SOLUCIONES ENERO 2021

PROBLEMAS PARA LA PREPARACIÓN DE LA OLIMPIADA DE 3º Y 4º DE LA ESO, CONVOCADA POR LA FESPM EN 2003. 14-16 AÑOS. COLECCIÓN CONFECCIONADA POR: JOSÉ COLÓN LACALLE. Profesor jubilado

Enero 1-2: Nací el siglo pasado. El 25 de agosto de 2001 cumplí tantos años como vale la suma de los dígitos del año de mi nacimiento. Determina la fecha de mi nacimiento

Solución: Sea el 25 de agosto de 19xy (siendo x e y dígitos) la fecha de nacimiento del sujeto. Tendremos del enunciado:

$$1 + 9 + x + y = 2001 - 19xy = 2 \cdot 1000 + 1 - 1000 - 900 - 10x - y$$

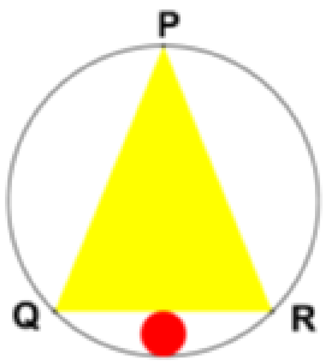
$$10 + x + y = 1000 - 899 - 10x - y; \quad 11x + 2y = 101 - 10; \quad 11x + 2y = 91$$

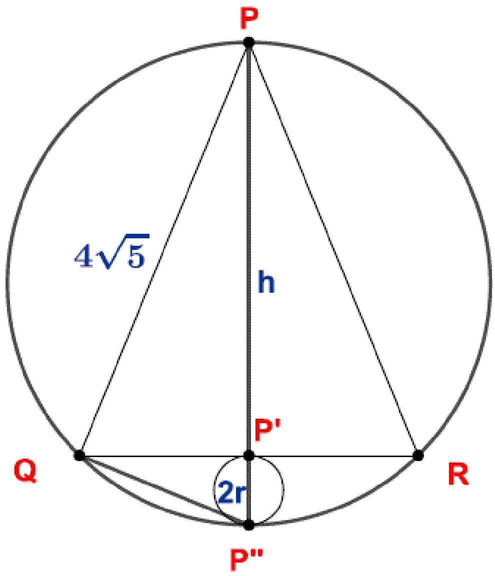
Y, ahora, por prueba y error:

x	$¿y = \frac{91 - 11x}{2} \in \mathbb{N}?$
9	No
8	No
7	Sí. y =7
6	No
5	No
4	No
3	No
2	No
1	No

Luego la **fecha de nacimiento es el 25 de agosto de 1977**.

Enero 4-11: En una circunferencia de radio 6 inscribimos un triángulo isósceles ΔPQR en el que PQ = PR = $4\sqrt{5}$. Una segunda circunferencia es tangente a la primera y tangente a la base QR del triángulo, como muestra la figura. Hallar el radio de la circunferencia pequeña





Solución: Sea h la altura del triángulo isósceles y r el radio de la circunferencia pequeña. Entonces:

$$h + 2r = 12 \ (= \text{diámetro de la circunferencia}) \quad (*)$$

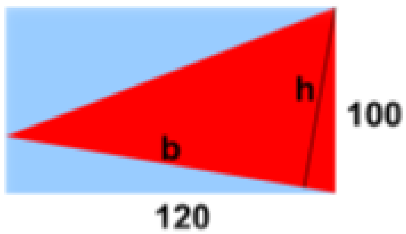
Por otra parte, ΔQPP'' ≅ ΔQPP' (pues ambos son rectángulos y tienen en común el ángulo en P). De aquí:

$$\frac{4\sqrt{5}}{12} = \frac{h}{4\sqrt{5}} \ \Rightarrow \ h = \frac{16 \cdot 5}{12} = \frac{20}{3}$$

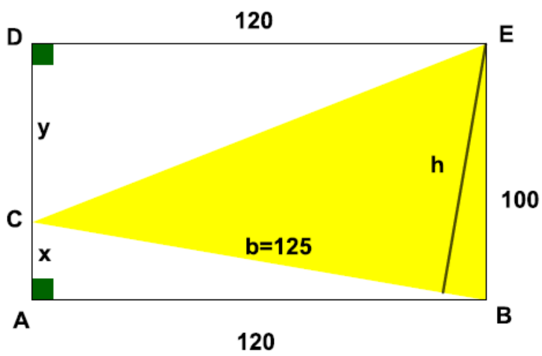
Por tanto, en (*)

$$r = \frac{12 - 2r}{2} = \frac{12 - 2 \cdot \frac{20}{3}}{2} = \frac{8}{3}$$

Enero 5-6: En un rectángulo de medidas 120 de largo y 100 de alto, se inscribe un triángulo como en la figura. Si la base b del triángulo mide 125, ¿cuánto mide la altura h?



