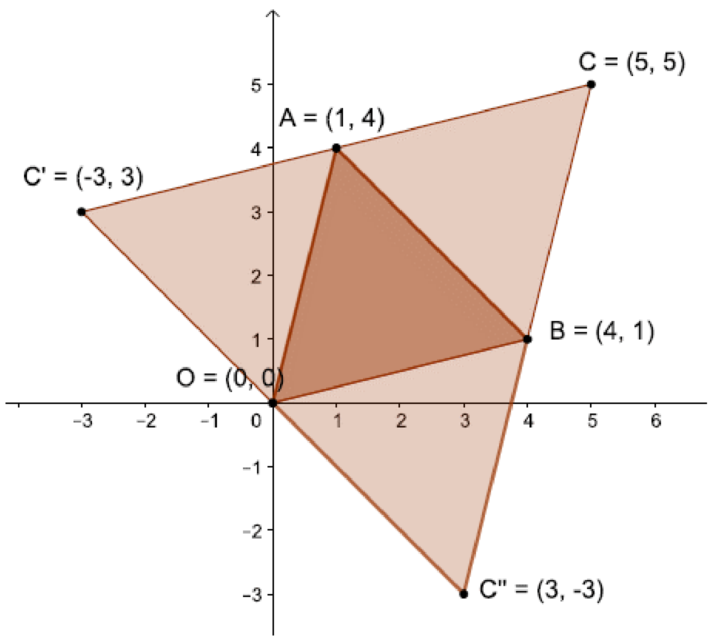
$$x=\frac{2r^2}{R-r}$$

Por último:

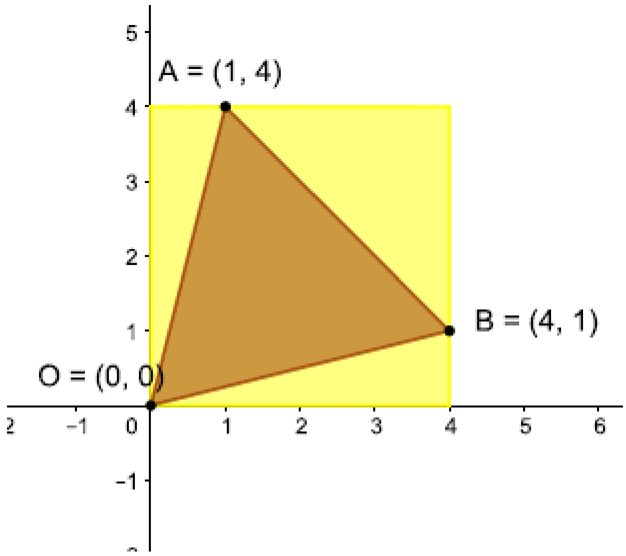
$$AB=d(A,B)=\sqrt{(R+2r+x)^2-R^2}=\sqrt{\left(R+2r+\frac{2r^2}{R-r}\right)^2-R^2}=\cdots=\frac{2R\sqrt{Rr}}{R-r}$$

Septiembre 14: Tres vértices de un paralelogramo son los puntos O (0,0); A (1,4) y B (4,1). Calcular el área del paralelogramo.

Solución: Son posibles tres paralelogramos: OABC, OABC' y OABC''. Todos ellos tienen la misma área que es el doble del área del triángulo ΔOAB



Para calcular el área del triángulo ΔOAB, tenemos:



$$A_{\Delta ABO} = 4^2 - \frac{1}{2}(4\cdot 1) - \frac{1}{2}(4\cdot 1) - \frac{1}{2}(3\cdot 3) = \frac{15}{2} \quad \Rightarrow \quad A = \frac{15}{2}\cdot 2 = 15$$

Septiembre 15: Resolver en $\mathbb{N}$

$$\left.\begin{array}{c} \mathbf{1 \leq a \leq 10} \\ \mathbf{a^{2020} + a^{2021} = \dot{\hat{5}}} \end{array}\right\}$$

