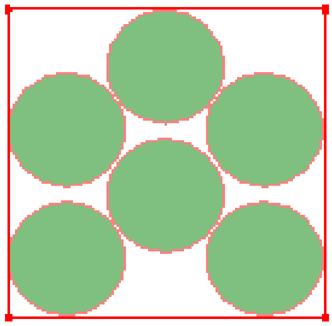
SOLUCIONES DICIEMBRE 2020

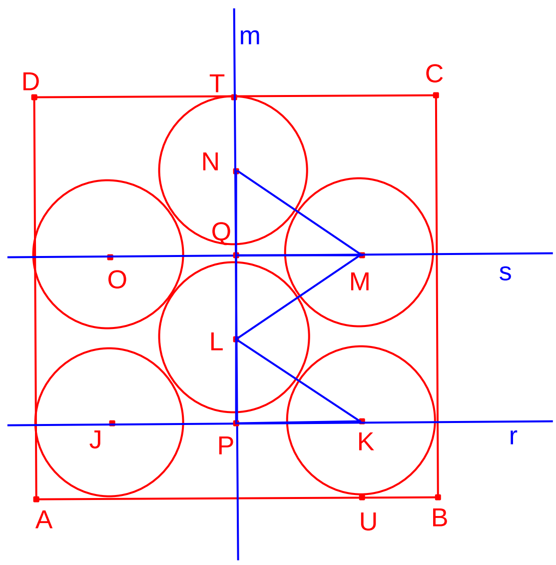
PROBLEMAS PARA UTILIZAR PROGRAMAS GEOMÉTRICOS. AUTOR: RICARD PEIRÓ I ESTRUCH. IES “Abastos”, València

Diciembre 1-2: Para empaquetar 6 circunferencias iguales en un cuadrado se ha de hacer la distribución de la figura (demostrado por Graham en 1963). Determinar la proporción entre el lado del cuadrado y el radio de las circunferencias



Solución: Sea el cuadrado ABCD de lado $\overline{AB} = c$

Sean J, K, L, M, N, O los centros de las seis circunferencias de radio r. Consideremos la recta m, mediatriz del lado $\overline{AB}$. Sea r la recta que pasa por los centros J, K. Sea s la recta que pasa por l s centros O, M. Las rectas m, r se intersectan en el punto P. Las rectas m, s se intersectan en el punto Q.



$$\overline{JK} = c - 2r.$$

$$\overline{PQ} = \overline{QM} = \frac{c - 2r}{2}, \overline{LK} = \overline{MN} = \overline{LM} = 2r$$

Entonces, los triángulos rectángulos $\overset{\triangle}{LPK}, \overset{\triangle}{LQM}, \overset{\triangle}{NQM}$ son iguales.

Entonces, $\overline{LP} = \overline{QL} = \overline{QN}$

$$2r + 3\overline{LQ} = c$$

$$\overline{LQ} = \frac{c - 2r}{3}$$

Aplicando el teorema de Pitágoras al triángulo rectángulo $\overset{\triangle}{LPK}$

$$(2r)^2 = \left(\frac{c - 2r}{2}\right)^2 + \left(\frac{c - 2r}{3}\right)^2$$

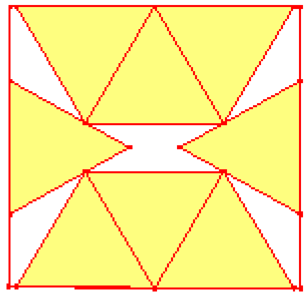
Simplificando:

$$92r^2 + 52cr - 13c^2 = 0$$

$$92\left(\frac{r}{c}\right)^2 + 52\left(\frac{r}{c}\right) - 13 = 0$$

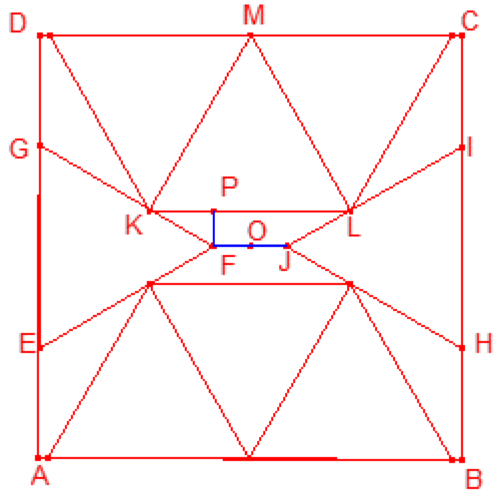
Resolviendo la ecuación:

$$\frac{r}{c} = \frac{-13 + 6\sqrt{13}}{46}$$



Diciembre 3-4: Para empaquetar ocho triángulos equiláteros iguales en un cuadrado, hay que colocarlos como en la figura (probado por Erich Friedman en 1966). Determinar la razón del lado del cuadrado y el lado del triángulo

Solución: Sea el cuadrado ABCD de lado $\overline{AB} = c$ y de centro O. Sean los triángulos equiláteros $\overset{\Delta}{EFG}, \overset{\Delta}{HIJ}, \overset{\Delta}{KLM}$ de lado $\overline{GE} = \overline{KL} = x$. Sea P la proyección de F sobre $\overline{KL}$



$$\angle PKF = 30^\circ$$

$$\overline{FO} = \frac{c - x\sqrt{3}}{2}, \overline{PF} = \frac{c - x\sqrt{3}}{2}$$

$$\overline{KP} = \frac{\overline{KL}}{2} - \overline{FO} = \frac{x - c + x\sqrt{3}}{2} = \frac{(1+\sqrt{3})x - c}{2}$$