Solución: Sean x e y las distancias definidas en la figura adjunta. Tendremos, x + y = 100



Aplicando Pitágoras al triángulo ΔABC:

$$x = \sqrt{125^2 - 120^2} = 35$$

Por tanto:

$$A_{\Delta ABC} = \frac{120 \cdot 35}{2} = 2100 \quad (1)$$

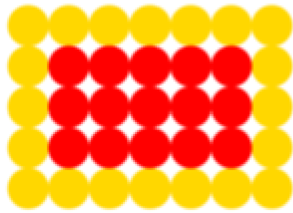
$$y = 100 - 35 = 65 \ \Rightarrow \ A_{\Delta CDE} = \frac{65 \cdot 120}{2} = 3900 \ (2)$$

De (1) y (2):

$$A_{\Delta ABC} + A_{\Delta CDE} = 2100 + 3900 = 6000$$

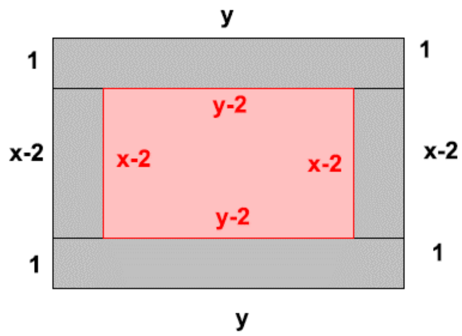
De donde:

$$A_{\Delta CBE} = A_{ABDE} - (A_{\Delta ABC} + A_{\Delta CDE}) = 12000 - 6000 = 6000 = \frac{125 \cdot h}{2} \quad \Rightarrow \ \mathbf{h} = \frac{\mathbf{6000 \cdot 2}}{\mathbf{125}} = \mathbf{96}$$



Enero 7-8: Un tapete se forma uniendo círculos amarillos en el exterior y rojos en el interior, sin solapamientos. ¿Existe algún tapete en el que los círculos amarillos igualen en número a los círculos rojos?

Solución: Supongamos que el tapete tiene y círculos en horizontal y x en vertical. Entonces, tiene 2y + 2(x – 2) en el exterior y (x – 2)·(y – 2) en el interior. Debe de cumplirse, entonces, que:



$$2y + 2\cdot(x-2) = (y-2)\cdot(x-2)$$

$$\mathrm{xy} - 4\mathrm{x} - 4\mathrm{y} + 8 = 0$$

$$\mathrm{y}(\mathrm{x}-4) = 4\mathrm{x} - 8 \Rightarrow \begin{cases} \mathrm{x}-4=0 & \mathrm{y}\cdot 0 = 4\cdot 4 - 8; 0 = 8 \text{ NO!} \\ \mathrm{x}-4\neq 0 & \mathrm{y} = \dfrac{4\mathrm{x}-8}{\mathrm{x}-4} = 4 + \dfrac{8}{\mathrm{x}-4} \end{cases}$$

Luego x – 4 es un divisor de 8, i.e. $x - 4 \in \{\pm 1, \pm 2, \pm 4, \pm 8\}$

Si x – 4 = 1, entonces x = 5 e y = 4 + 8 = 12. Si x – 4 = – 1, entonces x = 3 e y = 4 – 8 = – 4 NO.

Si x – 4 = 2, entonces x = 6 e y = 4 + 4 = 8. Si x – 4 = – 2, entonces x = 2 e y = 4 – 4 = 0 NO.

Si x – 4 = 4, entonces x = 8 e y = 4 + 2 = 6. Si x – 4 = – 4, entonces x = 0 NO

Si x – 4 = 8, entonces x = 12 e y = 4 + 1 = 5. Si x – 4 = – 8, entonces x = – 4 NO

Solo cumplen el requisito del enunciado los **tapetes 5x12 y 6x8**. (Los otros dos , son los anteriores girados 90°)

Enero 9: Un ladrillo tiene dimensiones a, b, c. ¿Existe algún número tal que, si multiplicamos a, b, c por él obtenemos otro ladrillo con doble área y doble volumen?

