SOLUCIONES OCTUBRE 2020

PROBLEMAS PARA 3ESO, 4ESO Y BACHILLERATO. AUTOR: MARIO MESTRE. INS "PONT DE SUERT". 14-18 AÑOS

Octubre 1: Hallar k para que las raíces de $3x^2+5x-k=0$ disten en dos unidades.

Solución: Recordemos las relaciones de Cardano- Vietà: Si x_1 y x_2 son las soluciones de $ax^2 + bx + c = 0$ entonces:

$$S = x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} \qquad P = x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}$$

En nuestro caso tendremos:

$$S = x_1 + x_1 + 2 = 2x_1 + 2 = -\frac{5}{3} \Rightarrow x_1 = \frac{-\frac{5}{3} - 2}{2} = -\frac{11}{6} \Rightarrow x_2 = x_1 + 2 = -\frac{11}{6} + 2 = \frac{1}{6}$$

Y, por último:

$$P = x_1 \cdot x_2 = -\frac{11}{6} \cdot \frac{1}{6} = -\frac{11}{36} = -\frac{k}{3} \Rightarrow k = \frac{11}{12}$$

Octubre 2: Hallar los valores de m que hacen que

$$\mathbf{mx^2 - (m + 3)x + 2=0}$$

tenga dos raíces reales opuestas

Solución: Si x_1 y x_2 son las raíces del polinomio y son opuestas:

$$S = 0 = \frac{m+3}{m} \Rightarrow m = -3$$

Octubre 3: Calcular p y q para que las raíces de $x^2+px+q=0$ sean D y 1-D, donde D es el discriminante de la ecuación.

Solución: Tendremos que $D = p^2 - 4q$. Por tanto, las raíces del polinomio han de ser

$$x_1 = p^2 - 4q \ ; \ x_2 = 1 + 4q - p^2$$

Aplicando las relaciones de Cardano-Vietà:

$$1 = S = x_1 + x_2 = -p \Rightarrow p = -1 \Rightarrow x_1 = 1 - 4q; \ x_2 = 4q$$

$$x_1 \cdot x_2 = q = (1 - 4q) \cdot 4q \Rightarrow \begin{cases} q = 0 \\ q = \frac{3}{16} \end{cases}$$

Por tanto $(p, q) \in \{(-1, 0); (-1, 3/16)\}$

Octubre 5: Sea la ecuación $x^2+px+q=0$. Hallar p y q para que p y q sean las soluciones de la ecuación.

Solución: Tendremos al aplicar las relaciones de Cardano-Vietà:

$$\begin{cases} S = p + q = -p \\ P = p \cdot q = q \end{cases}$$

De la segunda ecuación:

$$q \cdot (p-1) = 0 \;\Rightarrow\; \begin{cases} q = 0 \\ p = 1 \end{cases}$$

Y sustituyendo en la primera: Si q = 0, entonces p = 0. Si p = 1, entonces q = -2.

Las soluciones son: (p, q) $\in$ {(0, 0); (1, -2)}

<u>Octubre 6:</u> Si r y s son las soluciones de la ecuación x^2-17x+13 = 0, calcular el valor de $r^3 + s^3$

<u>Solución:</u> Tendremos, si S = r + s y P = r·s:

$$(r+s)^3 = r^3 + 3r^2s + 3rs^2 + s^3 \;\Rightarrow\; r^3 + s^3 = S^3 - 3 \cdot P \cdot S$$

Aplicando las relaciones de Cardano-Vietà:

$$S = r + s = 17; \quad P = r \cdot s = 13$$

De donde:

$$r^3 + s^3 = S^3 - 3 \cdot P \cdot S = 17^3 - 3 \cdot 17 \cdot 13 = 4250$$

<u>Octubre 7:</u> Si a y b son las raíces de x^2-2x-143 = 0, hallar el valor de

$$\mathbf{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}}$$

<u>Solución:</u> Tendremos, si S = a + b y P = a·b que:

