# SOLUCIONES NOVIEMBRE 2020

ACTIVIDADES PARA 3ESO Y 4ESO. 14-16 AÑOS. AUTORES: COLECTIVO “CONCURSO DE PRIMAVERA”

https://www.concursoprimavera.es/#concurso

**Noviembre 2:** Si x + y = 18 y $x^2 + y^2 = 212$ calcular el valor de:

$$|x^2 - y^2|$$

**Solución:** Hemos de resolver el sistema:

$$\left.\begin{array}{r} x + y = 18 \\ x^2 + y^2 = 212 \end{array}\right\}$$

Tenemos:

$$(x+y)^2 = \left\{\begin{array}{l} = 18^2 \\ = x^2 + y^2 + 2xy = 212 + 2xy \end{array}\right\} \Rightarrow \quad xy = 56$$

Por tanto, x e y son soluciones de la ecuación: $z^2 - 18z + 56 = 0$ $(z^2 - Sz + P = 0)$

Por último:

$$z^2 - 18z + 56 = 0 \Rightarrow z = \frac{18 \pm \sqrt{18^2 - 4 \cdot 56}}{2} = \left\{\begin{array}{l} = 14 \\ = 4 \end{array}\right\} \Rightarrow |x^2 - y^2| = |14^2 - 4^2| = 180$$

**Noviembre 3:** 2020 es múltiplo de 20, ¿cuántos números de la forma 2000+b con b natural y menor que 1000 son divisibles por b?

**Solución:** Como b|b tendremos; b|(2000 + b) ⇔ b|2000. Por tanto, buscamos los divisores de 2000 menores que 1000. Como 2000 = $2^4 \cdot 5^3$, tendremos que hay ((4 + 1)·(3 + 1) =) 20 divisores de 2000. De ellos hemos de eliminar los mayores o iguales a 1000: el 2000 y el 1000. Luego hay un total de (20 – 2 =) 18 valores posibles de b: 1, 2, 4, 5, 8, 10, 16, 20, 25, 40, 50, 80, 100, 125, 200, 250, 400, 500.

**Noviembre 4:** Se forman todos los productos de 8 factores distintos que se pueden generar con los dígitos del 1 al 9. ¿En qué cifra termina la suma de todos los productos?

**Solución:** Consideramos los productos de ocho factores distintos de entre los números: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 y 9. Estos productos pueden cumplir:

No contienen al dígito 2: Entonces contienen a las cifras 4 y 5. Luego terminan en 0

No contienen al dígito 5: Ese sumando termina en 6, pues agrupando de dos en dos los productos:

$$1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9 \xrightarrow{\text{termina en}} 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \xrightarrow{\text{termina en}} 4 \cdot 4 \xrightarrow{\text{termina en}} 6$$

Contiene al 2 y al 5: Terminan en 0.

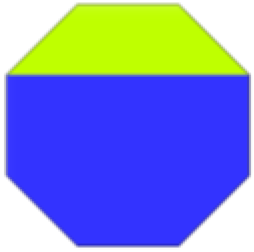
Luego la suma considerada termina en 6.

**Noviembre 5:** Hallar p, q, r∈ℕ, sabiendo que:

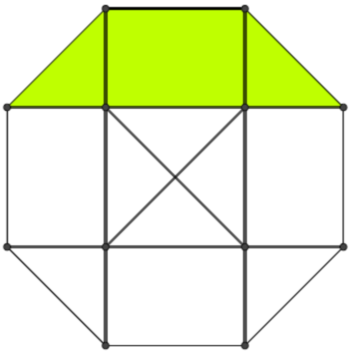
$$\mathbf{p} + \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{q} + \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{r}}} = \frac{\mathbf{25}}{\mathbf{19}}$$