Solución: Sean A (= 2ab + 2ac + 2bc) y V (= abc), el área y el volumen del ladrillo inicial. Sea k el número preguntado en el enunciado, que suponemos existe. Entonces el área y el volumen del nuevo ladrillo cumplen:

$$A_n = 2\cdot ka\cdot kb + 2\cdot ka\cdot kc + 2\cdot kb\cdot kc = k^2\cdot(2ab + 2ac + 2cb) = k^2\cdot A = 2A \Rightarrow k^2 = 2 \Rightarrow k = \sqrt{2}$$

$$V_n = ka\cdot kb\cdot kc = k^3\cdot V = 2\cdot V \Rightarrow k^3 = 2 \Rightarrow k = \sqrt[3]{2}$$

Luego:

$$\sqrt{2} = \sqrt[3]{2}$$

Que es un absurdo. Por tanto, alguna suposición inicial o algún paso en la demostración es una falsedad. Puesto que todos los pasos son correctos, la única suposición que hemos hecho (que k existe) es falsa.

<u>Enero 12-13:</u> Aitana es la encargada de marcar los libros en la librería. Según ella recibió varios libros el lunes y marcó algunos de ellos. El martes recibió tantos libros nuevos como no había marcado el lunes y marcó 12. El miércoles recibió 14 libros más que el lunes y marcó doble número de libros que el lunes. El jueves recibió el doble de libros que había marcado el miércoles y marcó 10. El viernes recibió 4 libros y marcó 14 libros menos que los que había recibido el miércoles. El sábado marcó los 20 libros que le quedaban de la semana. ¿Es ello posible, o está equivocada?

<u>Solución:</u> Si x (y) es el número de libros recibidos (marcados) el lunes, tenemos:

	recibidos	marcados	quedan por marcar	condición
Lunes	x	y	$x - y$	$x - y \geq 0$
Martes	$x - y$	12	$2x - 2y - 12$	$x - y \geq 6$
Miércoles	$x + 14$	$2y$	$3x - 4y + 2$	$3x - 4y \geq -2$
Jueves	$4y$	10	$3x - 8$	$3x \geq 8$
Viernes	4	x	$2x - 4$	$2x - 4 \geq 0$
Sábado	0	20	0	
total	$3x+3y+18$	$x + 3y + 42$		

Tenemos dos condiciones que deben cumplirse: el total de recibidos ha de ser igual al total de marcados o los que quedan por marcar el viernes ha de coincidir con los marcados el sábado. Tendremos:

$$3x + 3y + 18 = x + 3y + 42; \quad 2x = 24; \quad \mathbf{x = 12}$$

$$2x - 4 = 20; \quad \mathbf{x = 12}$$

No hay información sobre y, salvo la aportada por la última columna de la tabla, que se reduce a:

$$\left.\begin{array}{r} \left.\begin{array}{r} 12 \geq y \\ 12 - y \geq 6 \end{array}\right\} \quad 6 \geq y \\ 3 \cdot 12 - 4y \geq -2 \quad 9{,}5 \geq y \end{array}\right\} \Rightarrow \; 6 \geq y \geq 0$$

El enunciado es cierto si el lunes se **reciben 12 libros y se marcan cualquier cantidad entre {0, 1, 2, 3, 4, 5, 6}**

<u>Enero 14:</u> Si un cordel se corta en trozos de 20 cm, sobra un trozo de 15 cm. Si el cordel tuviese el triple de longitud, ¿habría sobras? ¿De cuántos cm?

<u>Solución:</u> Sea L la longitud del cordel. Tendremos del enunciado:

$$20x + 15 = L \;\Rightarrow\; L - 15 = \dot{\widehat{20}} \;\Rightarrow\; 3 \cdot (20x + 15) = 60x + 45 = 3x \cdot 20 + 20 + 20 + 5$$
$$= (3x + 2) \cdot 20 + 5$$

Luego si el cordel es de longitud triple habrá el triple de trozos más dos, de longitud 20 cm y **sobrará un trozo de 5 cm.**

<u>Enero 15-16:</u> Un árbitro elige tres sombreros simultáneamente de un conjunto de tres blancos y dos negros. Tres hombres sentados, alineados uno tras otro, y mirando todos en la misma dirección (de manera que cada uno sólo puede ver el sombrero de los que tiene delante de él) cierran los ojos mientras se les coloca uno de los sombreros elegidos. Los sombreros no elegidos se ocultan a la vista. El árbitro le pregunta al tercero de la hilera si sabe el color de su sombrero y éste contesta que no lo sabe. Se lo pregunta al sentado en el centro y también contesta que no lo sabe. Entonces el primero dice que el suyo es blanco. ¿Cómo pudo deducirlo?