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{b+a}{a \cdot b} = \frac{S}{P}$$

Aplicando las relaciones de Cardano-Vietà:

$$S = 2; \;\; P = -143$$

Y, por último:

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{S}{P} = -\frac{143}{2}$$

<u>Octubre 8-9:</u> Sea P(x) = (x+1)·(x-8) + m.

a) ¿Hay valores de m para los que P(x) > 0 $\forall x \in \mathbb{R}$?.
b) ¿Hay valores de m para los que P(x) < 0 $\forall x \in \mathbb{R}$?.
c) Si a y b son las raíces de P(x), hallar m para que $a^2+b^2=1$.

<u>Solución:</u> Tenemos:

$$P(x) = (x+1)\cdot(x-8)+m = x^2 - 7x - 8 + m$$

Por lo que su representación gráfica, es una parábola dirigida hacia arriba, pues su coeficiente principal es positivo, con vértice (mínimo de la gráfica)

$$x_V = \frac{-b}{2a} = \frac{7}{2}; \quad y_V = \left(\frac{7}{2} + 1\right) \cdot \left(\frac{7}{2} - 8\right) + m = -\frac{81}{4} + m$$

a) El polinomio será positivo si la y del vértice es positivo, es decir sii

$$-\frac{81}{4} + m > 0 \;\Leftrightarrow\; m > \frac{81}{4}$$

b) No hay valores de m para los que $P(x) < 0\ \forall x \in \mathbb{R}$, pues la parábola es dirigida hacia arriba (para cualquier valor de m) y por tanto hay valores positivos de la parábola (para cualquier valor de m).

c) Si S = a + b y P = a·b, tenemos:

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 \quad \Rightarrow \quad a^2 + b^2 = S^2 - 2P$$

Por Cardano-Vietà: S = 7 y P = m – 8. Por tanto:

$$1 = a^2 + b^2 = S^2 - 2P = 7^2 - 2m + 16 \ \Rightarrow \ m = 32$$

<u>Octubre 10:</u> Si α y β son las raíces de:

$$\mathbf{0 = x^2 - 4x + 22}$$

calcular el valor de

$$\boldsymbol{\alpha^3 + \alpha^2 + \alpha + \beta^3 + \beta^2 + \beta}$$

<u>Solución:</u> Si $S = \alpha + \beta$ y $P = \alpha \cdot \beta$, tenemos:

$$(\alpha+\beta)^2 = \alpha^2 + 2\alpha\beta + \beta^2 \ \Rightarrow \ \alpha^2 + \beta^2 = (\alpha+\beta)^2 - 2\alpha\beta = S^2 - 2P$$

$$(\alpha+\beta)^3 = \alpha^3 + 3\alpha^2\beta + 3\alpha\beta^2 + \beta^3 \ \Rightarrow \ \alpha^3 + \beta^3 = (\alpha+\beta)^3 - 3\alpha\beta(\alpha+\beta) = S^3 - 3PS$$

$$\alpha^3 + \alpha^2 + \alpha + \beta^3 + \beta^2 + \beta = S^3 - 3PS + S^2 - 2P + S = 4^3 - 3 \cdot 4 \cdot 22 - 2 \cdot 22 + 4 = -224$$

<u>Octubre 12-13:</u> Sea dado el polinomio:

$$\mathbf{P(x) = x^3 + x - m}$$

y a, b y c sus raíces. Hallar m para que

$$\mathbf{\frac{ab}{c} + \frac{bc}{a} + \frac{ac}{b} = m} \quad (*)$$

<u>Solución:</u> En primer lugar, notemos que (*) implica que a, b y c son no nulos (de serlo alguna raíz, no tendría sentido dividir por ella). Y por la última relación de Cardano-Vietà tendremos $m \neq 0$ (pues $m = abc$).