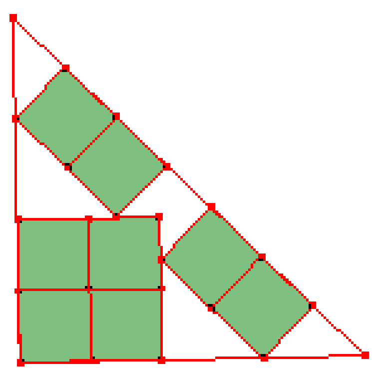
Aplicando razones trigonométricas al triángulo rectángulo $\overset{\Delta}{KPF}$

$$\frac{c - x\sqrt{3}}{(1+\sqrt{3})x - c} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

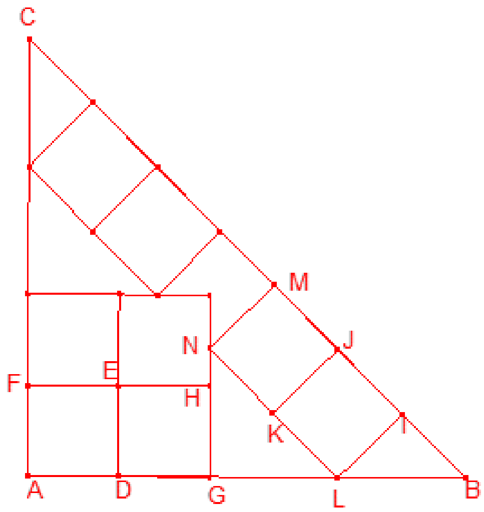
$$(3+\sqrt{3})c = (4\sqrt{3}+3)x$$

La proporción entre el lado del cuadrado y el lado del triángulo equilátero es:

$$\frac{c}{x} = \frac{4\sqrt{3}+3}{3+\sqrt{3}} = \frac{3\sqrt{3}-1}{2}$$



Diciembre 5-12: Para empaquetar ocho cuadrados iguales en un triángulo rectángulo isósceles, hay que colocarlos como en la figura (probado por Erich Friedman en 2005). Determinar la razón entre el cateto del triángulo y el lado del cuadrado



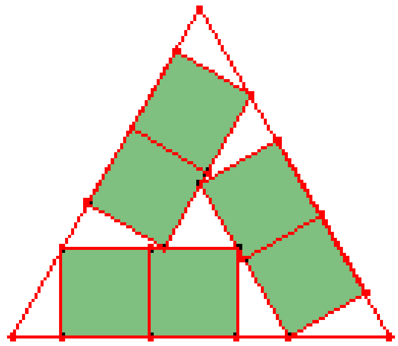
Solución: Sea el triángulo rectángulo $\overset{\Delta}{ABC}$, con $A = 90°$ y de cateto $\overline{AB} = c$. Sean los cuadrados ADEF, DGHE, IJKL, JMNK de lados $\overline{AD} = \overline{DG} = \overline{IJ} = \overline{JM} = x$. Entonces:

$$\overline{GL} = \overline{LB} = x\sqrt{2}$$

$$\overline{AB} = c = \left(2 + 2\sqrt{2}\right)x$$

$$\frac{c}{x} = 2 + 2\sqrt{2}$$

Diciembre 7-8: Para empaquetar 6 cuadrados iguales en un triángulo equilátero se ha de hacer la distribución de la figura (demostrado por Erich Friedman en 1997). Determinar la proporción entre le lado del triángulo y el lado del cuadrado

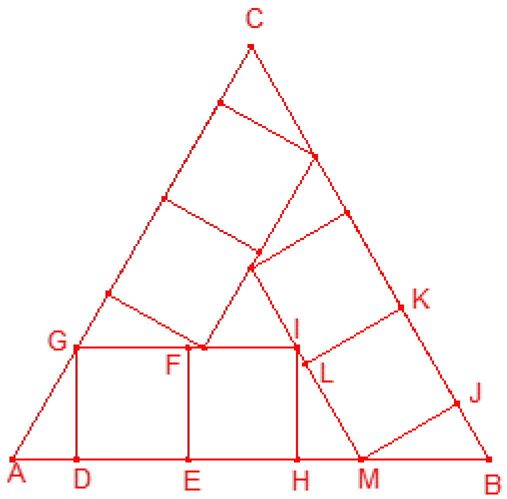


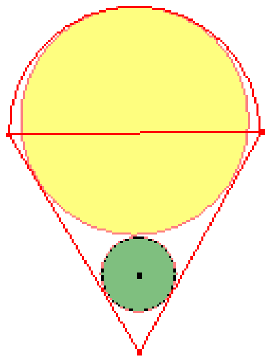
Solución: Sea el triángulo equilátero grande $\overset{\Delta}{ABC}$ de lado $\overline{AB} = c$. Sean los cuadrados DEFG, EHIF, JKLM de lado $\overline{DE} = x, \overline{EH} = x, \overline{JK} = x$

$$\overline{AD} = \overline{HM} = \frac{\sqrt{3}}{3}x, \overline{MB} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$$