**Solución:** Tenemos:

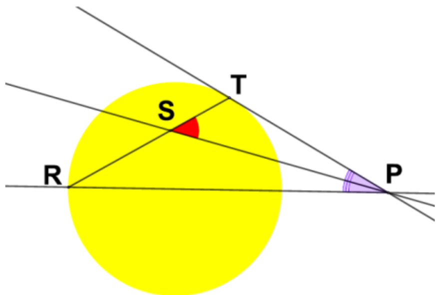
$$p+\cfrac{1}{q+\cfrac{1}{r}}=\frac{25}{19}=\frac{19+6}{19}=1+\frac{6}{19}=1+\cfrac{1}{\frac{19}{6}}=1+\cfrac{1}{\frac{6\cdot 3+1}{6}}=1+\cfrac{1}{3+\frac{1}{6}}\Rightarrow\begin{cases}p=1\\q=3\\r=6\end{cases}$$



**Noviembre 6-7:** Calcular el área del octógono regular de la figura sabiendo que el área de la zona de color verde es de 3 cm$^2$

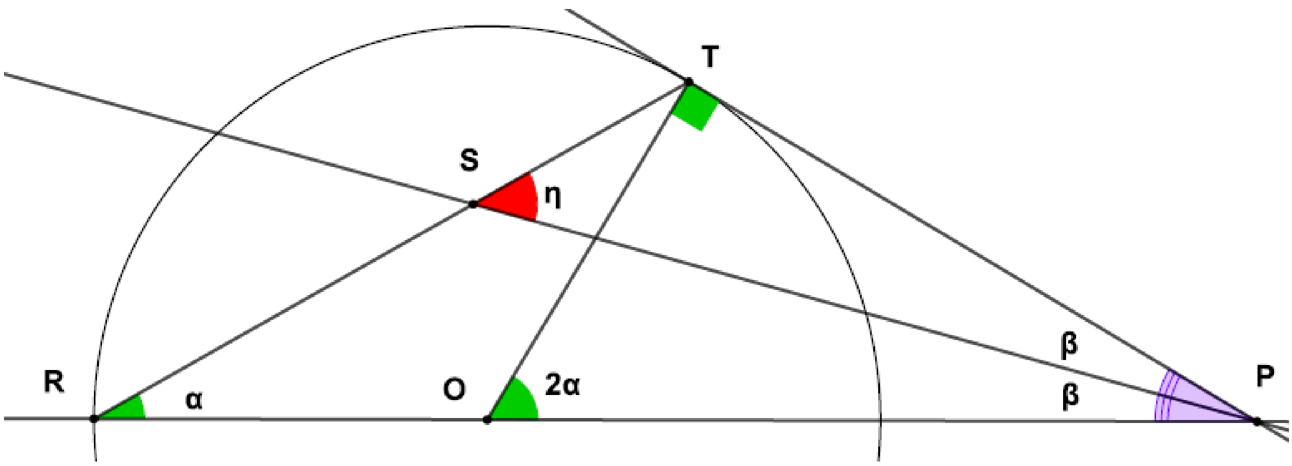


**Solución:** Trazamos los segmentos rectilíneos de la figura adjunta. Entonces el octógono inicial queda dividido en cuatro rectángulos iguales, un cuadrado central y en las esquinas cuatro triángulos rectángulos isósceles que coinciden con los cuatro triángulos en los que se ha dividido el cuadrado central. En total ocho triángulos iguales y cuatro rectángulos iguales. Pero uno de estos rectángulos junto con dos de estos triángulos tienen área 3. Luego el área del octógono es: (3·4 =) 12 cm$^2$




**Noviembre 9-10:** Desde un punto P, exterior a una circunferencia, se trazan dos rectas, PR que pasa por el centro de la circunferencia y PT tangente a la circunferencia en T. Sea PS la bisectriz de ∠RPT. Hallar ∠TSP

**Solución:**



En primer lugar, si O es el centro de la circunferencia (en virtud de la relación entre ángulo central y ángulo inscrito) tendremos los ángulos marcados en la figura. Además, en $\Delta OTP$ $2\alpha + 2\beta = 90°$, por tanto $\alpha + \beta = 45°$.

Además, $\Delta RSO$ es isósceles, pues RO = TO $\Rightarrow$ $\angle RTO = \alpha$.

Por último, en $\Delta STP$:

$$\eta + 90° + \alpha + \beta = 180° \quad (\alpha + \beta = 45°) \Rightarrow \eta = 45°$$

**Noviembre 11:** En la ecuación:

**N·U·(M+E+R+0) = 33**

cada letra representa un dígito diferente. ¿De cuántas formas podemos elegir el valor de las letras?