Tendremos:

$$\frac{ab}{c} + \frac{bc}{a} + \frac{ac}{b} = m \ \Leftrightarrow \ abc\left(\frac{1}{c^2} + \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}\right) = m \ \Leftrightarrow \ \left(\frac{1}{c^2} + \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}\right) = 1 \ \ (**)$$

Consideremos el polinomio en t: Q(t) = P(1/t). Busquemos las raíces de Q(t) = 0. Al ser P(x) = (x – a)·(x – b)· (x – c), tenemos:

$$Q(t) = \left(\frac{1}{t} - a\right) \cdot \left(\frac{1}{t} - b\right) \cdot \left(\frac{1}{t} - c\right) = 0 \ \Rightarrow \ t \in \left\{\frac{1}{a}, \frac{1}{b}, \frac{1}{c}\right\}$$

Pero:

$$0 = Q(t) = P\left(\frac{1}{t}\right) = \frac{1}{t^3} + \frac{1}{t} - m = \frac{-mt^3 + t^2 + 1}{t^3} \ \Leftrightarrow \ -mt^3 + t^2 + 1 = 0$$

Y, aplicando las relaciones de Cardano-Vietà a este polinomio, tenemos

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=\frac{1}{m}$$
$$\frac{1}{ab}+\frac{1}{bc}+\frac{1}{ac}=0$$
$$\frac{1}{abc}=\frac{1}{m}$$

Por último, teniendo en cuenta (**):

$$\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)^2=\begin{cases}=\dfrac{1}{m^2}\\ =\dfrac{1}{a^2}+\dfrac{1}{b^2}+\dfrac{1}{c^2}+2\left(\dfrac{1}{ab}+\dfrac{1}{ac}+\dfrac{1}{bc}\right)\end{cases}$$

$$\frac{1}{m^2}=1+2\cdot 0=1 \quad \Rightarrow \quad m=\pm 1$$

Octubre14: Si α y β son las soluciones de $x^2 - 9x - 70 = 0$, calcular el valor de $|\alpha-\beta|$

Solución: Se nos pide calcular:

$$|\alpha-\beta|=+\sqrt{(\alpha-\beta)^2}=+\sqrt{\alpha^2+\beta^2-2\alpha\beta} \qquad (*)$$

Por las relaciones de Cardano-Vietà, tenemos:

$$S=\alpha+\beta=9; \quad P=\alpha\cdot\beta=-70$$

Y, como:

$$(\alpha+\beta)^2=\begin{cases}=9^2\\ =\alpha^2+\beta^2+2\alpha\beta\end{cases}$$

Tendremos:

$$\alpha^2+\beta^2=9^2-2\cdot(-70)=221$$

Por último, en (*):

$$|\alpha-\beta|=+\sqrt{221-2\cdot(-70)}=19$$

Octubre 15: Si r y s son las raíces de:

$$\mathbf{0 = x^2 + 2020x + 2019}$$

calcular el valor de

$$\mathbf{r\cdot(1 - r) + s\cdot(1 - s)}$$

Solución: Tenemos:

$$r(1-r)+s(1-s)=-(r^2+s^2)+r+s \quad (*)$$

De las relaciones de Cardano-Vietà:

$$S=r+s=-2020; \quad rs=2019$$

Y, como:

$$(r+s)^2 = \begin{cases} = (-2020)^2 \\ = r^2+s^2+2rs \end{cases} \quad \Rightarrow r^2+s^2 = (-2020)^2 - 2\cdot 2019 = 4076362$$

Por último, en (*)

$$r(1-r)+s(1-s) = -(r^2+s^2)+r+s = -4076362 - 2020 = -4078382$$

Octubre 16-17: Resolver el sistema:

$$\left.\begin{array}{r} \mathbf{x + y + z + t = 2} \\ \mathbf{xy + xz + xt + yz + zt + yt = -7} \\ \mathbf{xyz + xyt + xzt + yzt = -8} \\ \mathbf{xyzt = 12} \end{array}\right\}$$

Solución: Resolver el sistema anterior es equivalente a resolver

$$u^4 + bu^3 + cu^2 + du + e = 0$$

cumpliendo los coeficientes

suma de soluciones de la ecuación = - b = 2

suma de productos de dos soluciones de la ecuación = c = - 7

suma de productos de tres soluciones de la ecuación = - d = - 8

producto de las cuatro soluciones de la ecuación = e = 12.