$$\overline{AB} = c = \left(2 + \frac{4\sqrt{3}}{3}\right)x$$

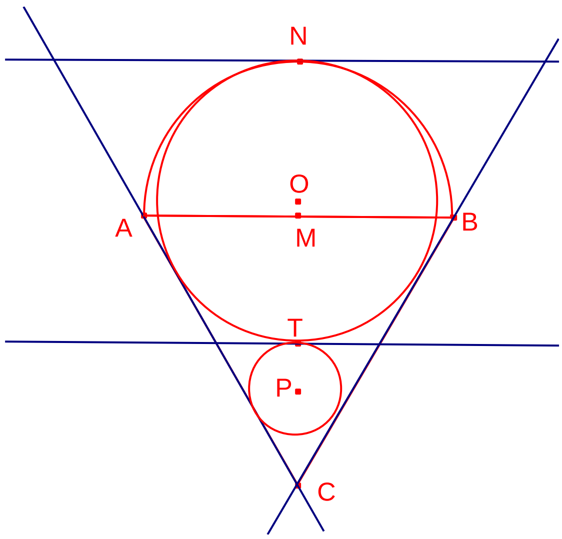
$$\frac{c}{x} = 2 + \frac{4\sqrt{3}}{3}$$





Diciembre 9-16: Sobre un lado de un triángulo equilátero se ha dibujado una semicircunferencia. Una circunferencia es tangente interior a la semicircunferencia y a dos lados del triángulo. Otra circunferencia es tangente exterior a la circunferencia anterior y a los mismos lados. Determinar la proporción entre los radios de las dos circunferencias

Solución: Sea $\overset{\Delta}{ABC}$ el triángulo equilátero de lado $\overline{AB} = c$. Sea M el punto medio del lado $\overline{AB}$. Sea N el punto medio de la semicircunferencia y punto de tangencia. Sea O el centro de la circunferencia grande de radio $\overline{ON} = r$. Aplicando el teorema de Pitágoras al triángulo $\overset{\Delta}{AMC}$:



$$\overline{MC} = \frac{\sqrt{3}}{2}c$$

$$\overline{NC} = \overline{MC} + \frac{c}{2} = \frac{1+\sqrt{3}}{2}c$$

$$\overline{ON} = \frac{1}{3}\overline{NC}$$

$$r = \frac{1+\sqrt{3}}{6}c$$

Sea T el punto de tangencia de las dos circunferencias. Sea P el centro de la circunferencia pequeña de radio $\overline{PT} = s$

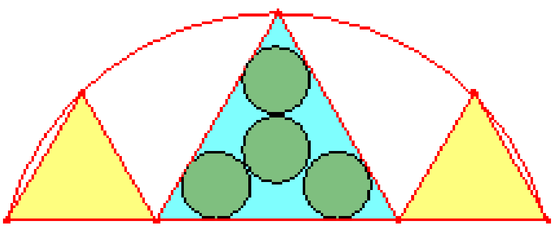
$$\overline{TC} = \overline{NC} - 2r = \frac{1+\sqrt{3}}{6}c$$

$$\overline{PT} = \frac{1}{3}\overline{TC}$$

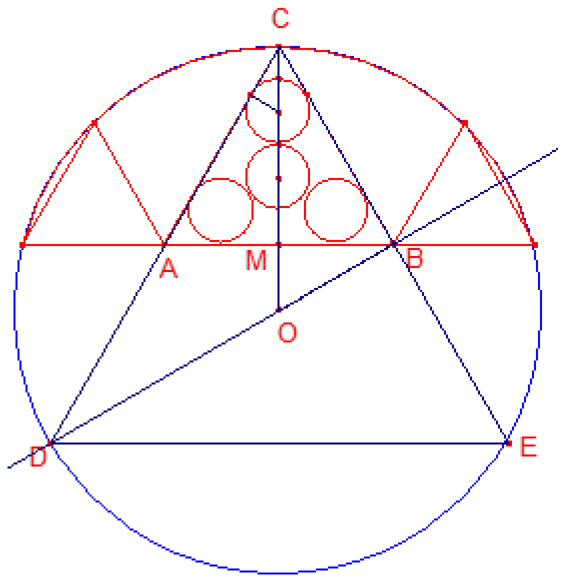
$$s = \frac{1+\sqrt{3}}{18}c$$

$$\frac{s}{r} = \frac{1}{3}$$

Diciembre 10-11: En una cuerda de circunferencia de radio R se han dibujado tres triángulos equiláteros. En el central se han inscrito cuatro círculos iguales de radio r. Hallar la relación entre r y R



Solución: Consideremos la circunferencia de centro O i radio R. Sea $\overset{\Delta}{ABC}$ el triángulo equilátero central de lado $\overline{AB} = a$. Sea M el punto medio del lado $\overline{AB}$. Notemos que $\overline{CM} = 6r$. Dibujamos el triángulo equilátero inscrito en la circunferencia de radio R. Notemos que OB es perpendicular a CE ya que OB es la mediatriz del triángulo equilátero de la derecha.



$$\overline{OB} = \frac{R}{2}$$

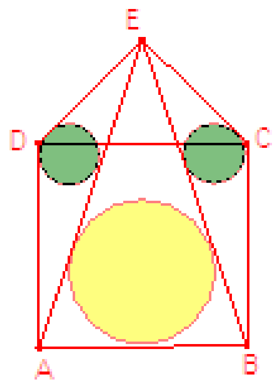
$$\overline{OM} = \frac{1}{2}\overline{OB} = \frac{R}{4}$$

$$6r + \frac{R}{4} = R$$

Entonces, $r = \frac{1}{8}R$

Diciembre 14-15: Sobre el lado AB de un cuadrado ABCD se ha dibujado un triángulo rectángulo isósceles ΔCDE, donde ∠CED = 90°.