**Solución:** Como 33 = 1·3·11 y ni N ni U pueden valer 11, tendremos que, necesariamente el paréntesis debe valer 11. Por tanto, N y U han de valer, uno 3 y el otro 1 y debe de cumplirse

M + E + R + O = 11

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 8 | 2 | 1 | 0 | Se repite el 1 |
| 7 | 3 | 1 | 0 | Se repite el 1 y el 3 |
| 6 | 3 | 2 | 0 | Se repite el 3 |
| 5 | 3 | 2 | 1 | Se repite el 1 y el 3 |
| 5 | 4 | 2 | 0 | VÁLIDA |

Por tanto M, E, R, O $\in\{5, 4, 2, 0\}$. Luego hay 4! maneras de asignar valores para M, E, R y O. Como además hay dos formas de asignar valores para N y U, tendremos que hay (4!·2 =) 48 maneras de escoger el valor de cada letra

**Noviembre 12-19:** A las 12:00 de la mañana sale un tren desde la ciudad A hacia la B, y a las 12:40 sale otro desde B hacia A. Ambos circulan a la misma velocidad constante en todo el trayecto y tardan tres horas y media en hacer el trayecto, ¿a qué hora se cruzan?

**Solución:** El trayecto dura tres horas y media, es decir (3,5·60 =)210 minutos. Durante 40 minutos sólo está viajando un tren. Luego en (210 – 40 =) 170 están viajando los dos trenes. Como viajan a la misma velocidad, cada uno de ellos viaja (170/2 =) 85 minutos, hasta el cruce. Luego desde las 12:00 han de pasar (40 + 85 =) 125 minutos, es decir 2 horas y 5 minutos hasta el cruce. Es decir, se cruzarán a las 14:05.

**Noviembre 13:** Si a, b y c son naturales tales que

$$\left(\frac{\mathbf{a}}{\mathbf{c}}+\frac{\mathbf{a}}{\mathbf{b}}+\mathbf{1}\right):\left(\frac{\mathbf{b}}{\mathbf{a}}+\frac{\mathbf{b}}{\mathbf{c}}+\mathbf{1}\right)=\mathbf{11}$$

¿cuántas ternas verifican:

$$\mathbf{a}+\mathbf{2b}+\mathbf{c}\leq\mathbf{40}$$

**Solución:** Tendremos:

$$\left(\frac{a}{c}+\frac{a}{b}+1\right):\left(\frac{b}{a}+\frac{b}{c}+1\right)=11=\frac{\frac{ba+ac+cb}{cb}}{\frac{bc+ba+ac}{ac}}=\frac{ac}{cb}\cdot\frac{b(a\ +c)+ac}{b(c+a)+ac}=\frac{a}{b}\Rightarrow a=11b$$

Por tanto:

$$a+2b+c\leq 40\ \ \Rightarrow\ \ 13b+c\leq 40$$

Como b,c $\in\mathbb{N}$, tendremos:

b = 1 $\Rightarrow$ $c\leq 27$ $\Rightarrow$ $(a, b, c)\in\{(11, 1, c)\mid c\in\{1, 2, 3, \cdots, 27\}\}$ $\Rightarrow$ 27 ternas

b = 2 $\Rightarrow$ $c\leq 14$ $\Rightarrow$ $(a, b, c)\in\{(22, 2, c)\mid c\in\{1, 2, 3, \cdots, 14\}\}$ $\Rightarrow$ 14 ternas

b = 3 $\Rightarrow$ $c\leq 1$ $\Rightarrow$ $(a, b, c)=(33, 3, 1)$ $\Rightarrow$ 1 terna

En total (27 + 14 + 1 =) 42 ternas

<u>**Noviembre 14:**</u> Todas las reservas de petróleo de Alaska durarían 35 años si solo las consumiera EE. UU. Si también las consumiera China durarían solamente 10 años. ¿Cuántos años duraría si solo las consumiera China?