La ecuación resultante es:

$$u^4 - 2u^3 - 7u^2 + 8u + 12 = 0$$

Resolviendo por Ruffini:

	1	-2	-7	8	12
-1		-1	3	4	-12
	1	-3	-4	12	0
-2		-2	10	-12	
	1	-5	6	0	
2		2	-6		
	1	-3	0		

Con ello:

$$u^4 - 2u^3 - 7u^2 + 8u + 12 = 0 = (u+1)\cdot(u+2)\cdot(u-2)\cdot(u-3) \quad \Rightarrow \begin{cases} u = -1 \\ u = -2 \\ u = 2 \\ u = 3 \end{cases}$$

Es decir, las soluciones del sistema son (x, y, z, t) = (-1, -2, 2, 3) y las permutaciones del vector numérico

Octubre 19: Sean α y β las raíces de la ecuación $x^2 - 8x + 9 = 0$.

Calcular:

$$\left(\alpha - \frac{1}{\alpha}\right)^2 + \left(\beta - \frac{1}{\beta}\right)^2$$

<u>Solución:</u> Tendremos:

$$\left(\alpha-\frac{1}{\alpha}\right)^2+\left(\beta-\frac{1}{\beta}\right)^2=\alpha^2+\frac{1}{\alpha^2}-2+\beta^2+\frac{1}{\beta^2}-2=(\alpha^2+\beta^2)+\frac{1}{\alpha^2}+\frac{1}{\beta^2}-4$$
$$=(\alpha^2+\beta^2)+\frac{(\alpha^2+\beta^2)}{\alpha^2\cdot\beta^2}-4=\{\alpha^2+\beta^2=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta\}$$
$$=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta+\frac{(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta}{\alpha^2\beta^2}-4$$

Por las relaciones de Cardano-Vietà:

$$\alpha+\beta=8;\quad \alpha\beta=9$$

Con lo que:

$$\left(\alpha-\frac{1}{\alpha}\right)^2+\left(\beta-\frac{1}{\beta}\right)^2=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta+\frac{(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta}{\alpha^2\beta^2}-4=8^2-2\cdot 9+\frac{8^2-2\cdot 9}{9^2}-4=\frac{3448}{81}$$

<u>Octubre 20:</u> Sean s y r las soluciones de la ecuación:

$$x^2 - 2020x + a^2 - 4040a + 4080400 = 0$$

Calcular a para que s·r sea mínimo

<u>Solución:</u> De las relaciones de Cardano-Vietà:

$$s\cdot r=a^2-4040a+4080400=(a-2020)^2$$

Por tanto, s·r será mínimo cuando a = 2020.

<u>Octubre 21:</u> Calcular $a^2 + b^2 + c^2$ siendo a, b y c las soluciones de la ecuación:

$$\mathbf{3x^3-2x^2+5x-7=0}$$

<u>Solución:</u> De las relaciones de Cardano-Vietà tenemos:

$$a+b+c=\frac{2}{3};\quad ab+ac+bc=\frac{5}{3};\quad abc=\frac{7}{3}$$

Pero:

$$(a+b+c)^2=\left\{\begin{matrix}=\left(\frac{2}{3}\right)^2=\frac{4}{9}\\ =a^2+b^2+c^2+2(ab+bc+ac)=a^2+b^2+c^2+2\cdot\frac{5}{3}\end{matrix}\right\}$$
$$\Rightarrow a^2+b^2+c^2=-\frac{26}{9}$$

Por tanto, el polinomio tiene dos raíces complejas opuestas y una raíz real.