Solución: Representaremos por ternas

(color del sombrero del tercero, color del sombrero del segundo, color del sombrero del primero)

los resultados del experimento.

Si el tercer hombre (viendo los sombreros de los dos primeros) no puede garantizar el color de su sombrero es porqué ve dos sombreros blancos o uno blanco y otro negro, pues si viese dos sombreros negros podría garantizar que su sombrero es necesariamente blanco. Luego los resultados compatibles con que el tercero no puede asegurar el color de su sombrero son:

(, B, B)

(, B, N)

(, N, B)

El segundo tampoco puede garantizar el color de su sombrero, lo que quiere decir que él ve (el color del sombrero del primero) un sombrero de color blanco, (si viese un sombrero de color negro entonces él podría garantizar que lleva un sombrero de color blanco). Luego si el tercero y el segundo no pueden garantizar el color de su sombrero, el primero puede garantizar que su sombrero es de color blanco.

Enero 18-19: Si escribimos todos los números naturales, sin ninguna separación entre ellos, a partir del 1 y hasta el 2021, obtenemos un número con muchas cifras:

$$123456789101112131415 16 \cdots\cdots 201920202021$$

¿Cuántas cifras tiene este número? ¿Cuál es la cifra que ocupa el lugar 2002 por la izquierda?

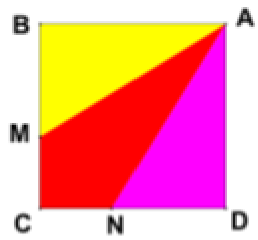
Solución: Tenemos el siguiente cuadro:

números	¿cuántos números?	cifras por número	lugares ocupados	acumulado
1, ············ , 9	(9 – 0 =) 9	1	9·1 = 9	9
10, ········ , 99	(99 – 9 =) 90	2	90·2 = 180	189
100, ···· , 999	(999 – 99 =) 900	3	900·3 = 2700	2889
1000, ·· , 1999	(1999 – 999 =) 1000	4	1000·4 = 4000	6889
2000, ·· , 2021	(2021 – 1999 =) 22	4	22·4 = 88	6977

Luego el número tiene 6977 cifras.

Veamos qué cifra ocupa el lugar 2002 del número por la izquierda. Como las 189 primeras cifras (por la izquierda) corresponden a números de una o dos cifras, tendremos que el lugar 2002 corresponde al (2002 – 189 =) 1813 lugar de los números de tres cifras. Como 1813 = 604·3 +1, tendremos que la cifra 2002 del número corresponde a la primera cifra del número que ocupa el lugar 605 (= 604 + 1) de tres cifras. Es decir, la cifra 2002 es la primera del número (605 + 99 =) 704, es decir la cifra 2002 es un 7.

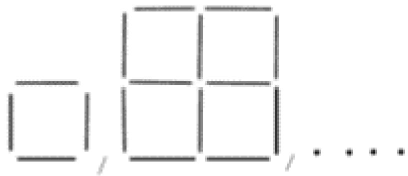
Enero 20-27: Tres hermanos han heredado un campo cuadrado que deben dividir como indica la figura, pues en A hay un pozo que todos quieren usar. ¿Dónde deben estar M y N para que las superficies de los triángulos ∆ABM y ∆AND y el cuadrilátero AMCN sean iguales?



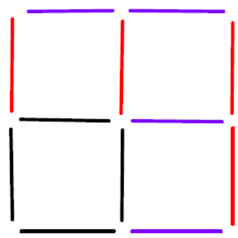
Solución: Sea l el lado del cuadrado. Se exige que: $A_{\Delta ABM} = A_{AMCN} = A_{\Delta AND}$. Por simetría, debe cumplirse que $2 \cdot A_{\Delta ACN} = A_{\Delta AND}$. Por tanto:

$$2 \cdot \frac{\mathrm{CN} \cdot \mathrm{l}}{2} = \frac{\mathrm{ND} \cdot \mathrm{l}}{2} \quad \Rightarrow \quad \mathrm{CN} = \frac{\mathrm{ND}}{2} \quad \Rightarrow \quad 2 \cdot \mathrm{CN} = \mathrm{ND} \quad \Rightarrow \quad \mathrm{l} = \mathrm{CN} + \mathrm{ND} = 2\mathrm{CN} + \mathrm{CN} = 3\mathrm{CN}$$
$$\Rightarrow \quad \mathbf{CN} = \mathbf{CM} = \frac{\mathbf{l}}{\mathbf{3}}$$