<u>**Solución:**</u> Sean r el total de reservas de Alaska, u el consumo anual de EEUU y c el consumo anual de China. Del enunciado del problema tenemos:

$$r=35u$$
$$r=10(u+c)$$

Despejando u de la primera ecuación:

$$u=\frac{r}{35}$$

Y sustituyendo en la segunda:

$$r=10\left(\frac{r}{35}+c\right)=\frac{10r}{35}+10c\ \ \Rightarrow\ \ r-\frac{10r}{35}=10c\ \ \Rightarrow\ \ \frac{25r}{35}=10c\ \ \Rightarrow\ \ \frac{r}{c}=\frac{35\cdot 10}{25}=14$$

Es decir, las reservas de petróleo de Alaska durarían 14 años si solo las consumiera China

<u>**Noviembre 16:**</u> Si **|u – 10|= v** y **u < 10** ¿qué valor toma u – v?

<u>**Solución 1:**</u> Al ser u < 10, tenemos u – 10 > 0. Por tanto:

v = |u – 10|= 10 – u $\Rightarrow$ u – v = u – 10 + u = 2u – 10

<u>**Solución 2:**</u> Al ser u < 10, tenemos u – 10 > 0. Por tanto:

v = |u – 10|= 10 – u $\Rightarrow$ u = 10 – v $\Rightarrow$ u – v = 10 – v – v = 10 – 2v

<u>**Noviembre 17:**</u> Si B > A > 1, compara las fracciones

$$\frac{A-1}{B-1},\qquad \frac{A+1}{B+1},\qquad \frac{A^2-1}{B^2-1},\qquad \frac{A^3-1}{B^3-1}$$

<u>**Solución:**</u> Tenemos, si B > A > 1

$$(A+1)\cdot(B-1)=AB+B-A-1\{B-A>0>A-B\}>AB-B+A-1=(A-1)\cdot(B+1)$$

De donde (pues B + 1 > 0 y B – 1 > 0)

$$\frac{A+1}{B+1}>\frac{A-1}{B-1}$$

Por otra parte:

$$B+1>A+1 \xRightarrow[B-1>A-1>0]{} \frac{(B+1)\cdot(B-1)}{(B-1)} > \frac{(A+1)\cdot(A-1)}{(A-1)} \Rightarrow \frac{B^2-1}{B-1} > \frac{A^2-1}{A-1}$$

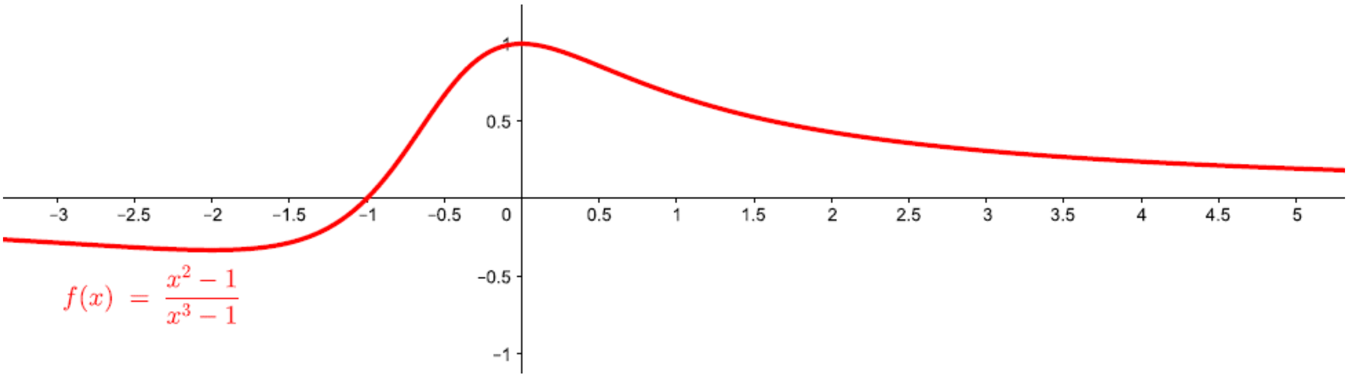
Y como: $A-1>0$ y $B^2-1>0$ tendremos:

$$\frac{A-1}{B-1} > \frac{A^2-1}{B^2-1}$$

Por último, consideremos

$$y = \frac{x^2-1}{x^3-1}$$

que es decreciente en $]0,\ +\infty[$




Como B > A > 1 > 0

$$\frac{B^2-1}{B^3-1} < \frac{A^2-1}{A^3-1} \xRightarrow[A^2-1>0;\, B^3-1>0]{} \frac{B^2-1}{A^2-1} < \frac{B^3-1}{A^3-1} \Rightarrow \frac{A^2-1}{B^2-1} > \frac{A^3-1}{B^3-1}$$