Calcular la proporción entre los radios de las circunferencias inscritas en los triángulos ΔADE y ΔABE.



Solución: Sea $\overline{AB} = c$ el lado del cuadrado ABCD. Sean M, N los puntos medios de los lados $\overline{AB}, \overline{CD}$, respectivamente. Sea O el centro de la circunferencia inscrita al triángulo $\overset{\Delta}{ABE}$ de radio $r = \overline{OM}$.

$$\overline{NE} = \overline{CN} = \frac{c}{2}, \overline{AM} = \frac{c}{2}$$

$$\overline{ME} = \frac{3c}{2}$$

Aplicando el teorema de Pitágoras al triángulo rectángulo $\overset{\Delta}{AME}$:

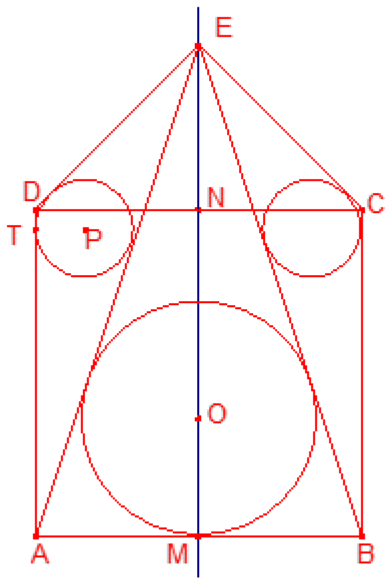
$$\overline{AE} = \frac{\sqrt{10}}{2}$$

El área del triángulo $\overset{\Delta}{ABE}$ es:

$$S_{ABE} = \frac{1}{2}c\frac{3}{2}c = \frac{1 + 2\frac{\sqrt{10}}{2}}{2}cr$$

Aislando r:

$$r = \frac{\sqrt{10} - 1}{6}c$$



Sea P el centro de la circunferencia inscrita al triángulo $\overset{\Delta}{ADE}$ de radio $s = \overline{PT}$. El área del triángulo $\overset{\Delta}{ADE}$ es:

$$S_{ADE} = \frac{1}{2}c\frac{1}{2}c = \frac{1 + \frac{\sqrt{10}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}}{2}cs$$

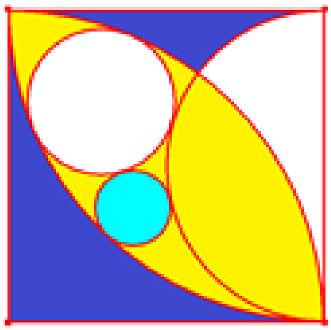
Aislando s:

$$s = \frac{1}{2 + \sqrt{2} + \sqrt{10}}c$$

La proporción entre los radios es

$$\frac{s}{r}=\frac{\frac{1}{2+\sqrt{2}+\sqrt{10}}}{\frac{\sqrt{10}-1}{6}}=\frac{6}{8-\sqrt{2}+2\sqrt{5}+\sqrt{10}}$$

Diciembre 17-24: Dentro de un cuadrado se han dibujado dos cuadrantes de centros dos vértices opuestos y una semicircunferencia de diámetro un lado. Se ha dibujado una circunferencia tangente interior a los cuadrantes y exterior a la semicircunferencia. Otra circunferencia es tangente exterior a la anterior, tangente interior a un cuadrante y tangente exterior a la semicircunferencia. Hallar la razón entre los radios de las dos circunferencias



Solución: Sea ABCD el cuadrado de lado $\overline{AB}=1$. Sea O el centro de la circunferencia tangente interior a los cuadrantes y exterior a la semicircunferencia, de radio r. Sea H la proyección de O sobre el lado $\overline{AB}$. Sea $\overline{CH}=\overline{OI}=\overline{OJ}=x$.

$$\overline{OH}=1-x,\overline{OC}=1-r,\overline{OM}=\frac{1}{2}+r,\overline{MH}=\frac{1}{2}-x$$

Aplicando el teorema de Pitágoras al triángulo rectángulo $\overset{\Delta}{OHC}$:

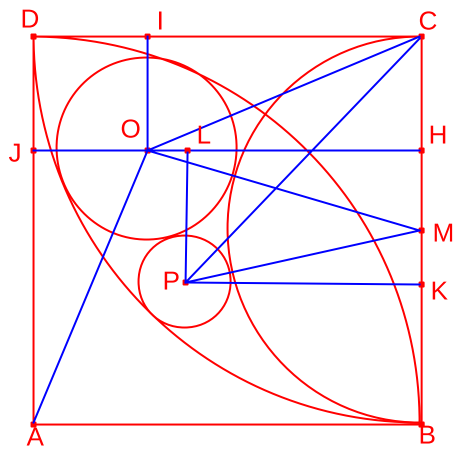
$$(1-r)^2=x^2+(1-x)^2$$

Simplificando:

$$r^2-2r=2x^2-2x \qquad (1)$$

Aplicando el teorema de Pitágoras al triángulo rectángulo $\overset{\Delta}{OHM}$:

$$\left(\frac{1}{2}+r\right)^2=\left(\frac{1}{2}-x\right)^2+(1-x)^2$$



Simplificando:

$$r^2+r=2x^2-3x+1 \qquad (2)$$

Restando las expresiones (1) (2)

$$x=1-3r \qquad (3)$$

Sustituyendo la expresión (3) en la expresión (1)

$$r^2-2r=2(1-3r)^2-2(1-3r)$$

Resolviendo la ecuación:

$$r=\frac{4}{17}$$

Entonces, $x=\frac{5}{17},\overline{OH}=\frac{12}{17}$

Sea P el centro de la circunferencia tangente exterior a la circunferencia de centro O, tangente interior a un cuadrante y tangente exterior a la semicircunferencia. Sea s su radio.