Solución: Veremos si se cumple o no la segunda ecuación para cada uno de los posibles valores de a, que según la primera doble inecuación son, $a \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$. Utilizaremos el hecho de que $a^{2020} + a^{2021} = a^{2020} \cdot (1 + a)$

a = 1 no es solución pues, para a = 1, tenemos:

$1^{2020} \cdot (1 + 1) = 1\cdot 2 = 2$, que no es múltiplo de 5

a = 2 no es solución pues, para a = 2 tenemos:

$2^{2020} \cdot 3$ no es múltiplo de 5 ya que 2^{2020} acaba en 6 y no en 0 o 5, pues

n	2^n acaba en
1, 5, 9, …… $\equiv 1(4)$	2
2, 6, 10,… $\equiv 2(4)$	4
3, 7, 11,… $\equiv 3(4)$	8
4, 8, 12,… $\equiv 0(4)$	6

a = 3 no es solución pues, para a = 3 tenemos:

$3^{2020} \cdot 4$ no es múltiplo de 5 ya que 3^{2020} acaba en 1 y no en 0 o 5, pues

n	3^n acaba en
1, 5, 9, …… $\equiv 1(4)$	3
2, 6, 10,… $\equiv 2(4)$	9
3, 7, 11,… $\equiv 3(4)$	7
4, 8, 12,… $\equiv 0(4)$	1

a = 4 es solución pues, para a = 4 tenemos:

$$a^{2020} + a^{2021} = a^{2020} \cdot (1 + a) = 4^{2020} \cdot 5 \text{ que es múltiplo de 5}$$

a = 5 es solución pues, para a = 5 tenemos:

$$a^{2020} + a^{2021} = a^{2020} \cdot (1 + a) = 5^{2020} \cdot 6 \text{ que es múltiplo de 5}$$

a = 6 no es solución pues, para a = 6 tenemos:

$6^{2020} \cdot 7$ no es múltiplo de 5 ya que 6^{2020} acaba en 6 y no en 0 o 5

a = 7 no es solución pues, para a = 7 tenemos:

$7^{2020} \cdot 8$ no es múltiplo de 5 ya que 7^{2020} acaba en 1 y no en 0 o 5, pues

n	7^n acaba en
1, 5, 9, …… $\equiv 1(4)$	7
2, 6, 10,… $\equiv 2(4)$	9
3, 7, 11,… $\equiv 3(4)$	3
4, 8, 12,… $\equiv 0(4)$	1

a = 8 no es solución pues, para a = 8 tenemos:

$8^{2020} \cdot 9$ no es múltiplo de 5 ya que 8^{2020} acaba en 6 y no en 0 o 5, pues

n	8^n acaba en
1, 5, 9, …… $\equiv 1(4)$	8
2, 6, 10,… $\equiv 2(4)$	4
3, 7, 11,… $\equiv 3(4)$	2
4, 8, 12,… $\equiv 0(4)$	6

a = 9 es solución pues, para a = 9 tenemos:

$$a^{2020} + a^{2021} = a^{2020} \cdot (1 + a) = 9^{2020} \cdot 10 \text{ que es múltiplo de 5, pues acaba en 0}$$

a = 10 es solución pues, para a = 10 tenemos:

$$a^{2020} + a^{2021} = a^{2020} \cdot (1 + a) = 10^{2020} \cdot 11 \text{ que es múltiplo de 5, al serlo de 10}$$

En total, son soluciones a = 4, a = 5, a = 9 y a = 10

Septiembre 16: Las ordenadas en el origen de tres rectas paralelas son 2, 3 y 4. La suma de las abscisas de los puntos de corte de las rectas con el eje X es – 36, ¿cuál es la pendiente de las tres rectas?