En definitiva:

$$\frac{A+1}{B+1} > \frac{A-1}{B-1} > \frac{A^2-1}{B^2-1} > \frac{A^3-1}{B^3-1}$$

**Noviembre 18:** Hallar los pares de números primos (x, y) tales que también son primos x + y y x - y. ¿Es también primo la suma de los cuatro?

**Solución:** Si x e y son ambos primos e impares su suma será par. Por tanto, si buscamos x e y primos con x + y primo, x o y debe ser primo par, es decir, 2. Supongamos que y = 2. Buscamos, entonces, x primo con x – 2 y x + 2 primos. Pero entre x – 2, x y x + 2 hay un múltiplo de 3 (Si x = 0(3) ya está demostrado, si x = 1(3) entonces x + 2 = 0(3) y si x = 2(3) entonces x – 2 = 0(3)). La única posibilidad es x – 2 = 3 (el único múltiplo de tres que es primo). Por tanto, x = 5 es la única posibilidad.

Hay un único par de primos (2, 5) de forma que su suma y su diferencia (3 y 7) son primos. La suma de los cuatro es (2 + 3 + 5 + 7 =) 17 es también primo.

**Noviembre 20:** En una circunferencia de radio r = $5/\sqrt{2}$ inscribimos un triángulo rectángulo con catetos números naturales. Hallar su perímetro

**Solución:** Si se trata de un triángulo rectángulo la hipotenusa debe ser un diámetro, (pues entonces, el ángulo inscrito es 90° y el central de 180°). Por tanto, si a y b son los catetos del triángulo rectángulo debe cumplirse:

$$a^2 + b^2 = \left(\frac{2 \cdot 5}{\sqrt{2}}\right)^2 = 50$$

Y puesto que a y b deben de ser naturales

| a | $50 - a^2$ | $¿\, b = \sqrt{50 - a^2} \in \mathbb{N}?$ |
|---|---|---|
| 1 | 49 | sí (b = 1) |
| 2 | 46 | no |
| 3 | 41 | no |
| 4 | 34 | no |
| 5 | 25 | sí (b = 5) |
| 6 | 14 | no |
| 7 | 49 | sí (b = 7) |

Luego las únicas soluciones admisibles son a=1, b=7 y a = b = 5. Por lo tanto, el perímetro puede valer $8 + 5\sqrt{2}$ o $10 + 5\sqrt{2}$.

**<u>Noviembre 21:</u>** ¿Cuántos enteros entre 3 y 89 no pueden escribirse como suma exactamente de dos números del conjunto {1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55}?

**<u>Solución:</u>** Primero debemos darnos cuenta que la suma de dos cualesquiera de los números dados no dará el mismo resultado pues cada número, de los dados, es suma de los dos anteriores (nos dan los primeros términos de la sucesión de Fibonacci).

Calculemos cuántos números podemos obtener sumando dos de los dados. Por el punto anterior habrá tantos números como combinaciones de nueve elementos tomados de dos en dos, es decir:

$$C_2^9 = \binom{9}{2} = \frac{9!}{2! \cdot 7!} = 36$$

Como el más pequeño número que podemos obtener sumando dos de los dados es (1 + 2 =) 3 y el más grande es (34 + 55 =) 89, hay (89 – 2 =) 87 aspirantes a ser obtenidos. Como podemos obtener 36, no se pueden obtener (87 – 36 =) 51.

**<u>Noviembre 23-30:</u>** El número de años que cumplí ayer es un primo de dos cifras. Si le sumo la edad de mi hijo, obtengo otro primo. Pero si los resto obtengo un múltiplo de 3 y de 11. Si sumo las cifras de mi edad y las cifras de la edad de mi hijo obtengo ocho. ¿Cuáles son las edades?

