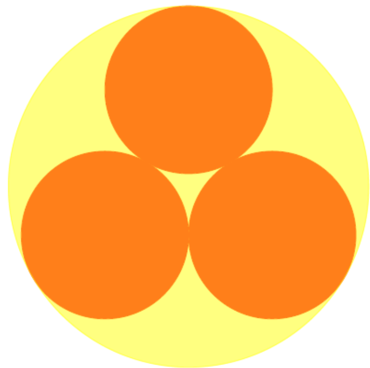
SOLUCIONES FEBRERO 2021

PROBLEMAS DE LA CMO 1972 Y 1973. (CANADIAN MATHEMATICAL OLYMPIAD). 16-18 AÑOS.
PREPARACIÓN OME. ORGANIZACIÓN: RAFAEL MARTÍNEZ CALAFAT. Profesor jubilado

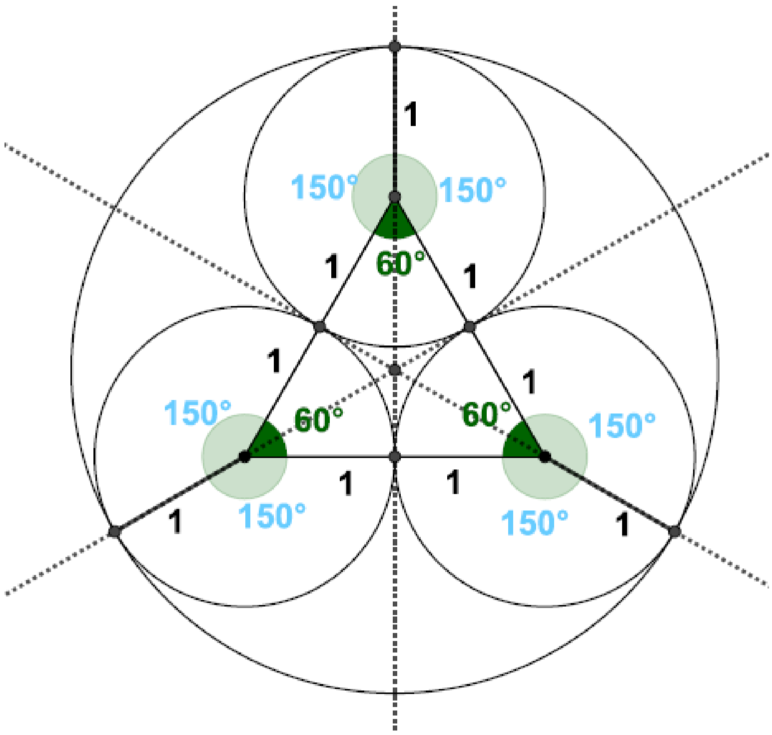
https://cms.math.ca/Competitions/CMO/

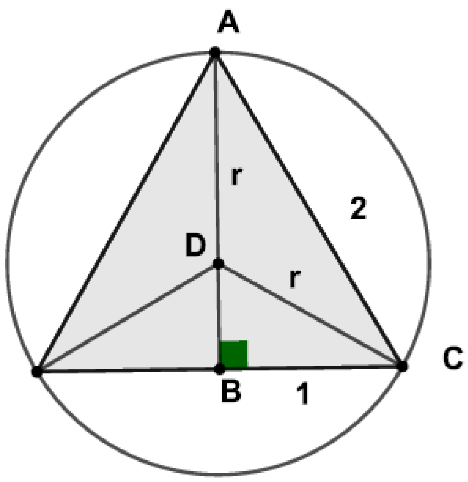
Febrero 1-2: Sean dadas tres circunferencias de radio unidad, cada una de ellas tangente exterior a las otras dos. Hallar el radio de la circunferencia que circunscribe a las tres circunferencias iniciales



Solución: Los centros de los tres círculos de radio unidad forman un triángulo con lados 2, y por tanto equilátero. De aquí, que, los ángulos interiores al triángulo sean de 60° y (por simetría del círculo grande) los ángulos exteriores son de 150°.

El radio del círculo grande (R) es el radio del círculo formado por los tres vértices del triángulo (r) más 1





Hallemos, pues, el radio de este círculo interno. En la figura de la derecha tenemos que ΔABC es un triángulo 30°-60°-90°, por lo que sus lados están en la proporción $1:\sqrt{3}:2$. Además (bien, por geometría básica, bien por la semejanza $\Delta ABC \cong \Delta DCB$):

$$r = \frac{2}{3}AB = \frac{2}{3}\sqrt{3} \quad \Rightarrow \quad R = 1 + \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}+2}{\sqrt{3}} = \frac{3+2\sqrt{3}}{3}$$

Febrero 3: Probar que **10201** es compuesto en cualquier base mayor que 2. Probar que **10101** es compuesto en cualquier base.

Solución: Para la primera parte, se exige que la base del sistema de numeración sea mayor que 2 para que tenga sentido el dígito 2 en la expresión del número proporcionado. Tendremos:

$$10201_a = 1 \cdot a^4 + 2 \cdot a^2 + 1 = (a^2+1)^2 = (101_a)^2 = 101_a \cdot 101_a$$

Luego 10201_a es compuesto.

Para la segunda parte del problema, deberemos demostrar que 10101_a se puede factorizar. Como:

$$10101_a = a^4 + a^2 + 1$$

Podemos considerar la expresión anterior como un polinomio en a de cuarto grado (con coeficiente principal la unidad), que se factoriza como producto de polinomios de grado 1 o de grado 2 con discriminante negativo. Como no hay raíces reales, no hay polinomios de grado 1

$$\left(x^4 + x^2 + 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad x = \frac{-1 \pm \sqrt{1-4}}{2} \notin \mathbb{R} \right)$$

Pongamos :

$$a^4 + a^2 + 1 = (a^2 + Aa + B) \cdot (a^2 + Ca + 1) = a^4 + (C + A)a^3 + (D + AC + B)a^2 + (AD + BC)a + BD$$

Con ello:

$$\left.\begin{array}{c} C + A = 0 \\ D + AC + B = 1 \\ AD + BC = 0 \\ BD = 1 \end{array}\right\}$$

De la primera C = – A, y sustituyendo en las otras tres ecuaciones, llegamos a:

$$\left.\begin{array}{c} D - A^2 + B = 1 \\ AD - AB = 0 \\ BD = 1 \end{array}\right\} \Rightarrow \; A(D - B) = 0$$

Si A = 0, entonces C = 0 y el sistema se reduce a:

$$\left.\begin{array}{c} D + B = 1 \\ DB = 1 \end{array}\right\} \text{que no tiene solución en los reales.}$$

Si A $\neq$ 0, entonces D = B y en este supuesto:

$$\left.\begin{array}{c} 2D - A^2 = 1 \\ B^2 = 1 \end{array}\right\}$$

De la segunda ecuación, tenemos B = $\pm$ 1.