Solución: Sean

$$y = mx + 2$$
$$y = mx + 3$$
$$y = mx + 4$$

las rectas del enunciado. Las abscisas de los puntos de corte de las rectas con el eje OX son

$$\frac{-2}{m};\ \frac{-3}{m};\ \frac{-4}{m}$$

Y entonces

$$\frac{-2}{\mathrm{m}}+\frac{-3}{\mathrm{m}}+\frac{-4}{\mathrm{m}}=-36;\ \ \frac{-9}{\mathrm{m}}=-36;\ \ \mathrm{m}=\frac{-9}{-36}=\frac{1}{4}$$

Septiembre 17-18: Supongamos ocho sobres numerados del 1 a las 8 y ocho tarjetas numeradas también del 1 al 8. ¿De cuántas formas pueden ser distribuidas las tarjetas, una en cada sobre, de forma que ninguna de las tarjetas 1, 2 y 3 esté en el sobre con su mismo número?

Solución: Sin haber restricciones, habría 8! formas de distribuir las tarjetas. Habrá que quitarles aquellas donde esté bien la tarjeta 1 (7!), la tarjeta 2 (7!) y la tarjeta 3 (7!); pero hemos quitado de más, aquellas donde esté bien la 1 y la 2 que las hemos contado dos veces (6!), la 1 y la 3 (6!) y la 2 y la 3 (6!); pero ahora hemos contado de más, hay que quitar los casos en que están bien la 1, la 2 y la 3 (5!). Así, que el número pedido es:

$$8! - 3\cdot 7! + 3\cdot 6! - 5! = 5!\cdot(8\cdot 7\cdot 6 - 3\cdot 7\cdot 6 + 3\cdot 6 - 1) = 5!\cdot 217 = 27240$$

Septiembre 19: ¿Cuántos enteros entre 10 y 1000 verifican que la suma de sus cifras es 3?

Solución: Sólo hay que ser un poco ordenados: Las cifras que podremos utilizar son: 0, 1, 2 y 3.

De dos cifras tenemos: 12, 21 y 30.

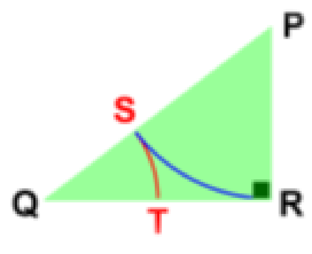
De tres cifras tendremos: 102, 111, 120, 201, 210 y 300.

En total 9 números.

Septiembre 21: ¿Cuántos enteros positivos de tres cifras no tienen dígitos diferentes a 7, 8 o 9?

Solución: Son las variaciones con repetición de tres elementos (la cifra 7, la cifra 8 y la cifra 9) tomadas de tres en tres, es decir $3^3 = 27$.

Septiembre 22-23: Sea ∆PRQ un triángulo rectángulo en R. La circunferencia con centro P y radio PR corta a PQ en S y la circunferencia con centro Q y radio QS corta a QR en T. Si T es el punto medio de QR hallar QS/SP



Solución: Tendremos, sucesivamente:

$$\mathrm{QP}^2=(\mathrm{QS}+\mathrm{SP})^2=\mathrm{QR}^2+\mathrm{PR}^2;\quad \mathrm{QS}^2+\mathrm{SP}^2+2\cdot\mathrm{QS}\cdot\mathrm{SP}=4\cdot\mathrm{QS}^2+\mathrm{PR}^2$$

$$\mathrm{SP}^2+2\cdot\mathrm{QS}\cdot\mathrm{SP}=3\cdot\mathrm{QS}^2+\mathrm{PR}^2,\ \ \mathrm{SP}^2+2\cdot\mathrm{QS}\cdot\mathrm{SP}=3\cdot\mathrm{QS}^2+\mathrm{SP}^2,$$

$$2\cdot\mathrm{QS}\cdot\mathrm{SP}=3\cdot\mathrm{QS}^2,\ \ 2\cdot\mathrm{SP}=3\cdot\mathrm{QS}\ \ \Rightarrow\ \ \frac{\mathrm{QS}}{\mathrm{SP}}=\frac{2}{3}$$