Sea K la proyección de P sobre el lado $\overline{\mathrm{AB}}$

Sea L la proyección de P sobre $\overline{\mathrm{OH}}$

Sea $\overline{\mathrm{OL}} = \mathrm{y}, \overline{\mathrm{MK}} = \mathrm{z}$

$$\overline{\mathrm{OP}} = \frac{4}{17} + \mathrm{s}, \overline{\mathrm{PL}} = \overline{\mathrm{HK}} = \frac{7}{34} + \mathrm{z}$$

$$\overline{\mathrm{PM}} = \frac{1}{2} + \mathrm{s}, \overline{\mathrm{PK}} = \frac{12}{17} - \mathrm{y}$$

$$\overline{\mathrm{PC}} = 1 - \mathrm{s}, \overline{\mathrm{CK}} = \frac{1}{2} + \mathrm{z}$$

Aplicando el teorema de Pitágoras al triángulo rectángulo $\overset{\Delta}{\mathrm{PKM}}$:

$$\left(\frac{1}{2} + \mathrm{s}\right)^2 = \mathrm{z}^2 + \left(\frac{12}{17} - \mathrm{y}\right)^2 \qquad (4)$$

Aplicando el teorema de Pitágoras al triángulo rectángulo $\overset{\Delta}{\mathrm{PKC}}$:

$$(1 - \mathrm{s})^2 = \left(\frac{1}{2} + \mathrm{z}\right)^2 + \left(\frac{12}{17} - \mathrm{y}\right)^2 \qquad (5)$$

Restando las expresiones (4) y (5) y simplificando:

$$\mathrm{z} = \frac{1}{2} - 3\mathrm{s} \qquad (6)$$

$$\overline{\mathrm{OP}} = \frac{4}{17} + \mathrm{s}, \overline{\mathrm{PL}} = \overline{\mathrm{HK}} = \frac{7}{34} + \mathrm{z} = \frac{12}{17} - 3\mathrm{s}$$

Aplicando el teorema de Pitágoras al triángulo rectángulo $\overset{\Delta}{\mathrm{OLP}}$:

$$\left(\frac{4}{17} + \mathrm{s}\right)^2 = \mathrm{y}^2 + \left(\frac{12}{17} - 3\mathrm{s}\right) \qquad (7)$$

Simplificando:

$$-8\mathrm{s}^2 + \frac{80}{17}\mathrm{s} = \mathrm{y}^2 + \frac{128}{289} \qquad (8)$$

Simplificando la expresión (4)

$$\left(\frac{1}{2} + \mathrm{s}\right)^2 = \left(\frac{1}{2} - 3\mathrm{s}\right)^2 + \left(\frac{12}{17} - \mathrm{y}\right) \qquad (9)$$

$$-8\mathrm{s}^2 + 4\mathrm{s} = \mathrm{y}^2 - \frac{24}{17}\mathrm{y} + \frac{144}{289} \qquad (10)$$

Restando las expresiones (9) (10)

$$\mathrm{y} = \frac{2}{51} + \frac{1}{2}\mathrm{s} \quad (11)$$

Simplificando la expresión (7)

$$\left(\frac{4}{17} + \mathrm{s}\right)^2 = \left(\frac{2}{51} + \frac{1}{2}\mathrm{s}\right)^2 + \left(\frac{12}{17} - 3\mathrm{s}\right) \qquad (12)$$

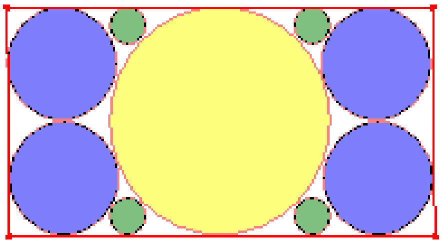
Resolviendo la ecuación:

$$s = \frac{4}{33}$$

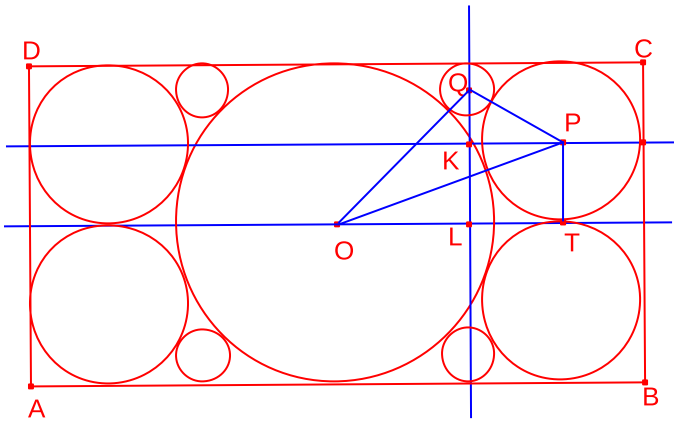
La proporción entre los radios es:

$$\frac{s}{r} = \frac{17}{33}$$

Diciembre 18-19: En un rectángulo se ha dibujado una circunferencia central tangente a los lados superior e inferior, de radio R. Se han añadido cuatro circunferencias iguales tangentes exteriores a la circunferencia y a los lados del rectángulo. Se han añadido las cuatro circunferencias pequeñas tangentes interiores a un lado del rectángulo y a las circunferencias anteriores. Hallar las dimensiones del rectángulo y los radios de las circunferencias