Si B = 1, entonces D = 1, que lleva (en la primera ecuación) a A = $\pm$ 1 y C = $\mp$ 1

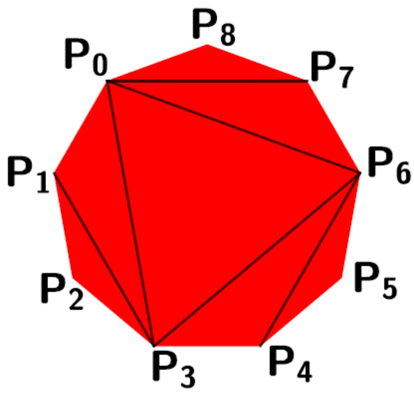
Si B = – 1 = D, entonces – 2 – 1 = A^2, que es imposible.

Luego:

$$\begin{aligned} a^4 + a^2 + 1 = (a^2 - a + 1) \cdot (a^2 + a + 1) \;\Rightarrow\; 10101_a &= \big((a-1)a + 1\big) \cdot (a^2 + a + 1) \\ &= (a-1)1_a \cdot 111_a \end{aligned}$$

(Nota: El número $(a – 1)1_a$ es el número que, expresado en base a, tiene el dígito a – 1 en las potencias de a^1 y al dígito 1 en la potencia de a^0)

<u>Febrero 4-5:</u> La figura muestra un polígono convexo con 9 vértices. Las 6 diagonales dibujadas lo diseccionan en 7 triángulos: P_0, P_1, P_2,⋯, P_6, P_7, P_8 ¿De cuántas maneras pueden estos triángulos ser nombrados con los símbolos Δ_1, Δ_2, Δ_3, Δ_4, Δ_5, Δ_6, Δ_7 de forma que el triángulo Δ_i tenga por vértice a P_i $\forall i \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$. Justificar la respuesta.



<u>Solución:</u> Hemos de nombrar a los triángulos con las etiquetas Δ_i de manera que un triángulo recibe la etiqueta Δ_i sii P_i es un vértice del triángulo. Como solo hay un triángulo con vértice P_2 (P_5) solo esos triángulos pueden recibir las etiquetas Δ_2 (Δ_5) (figura 1). Antes de esta asignación, había dos triángulos con vértice P_1 (P_4) de los que queda solo uno. Ese triángulo recibe la etiqueta Δ_1 (Δ_4) (figura 2). De los triángulos con vértice P_3 solo queda uno, que recibe la etiqueta Δ_3 (figura 3). Queda un triángulo con vértice P_6 que recibe la etiqueta Δ_6. Por último solo queda un triángulo que tiene a P_7 por vértice, que recibe la etiqueta Δ_7

Solo hay una manera de etiquetar los triángulos de manera que se cumpla que el triángulo Δ_i tenga por vértice a P_i $\forall i \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$

Figura 1

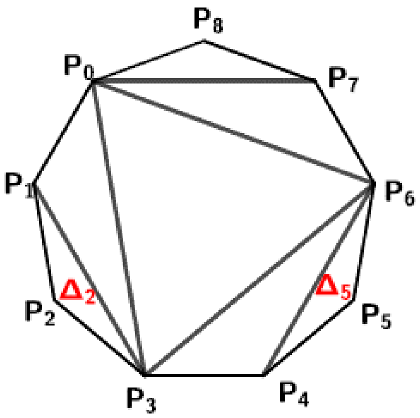


Figura 2

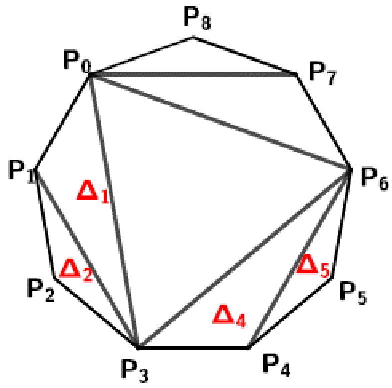


Figura 3

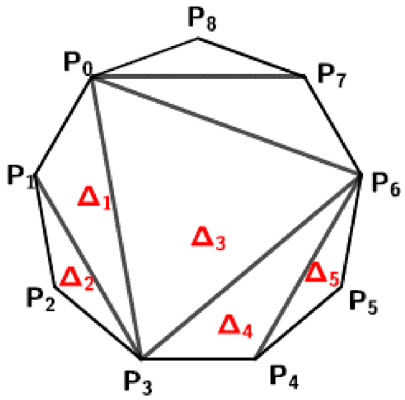
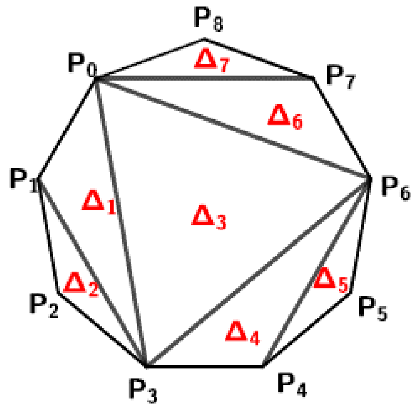


Figura 4



<u>Febrero 6:</u> Hallar el mayor entero que cumple las dos inecuaciones:

$$4x + 13 < 0$$

$$x^2 + 3x > 16$$

<u>Solución:</u> Para la inecuación lineal tenemos:

$$4x + 18 \leq 0 \quad \Leftrightarrow \quad x \leq -\frac{13}{4} \quad \Leftrightarrow \quad x \in \left]-\infty; -\frac{13}{4}\right[$$

Para la inecuación cuadrática, tenemos:

$$x^2 + 3x > 16 \quad \Leftrightarrow \quad x^2 + 3x - 16 > 0$$

Sea y = $x^2 + 3x + 16$. Su gráfica es una parábola dirigida hacia arriba (a = 1 > 0) y como:

$$x^2 + 3x - 16 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = \frac{-3 \pm \sqrt{73}}{2}$$

Tendremos:

$$x^2 + 3x > 16 \quad \Leftrightarrow \quad x \in \left]-\infty;\ -\frac{3+\sqrt{73}}{2}\right[\cup \left]\frac{-3+\sqrt{73}}{2};\ +\infty\right[$$

Se cumplen las dos inecuaciones en $x \in \left]-\infty;\ -\frac{3+\sqrt{73}}{2}\right[$. Por tanto, el mayor entero que satisface las dos inecuaciones es – 6

Febrero 8: Probar que la ecuación:

$$x^3 + 11^3 = y^3$$

no tiene soluciones en los enteros positivos.

Solución 1: https://ca.wikipedia.org/wiki/Darrer_teorema_de_Fermat

El último teorema de Fermat, conocido actualmente también como teorema de Wiles-Fermat, afirma que la ecuación diofántica

$$x^n + y^n = z^n$$

no tiene ninguna solución entera para n> 2 y siendo x, y y z diferentes de cero.

Es uno de los teoremas más famosos de la historia de las matemáticas y hasta el año 1995 no se disponía de una demostración (y, por tanto, en rigor se llamaba conjetura de Fermat). Fijémonos que cuando n = 2 la ecuación equivale al teorema de Pitágoras y obviamente tiene infinitas soluciones.