Septiembre 24: Hallar los pares de enteros (x, y) con $0 \le x \le y$ que cumplen:

$$\mathbf{5x^2 - 4xy + 2x + y^2 = 624}$$

Solución: Respecto de la ecuación, tenemos:

$$5x^2 - 4xy + 2x + y^2 = 624;\ \ 4x^2 - 4xy + y^2 + x^2 + 2x = 624$$

$$4x^2 - 4xy + y^2 + x^2 + 2x + 1 = 624 + 1;\ \ (2x - y)^2 + (x + 1)^2 = 625 = 25^2$$

Haciendo m = 2x – y y n = x + 1, tenemos que m,n $\in\mathbb{Z}$ (pues x e y son enteros) y además:

$$m^2 + n^2 = 25^2$$

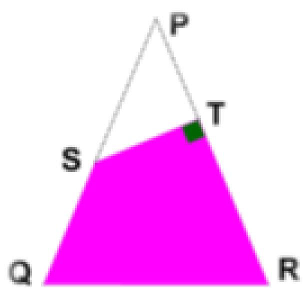
Como (15, 20, 25) y (7, 24, 25) son las únicas ternas pitagóricas de hipotenusa 25 y $n = x + 1 \geq 1$ (pues $x \geq 0$), las únicas soluciones enteras para m y n (con $n \geq 1$) aparecen en las dos primeras columnas de la siguiente tabla. Las demás columnas hallan x e y y si se cumple la restricción $x \leq y$

m	n	**x**	**y**	¿$0 \leq x \leq y$?
0	25	**24**	**48**	Si
25	0	-1	-26	No
20	15	14	8	No
-20	15	**14**	**48**	Si
15	20	**19**	**23**	Si
-15	20	**19**	**53**	Si
7	24	**23**	**39**	Si
-7	24	**23**	**53**	Si
24	7	6	-12	No
-24	7	**6**	**36**	Si

Por ejemplo, para la primera fila tenemos:

$$\begin{cases} 2x - y = 0 \\ x + 1 = 25 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 2 \cdot 24 = 48 \\ x = 24 \end{cases}$$

Septiembre 25-26: En un triángulo isósceles ΔPQR, PQ = PR y QR = 300. Sobre el lado PR se toma T y sobre el lado PQ se toma S tal que TS $\perp$TR. Si ST = 120, TR = 271 y QS = 221, hallar el área del cuadrilátero STRQ



Solución: Al ser PQ = PR, si PT = x, entonces PS = x + 50 y las dimensiones de los catetos del triángulo rectángulo ∆PTS son x y 120 y la hipotenusa x + 50, por tanto:

$$(x+50)^2 = x^2 + 120^2 \;\;\Rightarrow\;\; x = 119 \text{ y } A_{\Delta PTS} = \frac{120 \cdot 119}{2} = 7140$$

Por otro lado, calculemos el área del triángulo isósceles ∆PQR, para ello calculamos la altura sobre el lado QR:

$$\sqrt{390^2 - 150^2} = 360$$

Por tanto, el área será:

$$\frac{300 \cdot 360}{2} = 54000$$

El área pedida es: 54000 – 7140 = 46860

Septiembre 28: Sean a, b y c enteros diferentes que cumplen a·b·c = 17955; a, b y c (y en este orden) están en PA; 3a+b, 3b+c y 3c+a (y en este orden) están en PG. Calcular a, b y c