<u>Octubre 22-23:</u> Sean a, b y c las raíces de la ecuación:

$$\mathbf{0 = 2x^3 - x^2 + 3x - 1}$$

Hallar la ecuación con raíces

$$\boldsymbol{\alpha=\frac{a+1}{a+2(b+c)};\ \beta=\frac{b+1}{b+2(a+c)};\ \eta=\frac{c+1}{c+2(a+b)}}$$

Solución: Tendremos:

$$\alpha = \frac{a+1}{a+2(b+c)} = \frac{a+1}{2(a+b+c)-a} = \frac{a+1}{2\frac{1}{2}-a} = \frac{a+1}{1-a}$$

$$\beta = \frac{b+1}{b+2(a+c)} = \frac{b+1}{2(a+b+c)-b} = \frac{b+1}{2\frac{1}{2}-b} = \frac{b+1}{1-b}$$

$$\eta = \frac{c+1}{c+2(a+b)} = \frac{c+1}{2(a+b+c)-c} = \frac{c+1}{2\frac{1}{2}-c} = \frac{c+1}{1-c}$$

Por tanto, la relación entre las raíces de la ecuación dada y la que se pide es:

$$y = \frac{x+1}{1-x}$$

Despejando x, tenemos:

$$y(1-x) = 1+x \;\Rightarrow\; y-1 = x+yx = x(1+y) \;\Rightarrow x = \frac{y-1}{y+1}$$

Y sustituyendo en la ecuación original:

$$0 = 2\left(\frac{y-1}{y+1}\right)^3 - \left(\frac{y-1}{y+1}\right)^2 + 3\left(\frac{y-1}{y+1}\right) - 1 \Rightarrow \cdots \Rightarrow 3y^3 - 5y^2 + y - 7 = 0$$

Octubre 24: Obtener las relaciones de Cardano-Viète para los polinomios de tercer grado

Solución: Tendremos, si x_1, x_2 y x_3 son las raíces de $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$:

$$\begin{aligned} ax^3 + bx^2 + cx + d &= a(x-x_1)\cdot(x-x_2)\cdot(x-x_3) = a\cdot(x^2 - x_1x - x_2x + x_1x_2)\cdot(x-x_3) \\ &= a(x^3 - x_1x^2 - x_2x^2 + x_1x_2x - x_3x^2 + x_1x_3x + x_2x_3x - x_1x_2x_3) \\ &= ax^3 + a(-x_1 - x_2 - x_3)x^2 + a(x_1x_2 + x_1x_3 + x_3x_2)x - a(x_1x_2x_3) \end{aligned}$$

Igualando coeficientes:

$$b = -a(x_1 + x_2 + x_3) \quad \Rightarrow \quad x_1 + x_2 + x_3 = -\frac{b}{a}$$

$$c = a(x_1x_2 + x_1x_3 + x_3x_2) \;\Rightarrow\; x_1x_2 + x_1x_3 + x_3x_2 = \frac{c}{a}$$

$$d = -a(x_1x_2x_3) \quad \Rightarrow \quad x_1x_2x_3 = -\frac{d}{a}$$

Octubre 26: Obtener las relaciones de Cardano-Viète para un polinomio de grado cuatro

Solución: Tendremos, si x_1, x_2, x_3 y x_4 son las raíces de $ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e = 0$:

$$\begin{aligned} ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e &= a(x-x_1)\cdot(x-x_2)\cdot(x-x_3)\cdot(x-x_4) \\ &= a\cdot(x^2 - x_1x - x_2x + x_1x_2)\cdot(x^2 - x_3x - x_4x + x_3x_4)\cdot \\ &= a(x^4 - x_1x^3 - x_2x^3 + x_1x_2x^2 - x_3x^3 + x_1x_3x^2 + x_2x_3x^2 - x_1x_2x_3x - x_4x^3 \\ &+ x_1x_4x^2 + x_2x_4x^2 - x_1x_2x_4x + x_3x_4x^2 - x_1x_3x_4x - x_2x_3x_4x + x_1x_2x_3x_4) \\ &= ax^4 + a(-x_1 - x_2 - x_3 - x_4)x^3 + a(x_1x_2 + x_1x_3 + x_1x_4 + x_2x_3 + x_2x_4 + x_3x_4)x^2 \\ &- a(x_1x_2x_3 + x_1x_2x_4 + x_1x_3x_4 + x_2x_3x_4) + a(x_1x_2x_3x_4) \end{aligned}$$

