SOLUCIONES MARZO 2021

PROBLEMAS PARA LA PREPARACIÓN DE LA OLIMPIADA DE 1º Y 2º DE LA E.S.O. CONVOCADA POR LA FESPM EN 2003 Y 2004. ORGANIZACIÓN: JOSÉ COLÓN LACALLE. PROFESOR JUBILADO**.**

Marzo 1-8: En una competición de campo a través, tres corredores salen de A hacia B a la misma hora. El más rápido llega a B una hora antes de mediodía y su velocidad es 15 km/h. El más lento llega a B una hora después de mediodía y su velocidad es de 10 km/h. El otro corredor llega a B exactamente al mediodía. Averiguar la hora de salida de A, la distancia entre A y B y la velocidad del segundo corredor

Solución: Sea d la distancia entre A y B. Tendremos suponiendo que salen a las x horas de A:

$$\left.\begin{array}{l} v_A = 15 = \dfrac{d}{11 - x} \quad \Rightarrow \quad 165 - 15x = d \\ v_C = 10 = \dfrac{d}{13 - x} \quad \Rightarrow \quad 130 - 10x = d \end{array}\right\}$$

Restando ambas ecuaciones:

$$35 = 5x \quad \Rightarrow \quad x = 7 \text{ h}$$

Sustituyendo en la primera ecuación:

$$d = 165 - 15 \cdot 7 = 60 \text{ km}$$

Por último:

$$v_B = \frac{60 \text{ km}}{(12 - 7)\text{h}} = 12 \text{ km/h}$$

Marzo 2-3: Dani, Aitana i Laia han de repartirse 21 botellas de refresco que han sobrado de una fiesta: 7 están llenas, 7 medio vacías y 7 vacías. ¿Cómo deben repartirse las botellas para que los 3 se lleven el mismo número de botellas y la misma cantidad de refresco? (No se puede trasvasar refresco de una botella a otra)

Solución: Cada uno ha de llevarse (21/3 =) 7 botellas y la misma cantidad de líquido ((7 + 3,5)/3 =) 3,5, el equivalente a 3 botellas llenas y una medio llena. Tendremos:

Dani	2 vacías	2 llenas	3 medio llenas	7 botellas
Aitana	2 vacías	2 llenas	3 medio llenas	7 botellas
Laia	3 vacías	3 llenas	1 medio llena	7 botellas
	7 vacías	7 llenas	7 medio llenas	

Marzo 4-11: En un frutero hay manzanas, peras y naranjas. Dani y Laia cogen frutas distintas. Dani y Aitana cogen la misma fruta. Ni Dani ni Laia cogen peras. Si Laia coge una manzana, Aitana también. ¿Qué fruta cogió cada uno?

Solución: Del enunciado, tendremos:

(1) Dani i Laia frutas distintas.
(2) Dani i Aitana la misma fruta.
(3) Ni Dani ni Laia peras.
(4) Si Laia manzana, entonces Aitana manzana.

La condición (4) está en contradicción con (1) y (2). Luego Laia no coge manzanas. Por (3) Laia tampoco coge pera. Luego Laia coge naranja.

Por (3) Dani no coge pera. Por (1) Dani tampoco coge naranja. Luego Dani coge manzana.

Por último, por (2), Aitana coge manzana.

Marzo 5-6: Dani debe multiplicar por 78 un número de dos cifras en el que la cifra de las decenas es tres veces mayor que la de las unidades. Por error intercambia los dígitos de este factor y obtiene un número que es 2808 unidades menor que el producto buscado. ¿Cuál es este producto?

Solución: Sea a el dígito de las unidades del número de dos cifras del enunciado. Tendremos que el factor buscado es $3a\cdot10 + a$. La condición del enunciado es equivalente a:

$(3a\cdot10 + a)\cdot78 = (a\cdot10 + 3a)\cdot78 + 2808 \Rightarrow 31\cdot a\cdot78 - 78\cdot13a = 2808 \Rightarrow 78\cdot(31a - 13a) = 2808 \Rightarrow 78\cdot18a = 2808$

$$a = \frac{2808}{78\cdot18} = 2$$

Luego el factor por el que debía multiplicar 78 es ($3a\cdot10 + a =$) 62. El producto buscado es ($78\cdot62 =$) 4836

Marzo 9: En este producto cada letra representa una cifra y letras diferentes indican cifras diferentes. ¿Cuál es el valor de AGUA?