Solución: Sea el rectángulo exterior ABCD. $\overline{AD} = 2R$. Sea O el centro de la circunferencia central de radio R. El radio de las cuatro circunferencias de las esquinas es $\frac{R}{2}$. Sea P el centro de la circunferencia tangente a dos lados



$$\widetilde{OP} = R + \frac{R}{2} = \frac{3R}{2}, \overline{PT} = \frac{R}{2}$$

Aplicando el teorema de Pitágoras al triángulo rectángulo $\overset{\Delta}{OTP}$

$$\overline{OT} = R\sqrt{2}$$

El lado $\overline{AB}$ del rectángulo es:

$$\overline{AB} = 2\left(\overline{OT} + \frac{R}{2}\right) = \left(2\sqrt{2} + 1\right)R$$

Sea Q el centro de la circunferencia tangente a las dos circunferencias y a un lado. Sea s su radio. Sea la recta r que pasa por P paralela a la recta AB. Sea la recta s que pasa por Q paralela a la recta AD. Sea K la intersección de las rectas r y s. Sea L la intersección de las rectas OT y s.

$$\overline{OQ} = R + s, \overline{LQ} = R - s$$

Aplicando el teorema de Pitágoras al triángulo rectángulo $\overset{\Delta}{OLQ}$

$$\overline{OL} = 2\sqrt{Rs}$$

$$\overline{PK} = R\sqrt{2} - 2\sqrt{Rs}, \overline{QK} = \frac{R}{2} - s, \overline{PQ} = \frac{R}{2} + s$$

Aplicando el teorema de Pitágoras al triángulo rectángulo $\overset{\Delta}{PKQ}$

$$\left(\frac{R}{2} + s\right)^2 = \left(\frac{R}{2} - s\right)^2 + \left(R\sqrt{2} - 2\sqrt{Rs}\right)^2$$

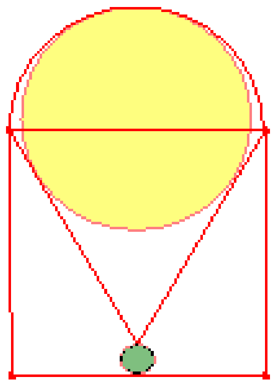
Simplificando:

$$s^2 - 6Rs + R^2 = 0$$

$$\left(\frac{s}{R}\right)^2 - 6\frac{s}{R} + 1 = 0$$

Resolviendo la ecuación, $s = \left(3 - 2\sqrt{2}\right)R$.

Diciembre 21-28: Sobre el lado de un cuadrado se ha dibujado un triángulo equilátero interior al cuadrado y una semicircunferencia exterior al cuadrado. Una circunferencia es tangente a la semicircunferencia y a dos lados del triángulo. Otra circunferencia pasa por el vértice del triángulo y es tangente a un lado del cuadrado. Determinar la proporción entre radios.



Solución: Siga ABCD el quadrat de costat $\overline{AB} = c$. Siga ABC el triangle equilàter $\overset{\Delta}{ABE}$. Siga M el punt mig del costat $\overline{AB}$. Siga N el punt mig de la semicircumferència, punt de tangència. Siga O el centre de la circumferència gran de radi $\overline{ON} = r$.

Aplicando el teorema de Pitágoras al triángulo rectángulo $\overset{\Delta}{AME}$:

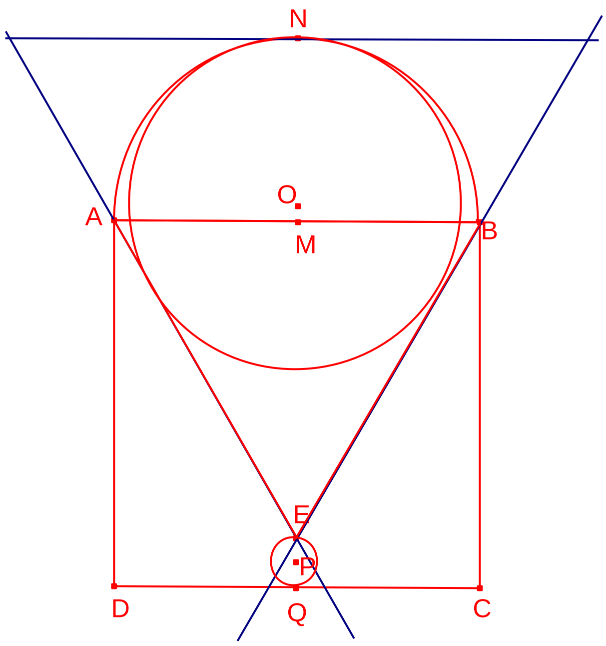
$$\overline{ME} = \frac{\sqrt{3}}{2}c$$

$$\overline{NE} = \overline{ME} + \frac{c}{2} = \frac{1+\sqrt{3}}{2}c$$

$$\overline{ON} = \frac{1}{3}\overline{NE}$$

$$r = \frac{1+\sqrt{3}}{6}c$$

Sea Q el punto medio del lado $\overline{CD}$. Sea P el centro de la circunferencia pequeña de radio $s = \overline{PE} = \overline{PQ}$.