Igualando coeficientes:

$$b = -a(x_1 + x_2 + x_3 + x_4) \qquad \Rightarrow \qquad x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = -\frac{b}{a}$$

$$c = a(x_1x_2 + x_1x_3 + x_1x_4 + x_2x_3 + x_2x_4 + x_3x_4) \Rightarrow x_1x_2 + x_1x_3 + x_1x_4 + x_2x_3 + x_2x_4 + x_3x_4 = \frac{c}{a}$$

$$d = -a(x_1x_2x_3 + x_1x_2x_4 + x_1x_3x_4 + x_2x_3x_4) \Rightarrow x_1x_2x_3 + x_1x_2x_4 + x_1x_3x_4 + x_2x_3x_4 = -\frac{d}{a}$$

$$e = a(x_1x_2x_3x_4) \qquad \Rightarrow \qquad x_1x_2x_3x_4 = \frac{e}{a}$$

Octubre 27-28: Sea $f(x) = (x^2 + 10x + 25)^{1010} - 3x + 2$ y r_i para $i \in \{1, 2, \dots, 2020\}$ sus raíces. Calcular:

$$\sum_{i=1}^{2020} (r_i + 5)^{2020}$$

Solución: Tendremos:

$$0 = f(r_i) = (r_i^2 + 10r_i + 25)^{1010} - 3r_i + 2 = (r_1 + 5)^{2020} - 3r_i + 2 \Rightarrow (r_1 + 5)^{2020} = 3r_i - 2$$

Por tanto:

$$\sum_{i=1}^{2020} (r_i + 5)^{2020} = 3\sum_{i=1}^{2020} r_i - 2 \cdot 2020 = 3S - 4040$$

Para calcular S desarrollamos f(x) y aplicamos las relaciones de Cardano-Vietà:

$$f(x) = (x + 5)^{2020} - 3x + 2 = x^{2020} + \binom{2020}{1} x^{2019} \cdot 5 + \cdots \quad \Rightarrow \quad S = -5 \cdot \binom{2020}{1} = -10100$$

Por último:

$$\sum_{i=1}^{2020} (r_i + 5)^{2020} = 3S - 4040 = 3 \cdot (-10100) - 4040 = -34340$$

Octubre 29: Hallar tres números cuya suma sea 6, la suma de sus cuadrados 38 y la suma de sus cubos 144

Solución: Se pide resolver el sistema:

$$\left.\begin{array}{r} a + b + c = 6 \\ a^2 + b^2 + c^2 = 38 \\ a^3 + b^3 + c^3 = 144 \end{array}\right\}$$

Pero:

$$(a + b + c)^2 = \begin{cases} = 6^2 = 36 \\ = a^2 + b^2 + c^2 + 2(ab + ac + bc) = 38 + 2(ab + ac + bc) \end{cases}$$

Luego, si a + b + c = 6:

$$a^2 + b^2 + c^2 = 38 \quad \Leftrightarrow \quad ab + ac + bc = -1$$

Pero:

$$(a+b+c)^3=\begin{cases}=6^3=216\\=a^3+b^3+c^3+3ac^2+3bc^2+3cb^2+3ab^2+3ca^2+3ba^2+6abc\end{cases}$$

$$(a+b+c)^3=\begin{cases}=6^3=216\\=a^3+b^3+c^3+3c^2(a+b)+3b^2(c+a)+3a^2(c+b)+6abc\end{cases}$$

$$(a+b+c)^3=\begin{cases}=6^3=216\\=a^3+b^3+c^3+3c^2(S-c)+3b^2(S-b)+3a^2(S-a)+6abc\end{cases}$$

$$(a+b+c)^3=\begin{cases}=6^3=216\\=a^3+b^3+c^3-3c^3+3c^2S-3b^3+3b^2S-3a^3+3a^2S+6abc\end{cases}$$

$$(a+b+c)^3=\begin{cases}=6^3=216\\=a^3+b^3+c^3-3c^3-3b^3-3a^3+3S(c^2+b^2+a^2)+6abc\end{cases}$$

$$(a+b+c)^3=\begin{cases}=6^3=216\\=-2(c^3+b^3+a^3)+3S(c^2+b^2+a^2)+6abc\end{cases}$$