G	O	T	A
		x	A
A	G	U	A

Solución: Tendremos que A^2 acaba en A y de la tabla adjunta a la derecha, que $A \in \{0, 1, 5, 6\}$. Obviamente A no puede ser 0. Si lo fuese, el resultado de la multiplicación sería 0 en contra de que el resultado sea un número de cuatro dígitos. Obviamente A no puede ser 1. Si lo fuese, el resultado de la multiplicación será igual a primer factor y entonces tendríamos G = A = O y T = U que contradice el enunciado. Si A = 5, tendremos:

A	A^2
1	1
2	4
3	9
4	16
5	25
6	36
7	49
8	64
9	81
0	0

G O T 5 x 5 5 G U 5	$\Rightarrow 5\cdot G = 5 \Rightarrow G = 1$	1 O T 5 x 5 5 1 U 5	$\Rightarrow$ 5·O + (llevadas) = 1 $\Rightarrow$ O = 0 y llevadas 1
1 0 T 5 x 5 5 1 U 5	$\Rightarrow 5\cdot T + 2 < 20 \Rightarrow 3{,}6 > T \notin \{0, 1\} \Rightarrow T \in \{2, 3\}$ Si T = 2 $\Rightarrow$ U = 2 = T ¡Absurdo! Si T = 3 $\Rightarrow$ U = 7	1 0 3 5 x 5 5 1 7 5	

Si A = 6, tendremos:

G O T 6 x 6 6 G U 6	$\Rightarrow 6\cdot G = 6 \Rightarrow G = 1$	1 O T 6 x 6 6 1 U 6	$\Rightarrow$ 6·O + (llevadas) = 1 $\Rightarrow$ O = 0 y llevadas 1
1 0 T 6 x 6 6 1 U 6	$\Rightarrow 6\cdot T + 3 < 20 \Rightarrow 2{,}8 > T \notin \{0, 1\} \Rightarrow T = 2 \Rightarrow$ U = 5	1 0 2 6 x 6 6 1 5 6	

Marzo 10: Encontrar los 9 naturales (de más de una cifra) consecutivos más pequeños, el primero terminado en 1, el segundo terminado en 2, y así sucesivamente, de manera que al dividir cada uno de ellos por su última cifra, el resultado da siempre exacto

Solución: Obviamente {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9} cumple el requisito del enunciado, pero son naturales de una cifra. Podemos reformular el requisito del enunciado mediante:

Buscamos el menor natural $x \neq 0$, tal que

$$10x + k = \dot{\hat{k}} \qquad \text{para } k \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$$

Obviamente, cualquiera que sea x, lo anterior es cierto para k = 1.

Como $k = \dot{\hat{k}} \;\Rightarrow\; 10x = \dot{\hat{k}} - k = \dot{\hat{k}}$. Luego buscamos el menor natural x tal que:

$$10x = \dot{\hat{k}} \text{ para } k = 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9.$$

Como 10 = 2·5, buscamos el menor x tal que:

$$x = \dot{\hat{k}} \text{ para } k = 3, 4, 6, 7, 9$$

Y puesto que:

$$\left.\begin{array}{l} \text{si } x = \dot{\hat{9}} \;\Rightarrow\; x = \dot{\hat{3}} \\ \text{si } x = \dot{\hat{4}} \;\Rightarrow\; x = \dot{\hat{2}} \end{array}\right\} \;\Rightarrow\; x = \dot{\hat{6}}$$

buscamos el menor natural x tal que:

$$x = \dot{\hat{k}} \text{ para } k = 4, 7, 9$$

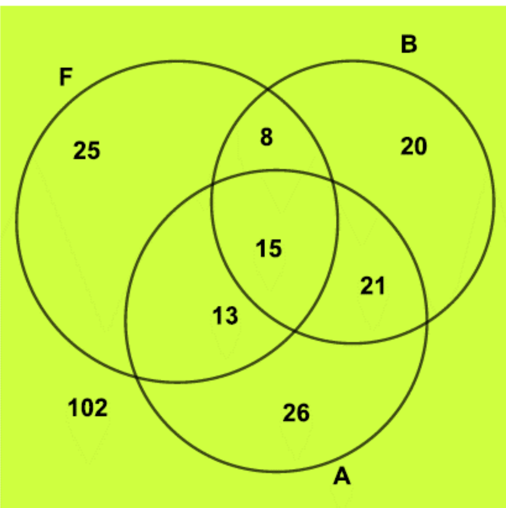
Es decir, x = mcm {4, 7, 9} = 9·4·7 = 252. El conjunto de números del enunciado es:

{2521, 2522, 2523, 2524, 2525, 2526, 2527, 2528, 2529}

Marzo 12-13: En un I.E.S. de 230 alumnos hay 15 que practican fútbol, atletismo y baloncesto, 23 que practican fútbol y baloncesto, 36 que practican atletismo y baloncesto, 28 que practican atletismo y fútbol, 61 que practican fútbol, 64 que practican baloncesto y 75 que practican atletismo, ¿cuántos no practican ningún deporte?