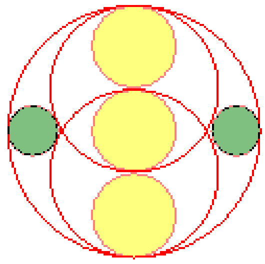
$$\overline{NQ} = \frac{3c}{2}$$

$$\overline{EQ} = \overline{NQ} - \overline{NE} = \frac{2-\sqrt{3}}{2}c$$

$$s = \frac{1}{2}\overline{EQ} = \frac{2-\sqrt{3}}{4}c$$

$$\frac{s}{r} = \frac{\frac{2-\sqrt{3}}{4}}{\frac{1+\sqrt{3}}{2}} = \frac{3\left(2\sqrt{3}-5\right)}{4}$$

Diciembre 22-23: En el interior de una circunferencia de radio R, sobre un diámetro, se ha dibujado 3 circunferencias de radio r_1. Se han dibujado dos circunferencias de radio r_2, tangentes interiores a la de radio R y tangentes exteriores a dos de las tres circunferencias de radio r_1. Se han dibujado dos circunferencias de radio r_3 tangentes interiores a la de radio R y tangentes exteriores a las de radio r_2. Calcular la razón entre r_3 y r_1



Solución: Consideremos el diámetro $\overline{\mathrm{AB}}$ de la circunferencia exterior de radio R. Sea C el centro de la circunferencia de radio $\mathrm{r}_1 = \overline{\mathrm{CA}}$.

$$6\mathrm{r}_1 = 2\mathrm{R}$$

Entonces, $\mathrm{r}_1 = \frac{1}{3}\mathrm{R}$. Sea Q el centro de la circunferencia de radio $\mathrm{r}_2 = \overline{\mathrm{QA}}$.

$$\mathrm{r}_2 = 2\mathrm{r}_1 = \frac{2}{3}\mathrm{R}$$

Sea P el centro de la circunferencia de radio $\mathrm{r}_3 = \overline{\mathrm{PT}}$.

$$\overline{\mathrm{OQ}} = \mathrm{r}_1, \overline{\mathrm{QP}} = \mathrm{r}_2 + \mathrm{r}_3 = \frac{2}{3}\mathrm{R} + \mathrm{r}_3, \overline{\mathrm{OP}} = \mathrm{R} - \mathrm{r}_3$$

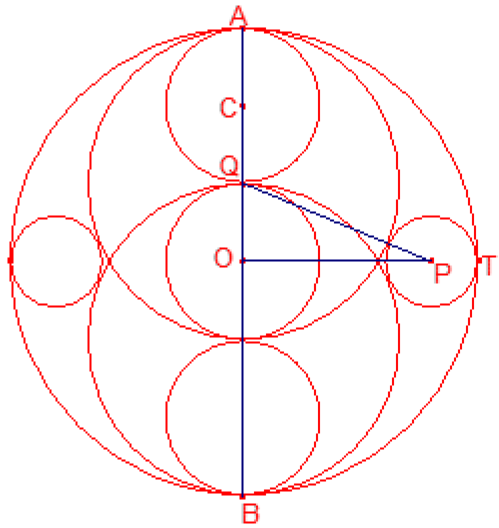
Aplicando el teorema de Pitágoras al triángulo rectángulo $\overset{\Delta}{\mathrm{QOP}}$:

$$\left(\frac{2}{3}\mathrm{R} + \mathrm{r}_3\right)^2 = \left(\frac{1}{3}\mathrm{R}\right)^2 + (\mathrm{R} - \mathrm{r}_3)^2$$

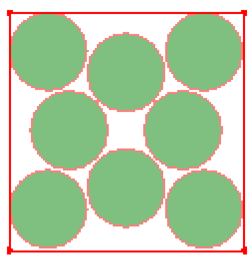
Simplificando, $\mathrm{r}_3 = \frac{1}{5}\mathrm{R}$

La proporción entre los radios es:

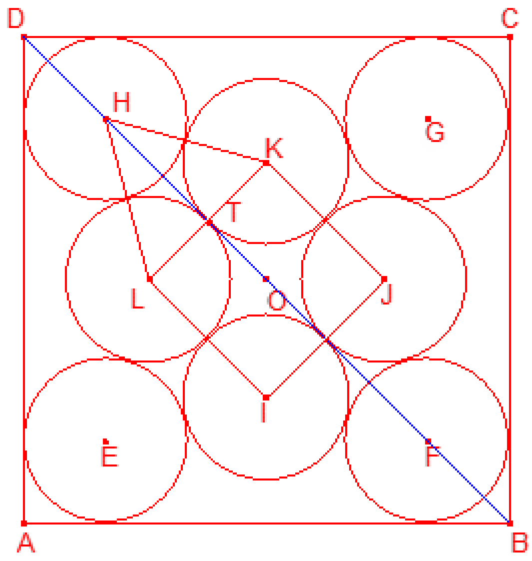
$$\frac{\mathrm{r}_3}{\mathrm{r}_1} = \frac{3}{5}$$



Diciembre 25-26: Para empaquetar ocho circunferencias iguales en un cuadrado, hay que colocarlas como en la figura, (probado por Schaer en 1964). Hallar la proporción entre el radio de una circunferencia y el lado del cuadrado.