**<u>Solución:</u>** Sean 10a + b y 10c + d las edades de madre e hijo, respectivamente. Tenemos, entonces, de las condiciones del enunciado:

A. a > c (con c posiblemente cero) con a, b, c, d $\in \mathbb{N}$
B. 10a + b es primo
C. 10(a + c) + (b +d) es primo
D. 10 (a – c) + (b – d) es múltiplo de 33
E. a + b + c + d = 8 ($\Rightarrow$ a $\leq$ 8)

Si a = 8, de la condición E, tenemos que b = c = d = 0, con lo que; 10a + b = 80 que no es primo, lo que contradice B

Si a = 7, los primos de dos cifras con decenas igual a 7 son: 71, 73 y 79.

Si b = 1, tenemos, por E, que c = d = 0, que contradice D.

Si b = 3 o b = 9, se contradice E

Si a = 6, los primos de dos cifras con decenas igual a 6 son: 61 y 67.

$$\left.\begin{array}{c}\text{Si b} = 1 \text{ (por E)} \\ \text{c} + \text{d} = 2\end{array}\right\} \Rightarrow \begin{cases}\text{si c} = 2 \text{ y d} = 0 & \Rightarrow 61 - 20 = 41 \neq \dot{\widehat{33}} \\ \text{si c} = 1 \text{ y d} = 1 & \Rightarrow 61 - 11 = 50 \neq \dot{\widehat{33}} \\ \text{si c} = 0 \text{ y d} = 2 & \Rightarrow 61 - 02 = 59 \neq \dot{\widehat{33}}\end{cases}$$

Si b = 7 (por E) tendremos que c + d = -5, que contradice A

Si a = 5, los primos de dos cifras con decenas igual a 5 son: 53 y 59.

Si b = 3, tenemos, por E, que c = d = 0, que contradice D.

Si b = 9, (por E) tendremos que c + d = - 6, que contradice A

Si a = 4, los primos de dos cifras con decenas igual a 4 son: 41, 43 y 49.

$$\left.\begin{array}{c}\text{Si b} = 1 \text{ (por E)} \\ \text{c} + \text{d} = 3\end{array}\right\} \Rightarrow \begin{cases}\text{si c} = 3 \text{ y d} = 0 & \Rightarrow 41 - 30 = 11 \neq \dot{\widehat{33}} \\ \text{si c} = 2 \text{ y d} = 1 & \Rightarrow 41 - 21 = 20 \neq \dot{\widehat{33}} \\ \text{si c} = 1 \text{ y d} = 2 & \Rightarrow 41 - 12 = 29 \neq \dot{\widehat{33}} \\ \text{si c} = 0 \text{ y d} = 3 & \Rightarrow 41 - 03 = 38 \neq \dot{\widehat{33}}\end{cases}$$

$$\left.\begin{array}{c}\text{Si b} = 3 \text{ (por E)} \\ \text{c} + \text{d} = 1\end{array}\right\} \Rightarrow \begin{cases}\text{si c} = 1 \text{ y d} = 0 & \Rightarrow \mathbf{41 \text{ y } 10} \text{ ¡}\mathbf{SOLUCIÓN}\text{!} \\ \text{si c} = 0 \text{ y d} = 1 & \Rightarrow 41 - 01 = 40 \neq \dot{\widehat{33}}\end{cases}$$

Si b = 9, (por E) tendremos que c + d = - 5, que contradice A

Si a = 3, los primos de dos cifras con decenas igual a 3 son: 31 y 37

$$\left.\begin{array}{c}\text{Si b} = 1 \text{ (por E)} \\ \text{c} + \text{d} = 4 \text{ (por A)}\end{array}\right\} \Rightarrow \begin{cases}\text{si c} = 2 \text{ y d} = 2 & \Rightarrow 31 - 22 = 9 \neq \dot{\widehat{33}} \\ \text{si c} = 1 \text{ y d} = 3 & \Rightarrow 31 - 13 = 18 \neq \dot{\widehat{33}} \\ \text{si c} = 0 \text{ y d} = 3 & \Rightarrow 31 - 03 = 28 \neq \dot{\widehat{33}}\end{cases}$$

Si b = 7, (por E) tendremos que c + d = - 2, que contradice A

Valores para a menores o iguales a 2 no son solución pues una edad de la madre de veinte y pico menos la edad del hijo no puede ser 33

**<u>Noviembre 24-25:</u>** Dani escoge al azar tres números del conjunto {1, 2, 3, 4} y Laia uno del conjunto {2, 4, 6, 8, 10}, ¿Cuál es la probabilidad de que el número extraído por Laia sea mayor que la suma de los extraídos por Dani?