Luego, si a + b + c = 6 y si $a^2 + b^2 + c^2$ =38:

$$a^3+b^3+c^3=144 \iff abc=-30$$

En definitiva, por las relaciones de Cardano-Vietà:

$$\left.\begin{array}{r}a+b+c=6\\a^2+b^2+c^2=38\\a^3+b^3+c^3=144\end{array}\right\} \iff \left.\begin{array}{c}a+b+c=6\\ab+ac+bc=-1\\abc=-30\end{array}\right\} \iff x^3-6x^2-x+30=0$$

Y resolviendo por Ruffini:

	1	-6	-1	30
-2		-2	16	-30
	1	-8	15	0
3		3	-15	
	1	-5	0	

$$0=x^3-6x^2-x+30=(x+2)(x-3)(x-5)$$

Luego los números buscados son -2, 3 y 5 (en cualquier orden)

<u>Octubre 30:</u> Sea el polinomio:

$P(x) = x^3 - mx^2 + 3mx - m$

y a, b y c sus raíces. Hallar m para que **$a^3 + b^3 + c^3 > -5$**

<u>Solución:</u> Tendremos:

$$\begin{aligned}(a+b+c)^3&=a^3+b^3+c^3+3ac^2+3bc^2+3cb^2+3ab^2+3ca^2+3ba^2+6abc\\&=a^3+b^3+c^3+3c^2(a+b)+3b^2(c+a)+3a^2(c+b)+6abc\\&=a^3+b^3+c^3+3c^2(S-c)+3b^2(S-b)+3a^2(S-a)+6abc=a^3+b^3+c^3\\&-3c^3+3c^2S-3b^3+3b^2S-3a^3+3a^2S+6abc=a^3+b^3+c^3-3c^3-3b^3-3a^3\\&+3(a+b+c)(c^2+b^2+a^2)+6abc\\&=-2(c^3+b^3+a^3)+3(a+b+c)(c^2+b^2+a^2)+6abc\end{aligned}$$

De donde:

$$2(c^3+b^3+a^3)=-(a+b+c)^3+3(a+b+c)(c^2+b^2+a^2)+6abc$$

Pero:

$$(a^2 + b^2 + c^2) = (a + b + c)^2 - 2(ab + ac + bc)$$

Con lo que:

$$\begin{aligned} 2(c^3 + b^3 + a^3) &= -(a + b + c)^3 + 3(a + b + c)\big((a + b + c)^2 - 2(ab + ac + bc)\big) + 6abc = \\ &= -(a + b + c)^3 + 3(a + b + c)^3 - 6(a + b + c)(ab + ac + bc) + 6abc \\ &= 2(a + b + c)^3 - 6(a + b + c)(ab + ac + bc) + 6abc \end{aligned}$$

Y, por tanto:

$$(c^3 + b^3 + a^3) = (a + b + c)^3 - 3(a + b + c)(ab + ac + bc) + 3abc$$

De las relaciones de Cardano-Vietà:

$$a + b + c = m; \;\; ab + ac + bc = 3m; \;\; abc = m$$

Con ello:

$$-5 < \; a^3 + b^3 + c^3 = m^3 - 3m \cdot 3m + 3m; \quad m^3 - 9m^2 + 3m + 5 > 0$$

$$(m - 1)(m^2 - 8m + 5) > 0; \quad m \in]4 - \sqrt{21}; 1[\cup]4 + \sqrt{21}; +\infty[$$