El matemático francés Pierre de Fermat fue el primero en proponer el teorema, pero desgraciadamente la demostración de que supuestamente había realizado no se ha encontrado nunca. Fermat sólo dejó escrito en un margen de su copia de la Aritmética de Diofanto el planteamiento del teorema y la afirmación de que había encontrado una demostración del teorema. En sus propias palabras:

Cubum autem in duos cubos, aut cuadrados- quadratum in duos cuadrados- quadratos, te generalidad nulamente in infinitum ultra quadratum potestades in duos eiusdem nominis haces este Divide cuius rey Demonstration mirabilis sane detexi. Hanc marginado exiguitas non caperet

es decir,

«Es imposible que un cubo sea la suma de dos cubos, que una potencia cuarta sea la suma de dos potencias cuartas y, en general, que cualquier número que sea una potencia superior a dos sea la suma de dos potencias del mismo valor. He descubierto una demostración verdaderamente maravillosa de esta proposición, pero este margen es demasiado estrecho para que quepa.»

La afirmación de Fermat se convirtió inmediatamente un problema que muchos matemáticos intentaron resolver. Poco a poco fueron surgiendo demostraciones parciales (por ejemplo, Sophie Germain demostró el teorema en el caso en que n es un número primo y 2n + 1 también lo es) o demostraciones de teoremas asociados a este. También se demostró el teorema para valores muy determinados de n: Euler lo demostró para n = 3, el mismo Fermat dejó constancia de su demostración para n = 4, Legendre y Dirichlet para n = 5 y este último también para n = 14.

En 1993 Andrew Wiles anunció la demostración general del teorema, demostración que resultó errónea, pero que él mismo corrigió hacia finales de 1994. [1] Con esta demostración, que implica el uso de funciones elípticas y representaciones de Galois, uno de los más famosos problemas de la matemática quedaba *cerrado. Sin embargo, vale la pena preguntarse si realmente Fermat consiguió una demostración de su teorema y, en caso afirmativo, qué método utilizó, ya que el camino seguido por Wiles utiliza herramientas matemáticas inexistentes en la época de Fermat.*

Solución 2: Tendremos:

$$x^3 + 11^3 = y^3; \quad y^3 - x^3 = 11^3; \quad (y - x) \cdot (y^2 + yx + x^2) = 11^3$$

Y por la unicidad de la descomposición factorial en números primos caben los siguientes casos:

$$\left.\begin{matrix} y - x = 1 \\ y^2 + xy + x^2 = 11^3 \end{matrix}\right\}(1) \quad \left.\begin{matrix} y - x = 11 \\ y^2 + xy + x^2 = 11^2 \end{matrix}\right\}(2) \quad \left.\begin{matrix} y - x = 121 \\ y^2 + xy + x^2 = 11 \end{matrix}\right\}(3) \quad \left.\begin{matrix} y - x = 11^3 \\ y^2 + xy + x^2 = 1 \end{matrix}\right\}(4)$$

Para el caso (1), tenemos despejando y de la primera ecuación y sustituyendo en la segunda:

$$(1 + x)^2 + x(x + 1) + x^2 = 1331; \quad 3x^2 + 3x - 1330 = 0; \quad x = \frac{-3 \pm \sqrt{15969}}{6} \notin \mathbb{Z}$$

Para el caso (2), tenemos despejando y de la primera ecuación y sustituyendo en la segunda:

$$(11 + x)^2 + x(x + 11) + x^2 = 121; \quad 3x^2 + 33x = 3x \cdot (x + 11) = 0; \quad \begin{cases} 3x = 0; \quad x = 0 \notin \mathbb{Z}^+ \\ x = -11 \notin \mathbb{Z}^+ \end{cases}$$

Para el caso (3), tenemos despejando y de la primera ecuación y sustituyendo en la segunda:

$$(121 + x)^2 + x(x + 121) + x^2 = 11; \quad 3x^2 + 363x + 14630 = 0; \quad x = \frac{-363 \pm \sqrt{-43791}}{6} \notin \mathbb{R}$$

Para el caso (4), tenemos despejando y de la primera ecuación y sustituyendo en la segunda:

$$(1331 + x)^2 + x(x + 1331) + x^2 = 1; \quad 3x^2 + 2992x + 1771560 = 0; \quad x = \frac{-2992 \pm \sqrt{-12306656}}{6} \notin \mathbb{R}$$

Con esto, tenemos que las únicas soluciones en $\mathbb{Z}$ de la ecuación proporcionada es x = – 11 e y = 0

Febrero 9: Si a y b son reales distintos. Probar que hay enteros m y n tales que se cumple

am + bn < 0

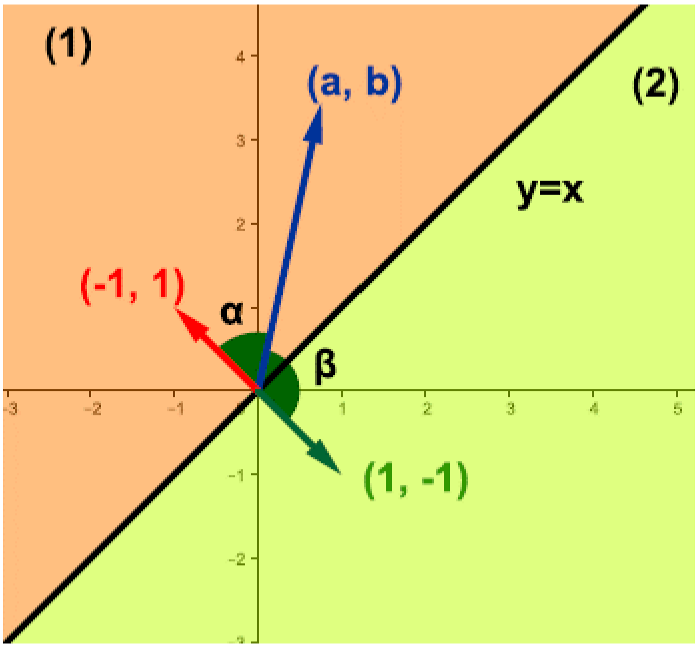
bm + an > 0

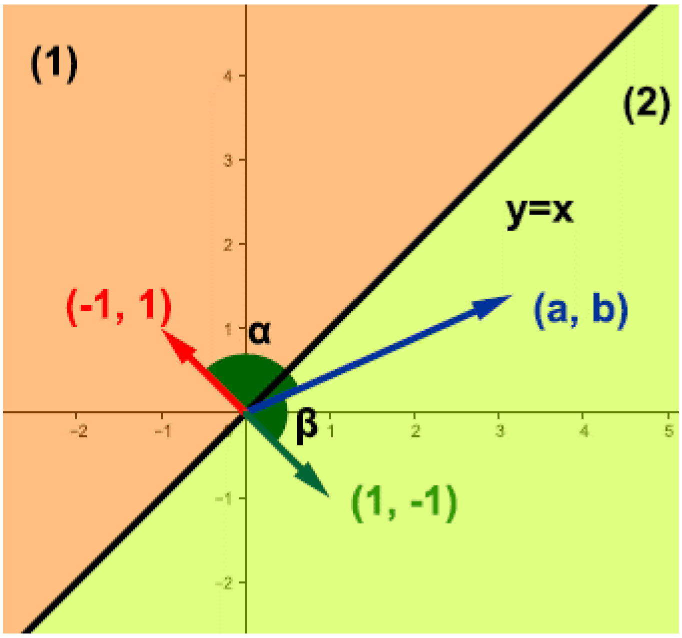
Génesis de la solución: Recordemos que dados dos vectores $\vec{u} = (a, b)$ y $\vec{v} = (n, m)$, se define:

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \begin{cases} = \|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\| \cdot \cos\left(\widehat{\vec{u}, \vec{v}}\right) \\ = an + bm \end{cases}$$

Como $\|\vec{u}\|$, $\|\vec{v}\| \geq 0$, el signo de $\vec{u} \cdot \vec{v}$, depende del signo de $\cos\left(\widehat{\vec{u}, \vec{v}}\right)$, que, a su vez, depende de $\widehat{\vec{u}, \vec{v}}$. Si $\widehat{\vec{u}, \vec{v}} \in]0°, 90°[\quad \Rightarrow \quad \vec{u} \cdot \vec{v} > 0$. Si $\widehat{\vec{u}, \vec{v}} \in]90°, 180°[\quad \Rightarrow \quad \vec{u} \cdot \vec{v} < 0$. Con esto, dado $\vec{u} = (a, b)$, (a ≠ b) hay que buscar un vector de componentes enteras (m, n), de manera que forme menos de 90° con (a, b) y tal que (n, m) forme más de 90° con (a, b).

Como a ≠ b, (a, b) está en la región (1) o en la región (2) (mirar figura adjunta). Si (a, b) está en la región (1) entonces podemos tomar (m, n) = (1, – 1), pues entonces (a, b) y (m, n) forman un ángulo mayor de 90° y entonces (a, b)·(1, – 1) = a – b < 0 y (a, b)·(– 1, 1) = b – a > 0. Los mismos vectores sirven para el caso (a, b) está en la región (2), es decir, si a > b, pues en este caso (a, b) forma un ángulo mayor de 90° con (– 1, 1) y un ángulo menor de 90° con (1, – 1)





Solución: Dados a y b. Supongamos a > b, entonces:

0 > am +bn = (a, b)·(m, n) = (a, b)·(– 1, 1) = b – a ⇔ – b + a = (a , b)·(1, – 1) = (a, b) · (n, m) = an + bm > 0

Si a < b, entonces:

0 < an +bm = (a, b)·(n, m) = (a, b)·(– 1, 1) = b – a ⇔ – b + a = (a , b)·(1, – 1) = (a, b) · (m, n) = am + bn < 0

Febrero 10: ¿Cuál es el máximo número de términos de una progresión geométrica de naturales de razón r > 1 que están entre 100 y 1000 incluyendo ambos dos?

Solución: Sea r la razón de la progresión geométrica. Si consideramos $r \in \mathbb{N}$, es decir $r \in \{2, 3, 4, 5, \cdots\}$, obviamente la progresión ha de contener al número 100 (si se excede el número 100 hay menos términos hasta 1000 que empezando desde 100). El mayor número de términos sale para $r = 2$

$$a_i = 100; \;\; a_{i+1} = 200; \;\; a_{i+2} = 400; \;\; a_{i+3} = 800; \;\; \text{(cuatro términos)}$$

Consideremos ahora $r = \frac{m}{n} > 1$ (con n, m $\in \mathbb{N}$). El primer término de la progresión geométrica que esté en el intervalo considerado debe ser una potencia lo más cercana posible y mayor que 100 del denominador de r. Como:

$$2^4 = 16; \;\; 2^5 = 32; \;\; 2^6 = 64; \;\; 2^7 = 128$$

Escogemos a 128 como el primer elemento de la progresión geométrica que esté en el intervalo considerado. El menor valor posible para n es 2 y el valor para m debe ser mayor que 2: 3, 4, 5, ⋯ . De entre estos, puesto que queremos que haya el mayor número posible de términos dentro de [100; 1000], escogemos como óptimo m = 3. Tendremos, pues, $r = \frac{3}{2}$

$$a_i = 128; \;\; a_{i+1} = 192; \;\; a_{i+2} = 288; \;\; a_{i+3} = 432; \;\; a_{i+4} = 648; \;\; a_{i+5} = 972; \text{(seis términos)}$$

Si probamos con el siguiente denominador: 3 (y puesto que r > 1 y lo más bajo posible para contener el mayor número de términos dentro del rango 100-1000) y con el numerador 4, es decir con $r = \frac{4}{3}$ tendremos: Otra vez el primer término de la progresión geométrica debe ser mayor o igual a 100 y una potencia del denominador 3

$$3^4 = 81 \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} 3^5 = 243 \\ 2 \cdot 3^4 = 162 \end{cases}$$

$$r = \frac{4}{3}; \quad a_i = 243; \quad a_{i+1} = 324; \quad a_{i+2} = 432; \quad a_{i+3} = 576; \quad a_{i+4} = 768; \quad \text{(cinco términos)}$$

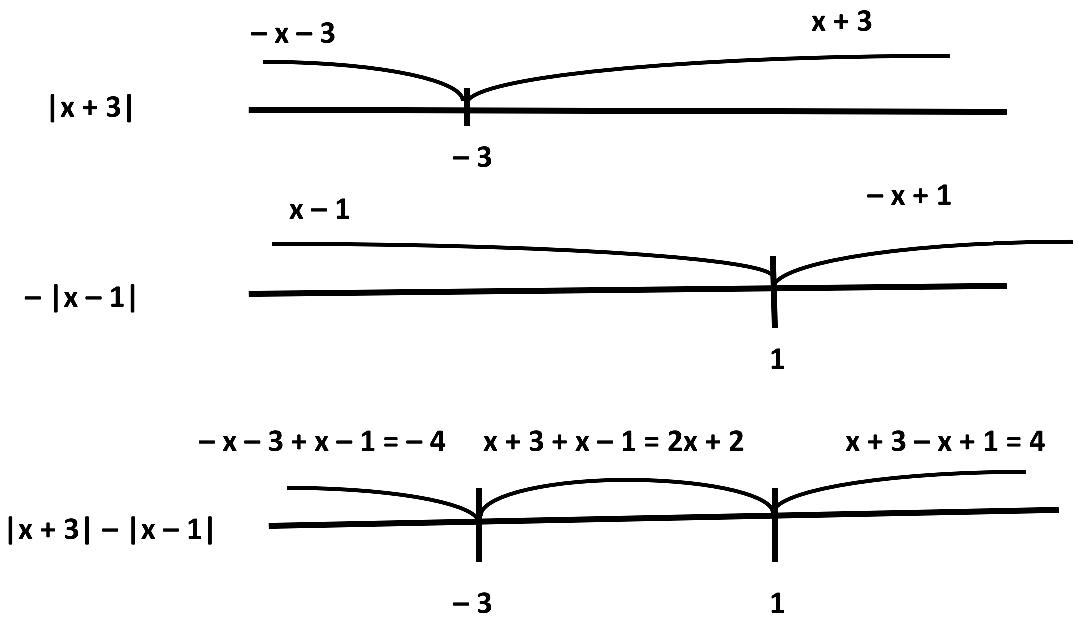
$$r = \frac{4}{3}; \quad a_i = 162; \quad a_{i+1} = 216; \quad a_{i+2} = 288; \quad a_{i+3} = 384; \quad a_{i+4} = 512; \quad a_{i+5} = \frac{2048}{3} = 682,\hat{6} \quad \text{(cinco términos)}$$