**<u>Solución:</u>** Para las extracciones de Dani: Escoger 3 números de {1, 2, 3, 4} y sumarlos equivale a extraer solo 1 y sumar los no sacados. Luego los resultados posibles y sus probabilidades para Dani son:

$$\text{Dani} \Rightarrow \begin{cases}1 \Rightarrow S_D = 9 \longrightarrow \dfrac{1}{4} \\ 2 \Rightarrow S_D = 8 \longrightarrow \dfrac{1}{4} \\ 3 \Rightarrow S_D = 7 \longrightarrow \dfrac{1}{4} \\ 4 \Rightarrow S_D = 6 \longrightarrow \dfrac{1}{4}\end{cases}$$

Mientras que, para Laia, tenemos:

$$\text{Laia} \;\Rightarrow\; \begin{cases} 2 \;\Rightarrow\; S_L = 2 \;\longrightarrow\; \dfrac{1}{5} \\ 4 \;\Rightarrow\; S_L = 4 \;\longrightarrow\; \dfrac{1}{5} \\ 6 \;\Rightarrow\; S_L = 6 \;\longrightarrow\; \dfrac{1}{5} \\ 8 \;\Rightarrow\; S_L = 8 \;\longrightarrow\; \dfrac{1}{5} \\ 10 \;\Rightarrow\; S_L = 10 \longrightarrow\; \dfrac{1}{5} \end{cases}$$

$$\begin{aligned} P(L > D) &= P\Big((S_L = 8) \cap \big((S_D = 7) \cup (S_D = 8)\big)\Big) + P\big((S_L = 10) \cap (S_D \text{ cualquiera})\big) \\ &= \frac{1}{5} \cdot \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4}\right) + \frac{1}{5} = \frac{3}{10} \end{aligned}$$

**<u>Noviembre 26:</u>** ¿Cuál es la probabilidad de que un número de 10 cifras contenga los diez dígitos?

**<u>Solución:</u>** Calculemos en primer lugar los números de diez cifras que podemos generar. Teniendo en cuenta que los empiezan por 0 solo tienen nueve cifras, tenemos:

Casos posibles: $VR_{10}^{10} - VR_{10}^{9} = 10^{10} - 10^9$

Los casos favorables serán los números de 10 cifras que contienen los diez dígitos. Es decir:

Casos favorables: $V_{10}^{10} - V_9^9 = 10! - 9!$

La probabilidad pedida, es pues:

$$P = \frac{10! - 9!}{10^{10} - 10^9} = \frac{9! \cdot (10 - 1)}{10^9 \cdot (10 - 1)} = \frac{9!}{10^9}$$

**<u>Noviembre 27-28:</u>** La media de tres impares consecutivos es 7. Si añadimos otro entero positivo m, distinto de los tres, la media de los cuatro es otro entero. Halla los tres valores más pequeños de m.

**<u>Solución:</u>** Sean a, a + 2, a + 4 los impares consecutivos del enunciado. Tendremos:

$$\frac{a + a + 2 + a + 4}{3} = \frac{3a + 6}{3} = 7 \;\Rightarrow\; a = 5$$

Luego los tres impares consecutivos del enunciado son: 5, 7 y 9. Exigimos, ahora, que la media de los cuatro naturales sea otro natural:

$$\frac{5 + 7 + 9 + m}{4} = \frac{21 + m}{4} = 5 + \frac{1 + m}{4} \in \mathbb{N} \;\Leftrightarrow\; m = 3(4) = \{3, 7, 11, 15, \cdots\}$$

Puesto que m ha de diferente de los tres impares iniciales, tenemos que la contestación es m = 3, 11 y 15