Octubre 31: Resolver la ecuación:

$$\mathbf{(ax - b)^2 + (bx - a)^2 = x}$$

sabiendo que tiene una raíz entera y que a, $b \in \mathbb{Z}$

Solución: Tendremos:

Lema: En el contexto del enunciado:

a = b = 0 sii x = 0

$\Rightarrow$ Tenemos: $$(0 \cdot x - 0)^2 + (0 \cdot x - 0)^2 = \begin{cases} = x \\ = 0 \end{cases}$$

$\Leftarrow$ Tenemos: $0 = x = (a \cdot 0 - b)^2 + (b \cdot 0 - a)^2 = (-b)^2 + (-a)^2 = b^2 + a^2 \Rightarrow \begin{cases} b^2 = 0 \Rightarrow b = 0 \\ a^2 = 0 \Rightarrow a = 0 \end{cases}$

Nota: Notemos que si $a \neq 0$ o $b \neq 0$ y x_1 es la raíz entera de la ecuación del enunciado, entonces $x_1 > 0$, pues:

$$\left.\begin{matrix} (ax_1 - b)^2 \geq 0 \\ (bx_1 - a)^2 \geq 0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow x_1 = (ax_1 - b)^2 + (bx_1 - a)^2 \geq 0$$

Pero si $x_1 = 0$ entonces, por el lema a = b = 0 en contra de que $a \neq 0$ o $b \neq 0$.

Demostración: Sea la ecuación:

$$(ax - b)^2 + (bx - a)^2 = x \quad (*)$$

con a o b o ambos no nulos, entonces desarrollando y agrupando, tenemos:

$$(a^2 + b^2)x^2 - (1 + 4ab)x + a^2 + b^2 = 0$$

Sean x_1 ($\in \mathbb{Z}$) y x_2 las raíces de la ecuación. Como ambas son reales, el discriminante de la ecuación es no negativo. Por tanto:

$$\begin{aligned} 0 &\leq (4ab + 1)^2 - 4(a^2 + b^2)^2 = (2a^2 + 2b^2 + 4ab + 1)(4ab + 1 - 2a^2 - 2b^2) \\ &= (2(a + b)^2 + 1)(1 - 2(a - b)^2) \end{aligned}$$

Y como $2(a + b)^2 + 1 \geq 0$, tenemos:

$$1 - 2(a-b)^2 \geq 0 \;\; \Rightarrow \;\; 1 \geq 2(a-b)^2 \geq 0 \; (a, b \in \mathbb{Z}) \; \Rightarrow (a-b)^2 = 0 \Rightarrow a = b$$

con lo que la ecuación (*) queda:

$$2a^2x^2 - (4a^2+1)x + 2a^2 = 0$$

Por las relaciones de Cardano-Vietà:

$$x_1 + x_2 = \frac{4a^1+1}{2a^2} = 2 + \frac{1}{2a^2}$$
$$x_1 \cdot x_2 = 1 \;\; (\text{nota}) \;\; x_1 \text{ y } x_2 \text{ son ambas positivas}$$

Entonces:

$$x_1 < x_1 + x_2 = 2 + \frac{1}{2a^2} < 3 \;\; \left(\text{pues } \frac{1}{2a^2} < 1 \text{ ya que } a \in \mathbb{Z}\right)$$

Además $x_1 \neq 1$, pues si $x_1 = 1$

$$0 = 2a^2 - (4a^2+1) + 2a^2 = -1 \quad \text{absurdo!}$$

Luego:

$$2 \leq x_1 < 3 \quad \Rightarrow \quad x_1 = 2 \quad \Rightarrow \quad x_2 = \frac{1}{2} \;\; (\text{ya que } x_1 \cdot x_2 = 1)$$

Luego, las soluciones de la ecuación son:

$$a = b = 0 \quad \Rightarrow \quad x = 0$$
$$a \neq 0 \text{ o } b \neq 0 \;\; \Rightarrow \;\; x_1 = 2, \;\; x_2 = \frac{1}{2}$$