De entre los posibles r con denominador 4 escogeríamos la de numerador 5. Como buscamos que haya el mayor número posible de términos naturales y dentro del rango 100-1000 el primer término debe contener el factor 4 al menos cinco o seis veces. Como 4^5 = 1024 ya no cabe considerar más casos. En definitiva, **la progresión geométrica que tiene más términos naturales dentro del rango 100-1000 sale con r = 3/2 y a_1 = 128 que contiene seis términos naturales en el rango 100-1000**

Febrero 11: Hallar los reales que cumplen la ecuación:

|x + 3| - |x – 1| = x + 1

Solución: Tenemos:



Luego:

$$\text{Si } x \leq -3 \quad \Rightarrow \quad |x+3| - |x-1| = x+1 \quad \Rightarrow \quad -4 = x+1 \quad \Rightarrow \quad \mathbf{x = -5}$$

$$\text{Si } x \in \,]-3; 1[\quad \Rightarrow \quad |x+3| - |x-1| = x+1 \quad \Rightarrow \quad 2x+2 = x+1 \quad \Rightarrow \quad \mathbf{x = -1}$$

$$\text{Si } x \geq 1 \quad \Rightarrow \quad |x+3| - |x-1| = x+1 \quad \Rightarrow \quad 4 = x+1 \quad \Rightarrow \quad \mathbf{x = 3}$$

Febrero 12-13: Para cualquier natural sea:

$$\mathbf{h(n) = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}}$$

Probar que para n = 2, 3, 4, ···· se cumple:

$$\mathbf{n} + \sum_{\mathbf{i=1}}^{\mathbf{n-1}} \mathbf{h(i)} = \mathbf{n} \cdot \mathbf{h(n)} \qquad (*)$$

<u>Solución:</u> Expresemos el primer miembro de (*) como filas:

Como la suma es asociativa podemos alterar el orden de los sumandos sin alterar el valor de la suma.

Sumamos por columnas:

$$
\begin{array}{lccccccc}
 & \multicolumn{7}{c}{n} \\
n = & 1+ & 1+ & 1+ & \dots\ \dots & +1 & +1 & +1 \\
h(1) = & 1 & & & & & & \\
h(2) = & 1+ & \frac{1}{2} & & & & & \\
h(3) = & 1+ & \frac{1}{2}+ & \frac{1}{3} & & & & \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & & & \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & & & \\
h(n-2) & 1+ & \frac{1}{2}+ & \frac{1}{3}+ & \dots\ \dots & +\frac{1}{n-2} & & \\
h(n-1) = & 1+ & \frac{1}{2}+ & \frac{1}{3}+ & \dots\ \dots & +\frac{1}{n-2} & +\frac{1}{n-1} & \\
n+\sum_{i=1}^{n-1} h(i) = & n\cdot 1+ & n\cdot\frac{1}{2}+ & n\cdot\frac{1}{3}+ & \dots\ \dots & +n\cdot\frac{1}{n-2} & +n\cdot\frac{1}{n-1} & +n\cdot\frac{1}{n}
\end{array}
$$

Es decir:

$$\mathbf{n} + \sum_{\mathbf{i=1}}^{\mathbf{n-1}} \mathbf{h(i)} = n \cdot 1 + n \cdot \frac{1}{2} + n \cdot \frac{1}{3} + \cdots + n \cdot \frac{1}{n-2} + n \cdot \frac{1}{n-1} + n \cdot \frac{1}{n}$$
$$= n \cdot \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n-2} + \frac{1}{n-1} + \frac{1}{n}\right) = \mathbf{n} \cdot \mathbf{h(n)}$$

<u>Febrero 15:</u> Expresar 100000 como producto de dos enteros ninguno de los cuales sea múltiplo de 10.

<u>Solución:</u> Tendremos:

$$100000 = 10^5 = (2 \cdot 5)^5 = 2^5 \cdot 5^5 = 32 \cdot 3125 = (-32) \cdot (-3125)$$

Cualquier otra agrupación de los factores primos de 10^5 lleva a expresar 10^5 como producto de enteros, uno de los cuales es múltiplo de 10.

<u>Febrero 16-17:</u> Durante una cierta campaña política, p promesas diferentes se realizan entre los partidos políticos participantes. Si:

1.- Varios partidos pueden hacer la misma promesa.

2.- Cualesquiera dos partidos tienen al menos una promesa en común.

3.- No hay dos partidos con exactamente las mismas promesas.

Probar que no hay más de 2^{p-1} partidos participantes

Solución: Si hay dos promesas: 1 y 2, entonces, el sistema de partidos que cumple las tres condiciones del enunciado son: $\{p_1, p_{12}\}$ (los subíndices hacen referencia a las promesas publicitadas por cada partido). Si añadimos otro partido: p_2, entonces no se cumple la segunda condición. Es decir, para dos promesas, hay como mucho, $2^{2-1} = 2^1 = 2$ partidos participantes que cumplen las tres condiciones del enunciado.

Supongamos 3 promesas: 1, 2 y 3, entonces al sistema máximo de dos promesas: $\{p_1, p_{12}\}$ le añadimos en cada subíndice la promesa añadida y conseguimos $\{p_1, p_{12}, p_{13}, p_{123}\}$. Tal sistema de partidos cumple los tres requisitos y es el máximo pues si por ejemplo añadimos otro partido, por ejemplo, p_{23} no se cumple la segunda condición. Es decir, para tres promesas, hay como mucho, $2^{3-1} = 2^2 = 4$ partidos participantes que cumplen las tres condiciones del enunciado.

Supongamos cuatro promesas. Entonces al sistema maximal para tres promesas $\{p_1, p_{12}, p_{13}, p_{123}\}$ le añadimos en cada subíndice la promesa añadida y conseguimos $\{p_1, p_{12}, p_{13}, p_{123}, p_{14}, p_{124}, p_{134}, p_{1234}\}$. Tal sistema de partidos cumple los tres requisitos y es el máximo pues si por ejemplo añadimos otro partido, por ejemplo, p_{23} no se cumple la segunda condición. Es decir, para cuatro promesas, hay como mucho, $2^{4-1} = 2^3 = 8$ (multiplicamos por dos el sistema maximal anterior) partidos participantes que cumplen las tres condiciones del enunciado.