Enero 21-22: Se están construyendo cuadrículas de lado 1, 2, ... con palillos de longitud uno. ¿Cuántos palillos necesitaremos para hacer una cuadrícula de lado n?



Solución 1: La primera cuadrícula consta de 4 palillos. La segunda cuadrícula consta de los 4 de la primera y se agregan 4 (=2·2) palillos verticales (rojos) y 4 (= 2·2) horizontales (morados); es decir, se añaden (2·2 +2·2 = 2(2 + 2) =) 2·4 palillos. La tercera cuadrícula consta de los de la segunda a los que se añaden 6 (= 3·2) horizontales y 6 (= 3·2) verticales; es decir, se añaden (3·2 + 3·2 = 3(2 + 2) =) 3·4 palillos. La cuarta cuadrícula consta de los de la tercera cuadrícula, a los que se añade 8 (= 4·2) horizontales y 8 (= 4·2) verticales; es decir, se añaden (4·2 + 4·2 = 4(2+2) =) 4·4 palillos. Y así, sucesivamente.



Es decir:

$a_1 = (1 \cdot 4 + 0) = 4$

+8

$a_2 = (2 \cdot 4 + 4) = 12$ +4

+12   (*)

$a_3 = (3 \cdot 4 + 12) = 24$ +4

+16

$a_4 = (4 \cdot 4 + 24) = 40$

d_n es una PA de diferencia 4 $\Rightarrow d_n = 8 + 4(n - 1) = 4 + 4n$

Por tanto:

$$\mathbf{a_n} = 4 + \sum_{k=1}^{n-1} d_k = 4 + \frac{d_1 + d_{n-1}}{2}(n-1) = 4 + \frac{8 + 4 + 4(n-1)}{2}(n-1) = 4 + 6(n-1) + 2(n-1)^2$$
$$= 4 + 6n - 6 + 2n^2 - 4n + 2 = 2n^2 + 2n = \mathbf{2n(n+1)}$$

Solución 2: Al darnos cuenta en (*) que a_n es una PA de segundo orden, tendremos:

$$\left.\begin{aligned} a_1 &= 4 \\ a_2 &= 12 \\ a_3 &= 24 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \quad a_n = An^2 + Bn + C$$

Para n = 1, tendremos: 4 = A + B + C (1)

Para n = 2, tendremos: 12 = 4A + 2B + C (2)

Para n = 3, tendremos: 24 = 9ª + 3B + C (3)

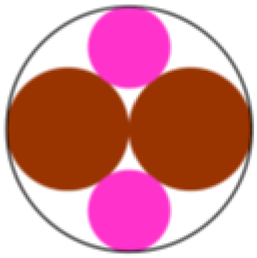
Efectuando (2) – (1), llegamos a 8 = 3A + B (4)

Efectuando (3) – (2), llegamos a 12 = 5A + B (5)

Efectuando (5) – (4), llegamos a 4 = 2A ⇒ **A =2.**

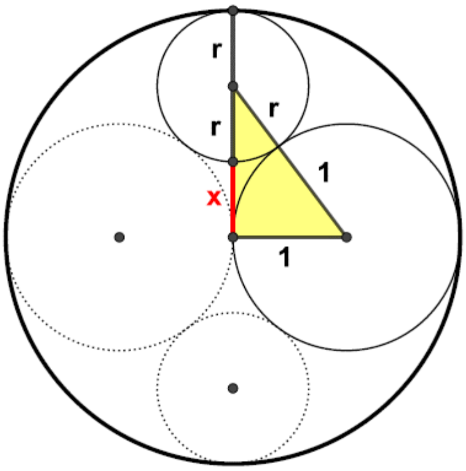
Sustituyendo en (4), llegamos a **B = 2**. Sustituyendo en (1), llegamos a **C = 0.** Que lleva a la misma solución anterior.

Enero 23-30: En la figura hay un total de cinco circunferencias todas ellas tangentes entre sí. Las dos de color marrón tienen radio 1. Las dos de color morado son iguales. Halla su radio.