Solución: Representaremos por F (B, A) el conjunto de alumnado que practica futbol (baloncesto, atletismo).

Tendremos el siguiente diagrama de Venn (empezando por la intersección más completa, es decir por $F \cap B \cap A$ (de cardinalidad 15))



Por ejemplo:

Solo F y B → 23 – 15 = 8

Solo F → 61 – (13 + 15 + 8) = 25

Ningún de los tres deportes → 230 – (25 + 8 + 20 +15 + 13 + 21 + 26) = 102

También:

$$\begin{aligned} |A \cup F \cup B| &= |A| + |F| + |B| - |A \cap F| - |A \cap B| \\ &\quad - |F \cap B| + |A \cap B \cap F| \\ &= 75 + 61 + 64 - 28 - 36 - 23 + 15 \\ &= 128 \end{aligned}$$

Y, por último, si E es el conjunto de todos los estudiantes del I.E.S.

$$|\overline{F} \cap \overline{A} \cap \overline{B}| = |\overline{F \cup A \cup B}| = |E| - |A \cup F \cup B| = 230 - 128 = 102$$

Marzo 15-16: Un autónomo fabrica cierto lote de piezas en 12 días trabajando 7 horas diarias, de las que ha dedicado 1 hora cada día a la preparación de máquinas y material. ¿Cuántos minutos más debe trabajar cada día para realizar el lote de piezas en 10 días?

Solución: El obrero trabaja para la fabricación del lote, un total de (12·6 =) 72 horas. Si debe confeccionar el lote en diez días, debe trabajar cada día (72/10 =) 7,2 horas = 7 h 12’. Como antes debía trabajar 6 horas y ahora, debe trabajar 7 horas y 12 minutos, debe incrementar la jornada diaria en (7 h 12’ – 6 h =) 1h 12’

Marzo 17-24: Tres amigos viven en la misma calle, dos de ellos en edificios colindantes. Uno de ellos les dice a los otros: “Los números en los que vivimos son primos y su producto forma las seis últimas cifras de mi número de móvil”. Si la calle tiene menos de cien números hallar los números de las casas y las últimas cifras del móvil

Solución: Los números de las casas colindantes se diferencian en 2. Por tanto, las casas vecinas y numeradas con primos han de ser primos gemelos. Los primos gemelos menores de 100 son:

(3,5) (5, 7) (11, 13) (17, 19) (29, 31) (41,43) (59, 61) (71, 73)

Hemos de buscar otro primo menor de 100, que, multiplicado por los números de cada pareja de primos gemelos, de un número de seis cifras.

Como:

$$111{,}23\ldots = \frac{100000}{29 \cdot 31} \leq x \leq \frac{999999}{29 \cdot 31} = 1112{,}34\ldots$$

La pareja (29, 31) (y tampoco ninguna de las anteriores a ella) sirve porque su producto no da un número de seis cifras. Empezaremos a obtener soluciones con la pareja (41, 43). Como:

$$56{,}72\ldots = \frac{100000}{41 \cdot 43} \leq x \leq \frac{999999}{41 \cdot 43} = 567{,}21\ldots$$

son soluciones, 41, 43 y cualquier primo entre 57 y 100: 59, 61, 67, 71, 73, 79, 83, 89 y 97. Con la siguiente pareja de primos gemelos, (59, 61), tendremos:

$$27{,}78\ldots = \frac{100000}{59 \cdot 61} \leq x \leq \frac{999999}{59 \cdot 61} = 277{,}85\ldots$$

Por lo tanto, son soluciones, 59, 61 y cualquier primo entre 28 y 100: 29, 31, 37, 41, 43, 47, 53, 59, 61, 67, 71, 73, 79, 83, 89 y 97.

Con la última pareja de primos gemelos, (71, 73), tenemos:

$$19{,}29\ldots = \frac{100000}{71 \cdot 73} \leq x \leq \frac{999999}{71 \cdot 73} = 192{,}93$$

Por lo tanto, son soluciones, 71, 73 y cualquier primo entre 28 y 100: 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, 53, 59, 61, 67, 71, 73, 79, 83, 89 y 97.