Una vez visto el mecanismo de generación del sistema de partidos, pasamos a la demostración del problema. Por inducción.

Para 2, 3 y 4 promesas, ya lo tenemos demostrado. Supongamos la hipótesis demostrada para $\{1, 2, \cdot\cdot, i\}$ promesas. Es decir, supongamos que para i promesas tenemos que el sistema anterior genera un conjunto de 2^{i-1} partidos que cumple los tres requisitos y que este sistema es maximal. Supongamos que añadimos la i + 1 promesa y generamos el sistema de doble número de partidos para i promesas añadiendo a los partidos originales los partidos añadiendo a cada uno de ellos la i + 1 promesa como subíndice. Este nuevo sistema de partidos cumple los tres requisitos del enunciado:

a) Es obvia.
b) Dados dos partidos, eliminamos de ellos la promesa i + 1 (si alguno lo tuviera) y entonces tenemos dos partidos del sistema anterior que deben cumplir la segunda condición.
c) Es obvia.

Además, el nuevo sistema es maximal pues al añadir un nuevo partido se deja de cumplir alguna de las tres condiciones del enunciado.

Febrero 18-19: Probar que ∀n natural

$$\frac{1}{n} = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n \cdot (n+1)}$$

Probar que ∀n natural mayor que 1, ∃i, j naturales tales que:

$$\frac{1}{n} = \frac{1}{i \cdot (i+1)} + \frac{1}{(i+1) \cdot (i+2)} + \cdot\cdot + \frac{1}{j \cdot (j+1)}$$

Solución: La primera parte es obvia:

$$\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n \cdot (n+1)} = \frac{n}{(n+1) \cdot n} + \frac{1}{n \cdot (n+1)} = \frac{n+1}{n \cdot (n+1)} = \frac{1}{n}$$

La segunda parte no es excesivamente complicada. Para n = 2

$$\frac{1}{2}=\frac{1}{1\cdot 2}=\frac{1}{(1+1)\cdot 1} \qquad (\mathbf{i}=\mathbf{j}=\mathbf{1})$$

Y para n > 2:

$$\begin{aligned}\frac{1}{n}=\frac{1}{n\cdot(n+1)}+\frac{1}{n+1}&=\left\{\frac{1}{n+1}=\frac{1}{(n+1)\cdot(n+2)}+\frac{1}{n+2}\right\}=\frac{1}{n\cdot(n+1)}+\frac{1}{(n+1)\cdot(n+2)}+\frac{1}{n+2}\\ &=\left\{\frac{1}{n+2}=\frac{1}{(n+2)\cdot(n+3)}+\frac{1}{n+3}\right\}\\ &=\frac{1}{n\cdot(n+1)}+\frac{1}{(n+1)\cdot(n+2)}+\frac{1}{(n+2)\cdot(n+3)}+\frac{1}{n+3}=\cdots\cdots\\ &=\left\{\begin{matrix}\text{aplicamos la primera}\\ \text{parte } n^2-2n \text{ veces}\\ (n>2\ \Rightarrow\ n^2-2n>0)\end{matrix}\right\}\\ &=\frac{1}{n\cdot(n+1)}+\frac{1}{(n+1)\cdot(n+2)}+\frac{1}{(n+2)\cdot(n+3)}+\cdots+\frac{1}{(n^2-n-1)\cdot(n^2-n)}\\ &+\frac{1}{n^2-n}=\left\{\frac{1}{n^2-n}=\frac{1}{n\cdot(n-1)}\right\}\\ &=\frac{1}{n\cdot(n-1)}+\frac{1}{n\cdot(n+1)}+\frac{1}{(n+1)\cdot(n+2)}+\cdots+\frac{1}{(n^2-n-1)\cdot(n^2-n)}\\ &=\left\{\begin{matrix}\mathbf{i}=\mathbf{n}-\mathbf{1}\\ \mathbf{j}=\mathbf{n^2}-\mathbf{n}-\mathbf{1}\end{matrix}\right\}=\frac{1}{i\cdot(i+1)}+\frac{1}{(i+1)\cdot(i+2)}+\cdots+\frac{1}{j\cdot(j+1)}\end{aligned}$$

Por ejemplo:

$$\frac{1}{3}=\left\{\begin{matrix}i=n-1=3-1=2\\ j=n^2-n-1=9-4=5\end{matrix}\right\}=\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\frac{1}{4\cdot 5}+\frac{1}{5\cdot 6}=\frac{1}{6}+\frac{1}{12}+\frac{1}{20}+\frac{1}{30}$$

Febrero 20: Evaluar la expresión:

$$\mathbf{\frac{1}{\log_2 36}+\frac{1}{\log_3 36}}$$

Solución: Tenemos:

$$\frac{1}{\log_2 36}+\frac{1}{\log_3 36}=\frac{\log_2 2}{\log_2 36}+\frac{\log_3 3}{\log_3 36}=\left\{\begin{matrix}\text{cambio de base}\\ \log_a x=\dfrac{\log_b x}{\log_b a}\end{matrix}\right\}=\log_{36} 2+\log_{36} 3=\log_{36}(2\cdot 3)$$

$$\log_{36} 6=z \iff 36^z=6 \iff z=\frac{1}{2}$$

Por tanto:

$$\frac{1}{\log_2 36}+\frac{1}{\log_3 36}=\log_{36}(2\cdot 3)=\frac{1}{2}$$

Demostración errónea:

$$\left.\begin{matrix}\log_2 36=x\Leftrightarrow 2^x=36\\ \log_3 36=y\Leftrightarrow 3^y=36\end{matrix}\right\}\Rightarrow\ 2^x\cdot 3^y=36^2=(2^2\cdot 3^2)^2$$

$$=2^4\cdot 3^4 \underset{(*)}{\Rightarrow}\left\{\begin{matrix}x=4\\ y=4\end{matrix}\right.\Rightarrow\frac{1}{\log_2 36}+\frac{1}{\log_3 36}=\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{1}{4}+\frac{1}{4}=\frac{1}{2}$$

La demostración en errónea en el paso (*). Ese paso solo es correcto si de antemano x, y $\in\mathbb{N}$. Cosa que no se cumple cuando, con anterioridad, hemos escrito: $2^x = 36 = 2^2\cdot 3^2$

Febrero 22-23: Sean a_1, a_2 ,..., a_n reales no negativos. Definimos M como la suma de todos los productos de pares $a_i \cdot a_j$ ($i < j$) es decir:

$$M = a_1 \cdot (a_2 + a_3 + \cdots + a_n) + a_2 \cdot (a_3 + \cdots + a_n) + \cdots + a_{n-1} \cdot a_n$$

Probar que el cuadrado de alguno de los números a_1, a_2, ..., a_n no excede a $\frac{\mathbf{2M}}{\mathbf{n \cdot (n-1)}}$

Solución: Por reducción al absurdo. Supongamos que:

$$\forall i,\ \ a_i^2 > \frac{2M}{n \cdot (n-1)}$$

Sacando raíces cuadradas positivas (ya que los a_i son no negativos)

$$a_i > \sqrt{\frac{2M}{n \cdot (n-1)}}$$

Luego:

$$\forall i, j\ \ (1 \leq i < j \leq n)\ \ \ a_i \cdot a_j > \frac{2M}{n \cdot (n-1)}$$