Solución: Sea r el radio de la circunferencia más pequeña. De la figura de abajo, tendremos, por un lado:

$$x + 2r = 2 \qquad (1)$$



Y aplicando el teorema de Pitágoras al triángulo rectángulo sombreado:

$$(x + r)^2 + 1^2 = (1 + r)^2 \qquad (2)$$

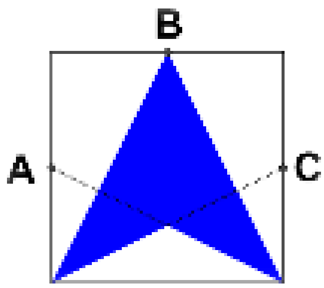
De (1) tendremos, despejando x:

$$x = 2 - 2r$$

Y, sustituyendo en (2), llegamos a:

$$(2 - r)^2 + 1 = (1 + r)^2 \;\; \Rightarrow \; 4 - 4r = 2r \; \Rightarrow \; 4 = 6r \;\; \Rightarrow \;\; \mathbf{r = \frac{2}{3} m}$$

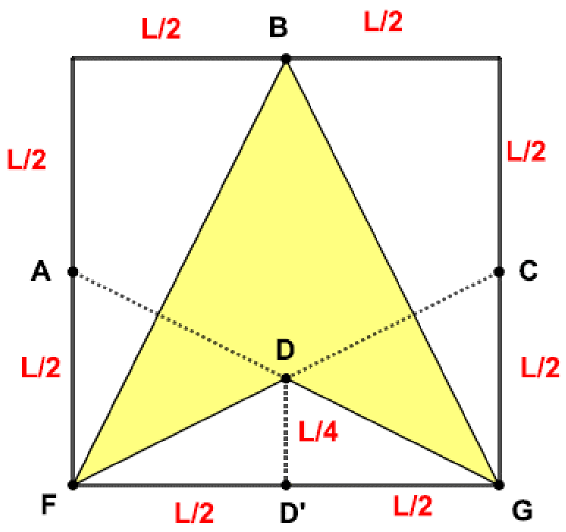
Enero 25: En la figura hay un cuadrado de lado L. A, B y C son puntos medios. Hallar área y perímetro de la zona azul



Solución: En primer lugar tenemos que ΔFDD’ ≅ ΔFCG (pues, mirar figura inferior, ambos triángulos están en posición de Tales). Por tanto:

$$\frac{DD'}{\frac{L}{2}} = \frac{\frac{L}{2}}{L} \;\; \Rightarrow \;\; DD' = \frac{\frac{L^2}{4}}{L} = \frac{L}{4}$$

S



Para áreas, tenemos:

$$\left.\begin{aligned} A_{\Delta FBG} &= \frac{1}{2} L \cdot L = \frac{L^2}{2} \\ A_{\Delta FDG} &= \frac{1}{2} L \frac{L}{4} = \frac{L^2}{8} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \mathbf{A_{FBGD}} = A_{\Delta FBG} - A_{\Delta FDG}$$

$$= \frac{L^2}{2} - \frac{L^2}{8} = \frac{\mathbf{3 \cdot L^2}}{\mathbf{8}}$$

Para el perímetro, tenemos:

$$\mathbf{P} = 2 \cdot FB + 2 \cdot FD = 2\sqrt{\frac{L^2}{4} + L^2} + 2\sqrt{\frac{L^2}{4} + \frac{L^2}{16}}$$

$$= 2\frac{\sqrt{5}L}{2} + 2\frac{\sqrt{5}L}{4} = \mathbf{3}\frac{\mathbf{\sqrt{5}L}}{\mathbf{2}}$$

<u>Enero 26:</u> Un estadio tiene una capacidad de 25000 espectadores. Un día, con el estadio casi lleno, el $\mathbf{15,\hat{5}\%}$ de los espectadores estaban en el graderío Sur y el $\mathbf{24,\widehat{524}}\%$ eran mujeres. ¿Cuántos espectadores podía haber en el estadio?

<u>Solución:</u> Sea x el número de asistentes. Sabemos que x < 25000. También tendremos que el $15,\hat{5}\%$ de x es un número natural, por lo que:

$$15,\hat{5}\% \text{ de } x = \frac{15,\hat{5}}{100} \cdot x = \frac{\frac{155-15}{9}}{100} \cdot x = \frac{140}{900} \cdot x = \frac{7}{45} \cdot x \in \mathbb{N}$$

Y como 7 no divide a 45, x ha de ser múltiplo de 45.