Solución: Sea el cuadrado ABCD de lado $\overline{AB} = c$ de centro O.



$$\overline{BD} = c\sqrt{2}, \overline{OD} = \frac{\sqrt{2}}{2}c$$

Sean E, F, G, H, I, J, K, L los centros de las seis circunferencias de radio r. Los centros I, J, K, L, forman un cuadrado de lado 2r.

$$\overline{OT} = r$$

Los centros K, L, H, forman un triángulo equilátero de lado 2r.

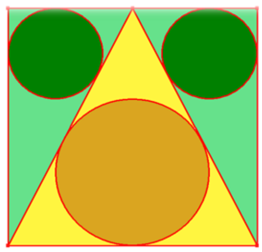
$$\overline{HT} = r\sqrt{3}$$

$$\overline{DH} = r\sqrt{2}$$

$$\overline{OD} = \frac{\sqrt{2}}{2}c = r + r\sqrt{3} + r\sqrt{2}$$

$$\frac{c}{r} = \sqrt{2}\left(1 + \sqrt{3} + \sqrt{2}\right) = 2 + \sqrt{2} + \sqrt{6}$$

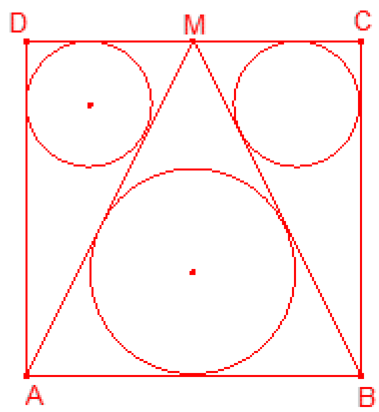
<u>Diciembre 29-30:</u> Se han formado tres triángulos uniendo el punto medio de un lado de un cuadrado con los otros vértices del cuadrado. Se han dibujado las circunferencias inscritas en los tres triángulos. Calcular la proporción entre los radios de las circunferencias



<u>Solución:</u> Sea ABCD el cuadrado de lado $\overline{AB} = c$. Sea M el punto medio del lado $\overline{CD}$. Aplicando el teorema de Pitágoras al triángulo rectángulo $\overset{\Delta}{ADM}$

$$\overline{AM} = \frac{\sqrt{5}}{2}c$$

Sea r el radio de la circunferencia inscrita en el triángulo $\overset{\Delta}{ABM}$. El área del triángulo $\overset{\Delta}{ABM}$ es igual a la mitad del área del cuadrado.



$$S_{ABM} = \frac{1}{2}c^2 = \frac{\overline{AB} + \overline{AM} + \overline{BM}}{2}r$$

$$\frac{1}{2}c^2 = \frac{c + c\sqrt{5}}{2}r$$

Resolviendo la ecuación:

$$r = \frac{\sqrt{5} - 1}{4}c$$

Sea s el radio de la circunferencia inscrita en el triángulo $\overset{\Delta}{ADM}$. El área del triángulo $\overset{\Delta}{ADM}$ es igual a la cuarta parte del área del cuadrado.

$$S_{ADM} = \frac{1}{4}c^2 = \frac{\overline{AD} + \overline{DM} + \overline{AM}}{2}s$$

$$\frac{1}{4}c^2 = \frac{c + \frac{1}{2}c + \frac{\sqrt{5}}{2}c}{2}s$$

$$c^2 = \frac{3 + \sqrt{5}}{4}cs$$

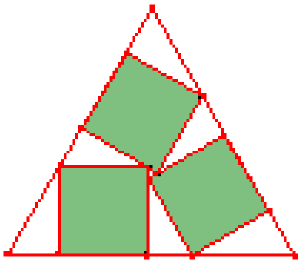
Resolviendo la ecuación:

$$s = \frac{3-\sqrt{5}}{4}c$$

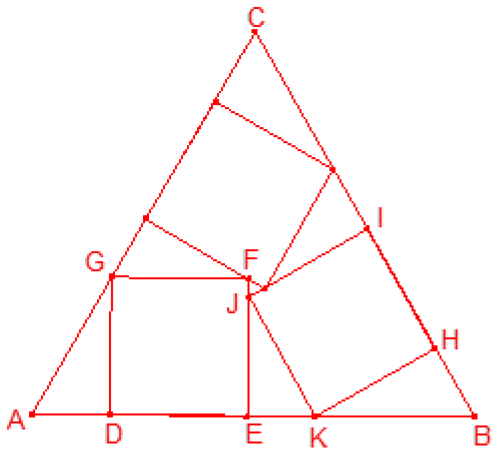
La proporción entre los radios es:

$$\frac{r}{s} = \frac{\frac{\sqrt{5}-1}{4}}{\frac{3-\sqrt{5}}{4}} = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = \Phi$$

Diciembre 31: Para empaquetar tres cuadrados iguales en un triángulo equilátero, hay que colocarlos como en la figura (probado por Erich Friedman en 1997). Hallar la razón entre el lado del triángulo y el lado del cuadrado.



Solución: Sea el triángulo equilátero grande $\overset{\Delta}{ABC}$ de lado $\overline{AB} = c$. Sean los cuadrados DEFG, HIJK de lados $\overline{DE} = x, \overline{HI} = x$



$$\overline{AD} = \frac{\sqrt{3}}{3}x, \overline{EK} = \frac{1}{2}x, \overline{KB} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$$

$$\overline{AB} = c = \left(\frac{3}{2} + \sqrt{3}\right)x$$

$$\frac{c}{x} = \frac{3}{2} + \sqrt{3}$$