Y entonces:

$$\begin{aligned} \mathbf{M} &= a_1 \left(\overbrace{a_2 + a_3 + \cdot\cdot\ + a_n}^{n-1} \right) + a_2 \left(\overbrace{a_3 + a_4 + \cdot\cdot\ + a_n}^{n-2} \right) + \cdots\ + a_{n-1} \cdot a_n \\ &> \frac{2M}{n \cdot (n-1)} (n-1) + \frac{2M}{n \cdot (n-1)} (n-2) + \cdot\cdot\ + \frac{2M}{n \cdot (n-1)} \cdot 1 \\ &= \frac{2M}{n \cdot (n-1)} \big((n-1) + (n-2) + \cdots\ + 1 \big) = \frac{2M}{n \cdot (n-1)} \frac{n-1+1}{2} (n-1) = \mathbf{M} \end{aligned}$$

Es decir, M > M, que es un absurdo. Luego:

$$\exists i \in \{1, 2, \cdots, n\}\ |\ \ a_i^2 \leq \frac{2M}{n \cdot (n-1)}$$

Febrero 24: Una rejilla 3x3 se rellena con números positivos de manera que el producto de los números de cada fila y cada columna es 2 y el producto de los 4 números de cada una de las 4 rejillas 2x2 es 4. ¿cuál es el número que hay en la casilla central de la rejilla?

Solución: Tenemos:

A	B	C	2
D	E	F	2
G	H	I	2
2	2	2	

Multiplicando los cuatro números de todas las cuatro rejillas 2x2 tenemos:

$$(2^2)^4 = (\mathbf{A \cdot B \cdot D \cdot E}) \cdot (\mathbf{B \cdot C \cdot E \cdot F}) \cdot (\mathbf{D \cdot E \cdot G \cdot H}) \cdot (\mathbf{E \cdot F \cdot H \cdot I})$$

Reagrupando los factores para que aparezcan los productos de filas y columnas:

$$2^8 = (\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}\cdot\mathbf{D}\cdot\mathbf{E})\cdot(\mathbf{B}\cdot\mathbf{C}\cdot\mathbf{E}\cdot\mathbf{F})\cdot(\mathbf{D}\cdot\mathbf{E}\cdot\mathbf{G}\cdot\mathbf{H})\cdot(\mathbf{E}\cdot\mathbf{F}\cdot\mathbf{H}\cdot\mathbf{I})$$
$$= (\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}\cdot\mathbf{C})\cdot(\mathbf{D}\cdot\mathbf{E}\cdot\mathbf{F})\cdot(\mathbf{B}\cdot\mathbf{E}\cdot\mathbf{H})\cdot(\mathbf{D}\cdot\mathbf{E}\cdot\mathbf{F})\cdot(\mathbf{G}\cdot\mathbf{H}\cdot\mathbf{I})\cdot\mathbf{E} = \mathbf{2}\cdot\mathbf{2}\cdot\mathbf{2}\cdot\mathbf{2}\cdot\mathbf{2}\cdot\mathbf{E}$$
$$= \mathbf{2^5}\cdot\mathbf{E} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{2^3} = \mathbf{E} = \mathbf{8}$$

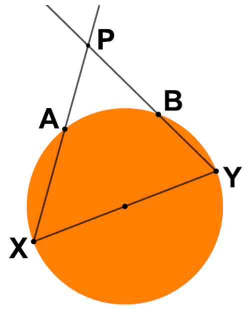
Febrero 25: Probar que si p y p + 2 son ambos primos mayores que 3, entonces 6 es un factor de p + 1.

Solución: Tenemos tres enteros positivos, consecutivos, mayores que tres, siendo p y p + 2 primos (primos gemelos). Hemos de probar que p + 1 es múltiplo de 6, es decir, de 2 y de 3.

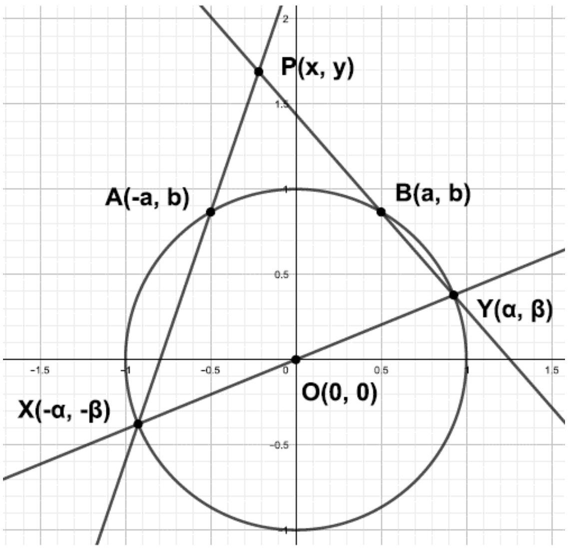
Como p es primo mayor que 3 no es par. Y como, entre dos enteros consecutivos uno es múltiplo de 2, tendremos que p + 1 es múltiplo de 2.

Como p es mayor que 3 y primo, p tampoco es múltiplo de 3. Es decir, debe cumplirse que p = 1(3) o p = 2(3). Pero si p = 1(3) entonces debería ser p + 2 = 0(3) (diferente de 3) en contra de que p + 2 sea primo. Luego la única posibilidad que queda es p = 2(3). Y entonces p + 1 = 0(3), que concluye la demostración.

Febrero 26-27: Sean A y B dos puntos fijos no diametralmente opuestos de una circunferencia. Sean X e Y los extremos de un diámetro. Hallar el lugar geométrico de los puntos P que son la intersección de las rectas que pasan por A y X y por B e Y



Solución: Escogemos un sistema de ejes coordenados de manera que el centro de la circunferencia dada sea el origen de coordenadas y que el eje Y sea perpendicular al segmento AB por su punto medio. Con esta elección hacemos además que el radio de la circunferencia sea la unidad. Entonces:



$$0(0,0);\quad A(-a,b);\quad B(a,b);\quad X(-\alpha,-\beta);\quad Y(\alpha,\beta)$$
$$a^2+b^2 = 1 = \alpha^2+\beta^2$$