Análogamente, el $24,\widehat{524}\%$ de x es un número natural, por lo que:

$$24,\widehat{524}\% \text{ de } x = \frac{24,\widehat{524}}{100} \cdot x = \frac{\frac{24524-24}{999}}{100} \cdot x = \frac{245}{999} \cdot x \in \mathbb{N}$$

Y como 245 y 999 no tienen factores comunes, x ha de ser múltiplo de 999.

Como x ha de ser múltiplo de 45 y múltiplo de 999, ha de ser múltiplo del mcm (45, 999) (= mcm ($3^2 \cdot 5$; $3^3 \cdot 37$) = $3^3 \cdot 37 \cdot 5$) = 4995. El menor valor posible de x es 4995. Los demás valores posibles de x son los múltiplos de 4995, es decir: (4995·2 =) 9990; (4995·3 =) 14985; (4995·4 =) 19980; (4995·5 =) 24975. Como los posteriores múltiplos exceden a 25000, esta es la última solución posible. Como, además, el enunciado dice que el estadio estaba casi lleno, concluimos que había **24975 asistentes**.

<u>Enero 28:</u> Dani debía sumar todos los capicúas de cuatro cifras, pero se olvidó de sumar uno. Si obtuvo 490776, ¿cuál se olvidó?

<u>Solución:</u> Designaremos por $\overline{xyyx}$ al capicúa que tiene el dígito x ($\neq$ 0) en las unidades de millar y en las unidades y al dígito y en las centenas y decenas. Calculemos:

$$\sum_{x,y} \overline{xyyx} = \sum_{x=1}^{9} \left(\sum_{y=0}^{9} \overline{xyyx} \right)$$

Tendremos:

$$\sum_{y=0}^{9} \overline{xyyx} = \sum_{y=0}^{9} (x \cdot 1000 + y \cdot 100 + y \cdot 10 + x)$$

$$= \sum_{y=0}^{9} (x \cdot 1001 + y \cdot 110) = x \cdot 1001 \cdot 10 + 110 \cdot \sum_{y=0}^{9} y = 10010 \cdot x + 110 \cdot \frac{0+9}{2} \cdot 10$$

$$= 10010x + 45 \cdot 110$$

$$\sum_{x,y} \overline{xyyx} = \sum_{x=1}^{9} \left(\sum_{y=0}^{9} \overline{xyyx} \right)$$

$$= \sum_{x=1}^{9} (10010x + 45 \cdot 110) = 10010 \cdot \sum_{x=1}^{9} x + 45 \cdot 110 \cdot 9 = 10010 \cdot \frac{1+9}{2} \cdot 9 + 45 \cdot 990$$

$$= 10010 \cdot 45 + 45 \cdot 990 = 45(10010 + 990) = 45 \cdot 11000 = 49500$$

Por tanto, el número que se ha olvidado sumar Dani es (49500 – 490776 =) 4224

Enero 29: ¿Cuántas ternas de naturales distintos de la unidad (a, b, c), hay tales que: **$a \cdot b \cdot c = 7^{39}$**?

Solución: Como el 7 es primo, obviamente a = 7^{α}, b = 7^{β} y c = 7^{δ}. Como a, b y c han de ser diferentes de la unidad, los exponentes deben ser positivos. Por tanto, hay tantas ternas (a, b, c) como ternas de exponentes positivos (α, β, δ) tales que $\alpha + \beta + \delta = 39$. Además:

$$(7, 7, 7^{37}) \neq (7, 7^{37}, 7)$$

Es decir, importa el orden. Procedemos a contabilizar las ternas

α	β	δ	
1	1	37	
1	2	36	
1	3	35	
.	.	.	
.	.	.	37
.	.	.	
1	36	2	
1	37	1	
2	1	36	
2	2	35	
2	3	34	
.	.	.	
.	.	.	36
.	.	.	
2	35	2	
2	36	1	

3	1	35	35
3	2	34	
.	.	.	
.	.	.	
3	34	2	
3	35	1	
.	.	.	
.	.	.	
.	.	.	
36	1	2	2
36	2	1	
37	1	1	1

En total:

$$1 + 2 + 3 + \cdots + 36 + 37 = \frac{1 + 37}{2} \cdot 37 = 703$$