Solución: Si a, b y c están en progresión aritmética, podemos poner: a = b – d y c = b + d: Así, que 3a + b = 4b – 3d; 3b + c = 4b + d y 3c + a = 4b + 2d, y como éstos, están en progresión geométrica:

$$(4b+d)^2 = (4b-3d)\cdot(4b+2d) \;\;\Rightarrow\;\; 16b^2 + 8bd + d^2 = 16b^2 - 4bd - 6d^2$$

$$12bd = -7d^2$$

Como d ≠ 0 (pues, en caso contrario a = b = c y 17955 no es un cubo perfecto), resulta que:

$$d = -\frac{12b}{7}; \;\;\Rightarrow\;\; a = \frac{19b}{7}, c = -\frac{5b}{7}$$

Y como a·b·c = 17955, tenemos:

$$\frac{19b}{7}\cdot b \cdot \frac{-5b}{7} = 17955 \;\;\Rightarrow\;\; b^3 = -9261 \;\;\Rightarrow\;\; b = -21 \;\;\Rightarrow a = -57 \text{ y } c = 15$$

Septiembre 29: Sean a, b y c tres números en PG. Hallarlos si la suma de ellos es 114 y su producto 46656.

Solución: Al estar a, b y c en progresión geométrica tenemos:

$$a = \frac{b}{r} \text{ y } c = br \;\;\Rightarrow\;\; a\cdot b\cdot c = b^3 = 46656 \;\;\Rightarrow\;\; b = 36$$

Por tanto: a + 36 + c = 114 y por tanto: a + c = 78

$$\frac{36}{r} + 36r = 78; \;\; 6r^2 - 13r + 6 = 0, \;\; r = \frac{3}{2} \text{ o } r = \frac{2}{3}$$

Los números que están en progresión geométrica son: 24, 36, 54 o 54, 36, 24

Septiembre 30: Hallar el valor numérico de $\mathbf{x^2 + y^2}$ sabiendo que:

$$\left.\begin{array}{c}\mathbf{x^2 = 8x + y} \\ \mathbf{y^2 = 8y + x} \\ \mathbf{x \neq y}\end{array}\right\}$$

Solución 1 (a la brava): De la primera ecuación tenemos y = x^2 – 8x y sustituyendo y en la segunda:

$$(x^2 - 8x)^2 = 8(x^2 - 8x) + x \;\; \Rightarrow \;\; x^4 - 16x^3 + 56x^2 + 63x = 0$$

Si x = 0, entonces y (= 0^2 – 8·0) = 0 que contradice la tercera condición del sistema. Luego x ≠ 0, y entonces:

$$x^3 - 16x^2 + 56x + 63 = 0$$

	1	-16	56	63
9		9	-63	63
	1	-7	-7	0

$$(x - 9) \cdot (x^2 - 7x - 7) = 0$$

Si x = 9, entonces y (= 9^2 – 8·9) = 9 que contradice la tercera condición del sistema. Luego x ≠ 9.

$$(x^2 - 7x - 7) = 0 \;\; \Rightarrow \begin{cases} x_1 = \dfrac{7 + \sqrt{77}}{2} \;\; \Rightarrow \;\; y_1 = \dfrac{7 - \sqrt{77}}{2} \\ x_2 = \dfrac{7 - \sqrt{77}}{2} \;\; \Rightarrow \;\; y_2 = \dfrac{7 + \sqrt{77}}{2} \end{cases}$$

Por tanto:

$$x^2 + y^2 = \left(\frac{7 + \sqrt{77}}{2}\right)^2 + \left(\frac{7 - \sqrt{77}}{2}\right)^2 = 63$$

Solución 2: Sumando las dos primeras ecuaciones, tenemos:

$$x^2 + y^2 = 9 \cdot (x + y) \; (*)$$

Restando las dos primeras ecuaciones, tenemos:

$$x^2 - y^2 = 7 \cdot (x - y) \;\; \Rightarrow \;\; (x + y) \cdot (x - y) = 7(x - y)$$

Y como x ≠ y, debe ser x + y = 7 y sustituyendo en (*)

$$x^2 + y^2 = 9 \cdot (x + y) = 9 \cdot 7 = 63$$