Recta que pasa por A(– a, b) y X(– α, – β):

$$\frac{y-b}{x+a} = \frac{-\beta-b}{-\alpha+a};\quad (y-b)\cdot(\alpha-a) = (x+a)\cdot(\beta+b)$$
$$y(\alpha-a) = (x+a)\cdot(\beta+b) + b(\alpha-a)$$

y como $\alpha - a \neq 0$

$$y = \frac{\beta+b}{\alpha-a}\cdot(x+a)+b$$

Recta que pasa por B(a, b) e Y(α, β):

$$\frac{y-b}{x-a} = \frac{\beta-b}{\alpha-a};\quad (y-b)\cdot(\alpha-a) = (x-a)\cdot(\beta-b)$$
$$y(\alpha-a) = (x-a)\cdot(\beta-b)+b(\alpha-a)$$

y como $\alpha - a \neq 0$

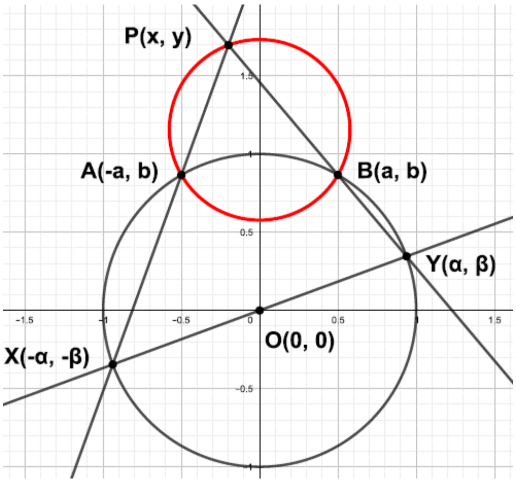
$$y = \frac{\beta-b}{\alpha-a}\cdot(x-a)+b$$

Coordenadas del punto de corte P(x , y):

$$\left.\begin{array}{l} y = \dfrac{\beta+b}{\alpha-a}\cdot(x+a)+b \\ y = \dfrac{\beta+b}{\alpha-a}\cdot(x+a)+b \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{\beta+b}{\alpha-a}\cdot(x+a)+b = \frac{\beta+b}{\alpha-a}\cdot(x+a)+b \;\Rightarrow\; x = -\frac{\beta a}{b}\quad(1)$$

$$y = \frac{\beta + b}{\alpha - a} \cdot \frac{ab - \beta a}{b} + b = \frac{a \cdot (b^2 - \beta^2)}{(\alpha - a) \cdot b} + b = \frac{b^2\alpha - a\beta^2}{b \cdot (\alpha - a)} \quad (2)$$

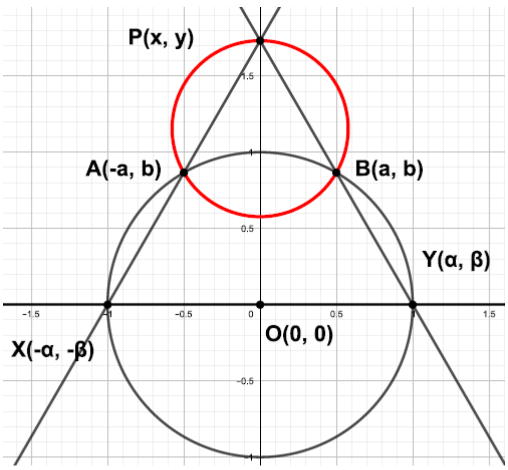
Las coordenadas del punto P no parecen sugerir la ecuación del lugar geométrico. Sin embargo, si mentalmente trasladamos el punto Y hacia la izquierda el punto P parece describir el mismo tipo de ecuación que el punto Y, es decir, el punto P (al trasladar el punto Y por la circunferencia) parece describir otra circunferencia con centro en el eje Y. Este hecho, también está avalado por lo obtenido mediante el programa geogebra

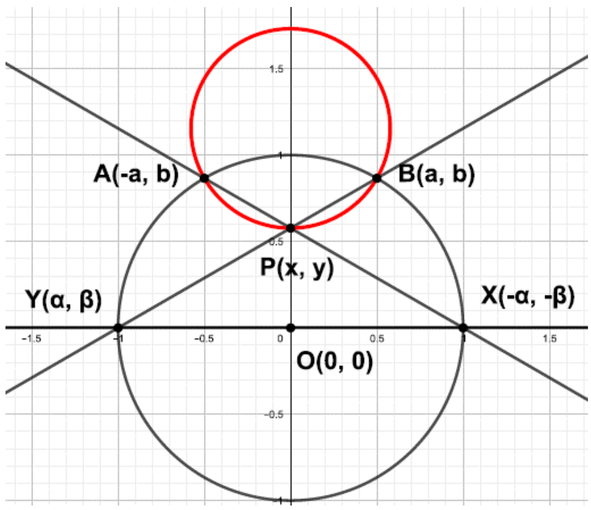


Calculamos el presumible centro hallando el punto medio de los puntos correspondientes a $(\alpha, \beta) = (1, 0)$ y a $(\alpha, \beta) = (-1, 0)$, es decir cuando el punto $Y(\alpha, \beta)$ está en el lado positivo del eje X y cuando el punto $Y(\alpha, \beta)$ está en el lado negativo del eje X. Además, el presumible radio será la mitad de la longitud de los puntos P(x, y) obtenidos para estos valores del punto Y

Si hacemos en (1) y (2) $\alpha = 1$ y $\beta = 0$ obtenemos que las coordenadas del punto de corte son

$$P\left(0, \frac{b}{1 - a}\right)$$





Si hacemos en (1) y (2) $\alpha = -1$ y $\beta = 0$ obtenemos que las coordenadas del punto de corte son

$$P\left(0, \frac{b}{1 + a}\right)$$

Con lo que, el presumible centro (0, A) y radio del lugar deberían ser:

$$(0, A) = PM\left(\left(0, \frac{b}{1 - a}\right);\ \left(0, \frac{b}{1 + a}\right)\right) = \left(\frac{0 + 0}{2}, \frac{\frac{b}{1 - a} + \frac{b}{1 + a}}{2}\right) = \left(0, \frac{1}{b}\right)$$

$$2r = \frac{b}{1 - a} - \frac{b}{1 + a} = \frac{2ab}{b^2} \quad \Rightarrow \quad r = \frac{a}{b}$$

Para concluir que el lugar geométrico es una circunferencia de centro y radio los obtenidos como presumibles hemos de comprobar que las coordenadas de los puntos de corte P(x, y) cumplen la ecuación de la circunferencia. Tenemos:

$$x^2+\left(y-\frac{1}{b}\right)^2=\frac{\beta^2a^2}{b^2}+\left(\frac{b^2\alpha-a\beta^2}{b(\alpha-a)}-\frac{1}{b}\right)^2=\frac{\beta^2a^2}{b^2}+\left(\frac{b^2\alpha-a\beta^2-\alpha+a}{b(\alpha-a)}\right)^2$$
$$=\frac{\beta^2a^2}{b^2}+\left(\frac{(1-a^2)\alpha-a(1-\alpha^2)-\alpha+a}{b(\alpha-a)}\right)^2=\frac{\beta^2a^2}{b^2}+\left(\frac{a\alpha(\alpha-a)}{b(\alpha-a)}\right)^2=\frac{\beta^2a^2}{b^2}+\frac{\alpha^2a^2}{b^2}$$
$$=\frac{a^2(\beta^2+\alpha^2)}{b^2}=\frac{a^2}{b^2}$$

Con lo que tenemos que el lugar geométrico de los puntos P(x, y) es la circunferencia de centro $\left(0,\frac{1}{b}\right)$ y de radio $r=\frac{a}{b}$