Hay un total de (9 + 16 + 17 =) 42 soluciones al problema. Todas ellas están recogidas en la siguiente hoja de Excel

41	43	x	41·43·x		59	61	x	59·61·x		71	73	x	71·73·x
41	**43**	**59**	**104017**		**59**	**61**	**29**	**104371**		**71**	**73**	**23**	**119209**
41	**43**	**61**	**107543**		**59**	**61**	**31**	**111569**		**71**	**73**	**29**	**150307**
41	**43**	**67**	**118121**		**59**	**61**	**37**	**133163**		**71**	**73**	**31**	**160673**
41	**43**	**71**	**125173**		**59**	**61**	**41**	**147559**		**71**	**73**	**37**	**191771**
41	**43**	**73**	**128699**		**59**	**61**	**43**	**154757**		**71**	**73**	**41**	**212503**
41	**43**	**79**	**139277**		**59**	**61**	**47**	**169153**		**71**	**73**	**43**	**222869**
41	**43**	**83**	**146329**		**59**	**61**	**53**	**190747**		**71**	**73**	**47**	**243601**
41	**43**	**89**	**156907**		**59**	**61**	**59**	**212341**		**71**	**73**	**53**	**274699**
41	**43**	**97**	**171011**		**59**	**61**	**61**	**219539**		**71**	**73**	**59**	**305797**
					59	**61**	**67**	**241133**		**71**	**73**	**61**	**316163**
					59	**61**	**71**	**255529**		**71**	**73**	**67**	**347261**
					59	**61**	**73**	**262727**		**71**	**73**	**71**	**367993**
					59	**61**	**79**	**284321**		**71**	**73**	**73**	**378359**
					59	**61**	**83**	**298717**		**71**	**73**	**79**	**409457**
					59	**61**	**89**	**320311**		**71**	**73**	**83**	**430189**
					59	**61**	**97**	**349103**		**71**	**73**	**89**	**461287**
										71	**73**	**97**	**502751**

<u>Marzo 18-19:</u> La panadería de mi calle vende las magdalenas a 0,30 € la unidad. También las vende en paquetes de 7 magdalenas a 1€ el paquete y en paquetes de 12 magdalenas a 1,80 € el paquete. Mi madre me dio un billete de 10 € y me dijo que comprara 60 magdalenas y me quedara con las vueltas. ¿Cómo debo de hacer el pedido para quedarme con la mayor cantidad de dinero?

<u>Solución:</u> Puesto que cada magdalena individual vale 0,3 €, cada magdalena de un paquete de 7 vale (1/7 =) $0,\widehat{142857}$€ y cada magdalena de un paquete de 12 vale (1,80/12 =) 0,15 € parece lógico comprar el mayor número posible de paquetes de 7. Como: 60 = 7·8 +4, parece lógico comprar 8 paquetes de 7 magdalenas y 4 individuales con coste (8·1 + 4·0,30 =) 9,20 €que nos proporcionaría un beneficio de (10 – 9,20 =) 0,80 €. Sin embargo, si sustituimos un paquete de 7 por uno de 12, tenemos (7·7 + 12 =) 61 magdalena, con un coste de (1·7 + 1,80 =) 8,80 € y un beneficio de (10 – 8,80 =) 1,20 € (y una magdalena). Esta es la solución óptima.

Si en vez de 4 magdalenas individuales, compramos 9 paquetes de 7, tendríamos (9·7 =) 63 magdalenas con coste (9·1 =) 9 € y un beneficio de (10 – 9 =) 1 € (y 3 magdalenas), que tampoco está mal como solución óptima.

<u>Marzo 20-27:</u> Como siempre letras diferentes representan dígitos diferentes. Deducir los valores de las letras A, B, C y D para que la operación adjunta esté correctamente efectuada.

$$\begin{array}{cccc} & A & B & C \\ & \times & C & A \\ \hline & D & B & A \\ A & B & C & \\ \hline A & D & C & A \end{array}$$

<u>Solución:</u> En primer lugar, notemos que C debe de ser 1, puesto que en la multiplicación indicada al multiplicar el primer factor por el dígito C se repite el primer factor.

Tendremos entonces, que la multiplicación queda

$$\begin{array}{cccc} & A & B & 1 \\ & & \times\ 1 & A \\ \hline & D & B & A \\ A & B & 1 & \\ \hline A & D & 1 & A \end{array}$$

Fijémonos ahora en la suma remarcada de azul. Como B es un dígito, B + 1 = 11 nos lleva a B = 10 (¡absurdo!), luego B = 0. Con lo que tendremos que la multiplicación queda como figura a la derecha.

Si nos fijamos ahora en la multiplicación remarcada de verde, tendremos $A^2 = D$ y puesto que cada letra ha de ser un dígito diferente de 0 y 1, A puede ser 2 o 3 , en cuyo caso d debe ser 4 o 9

$$\begin{array}{cccc} & A & 0 & 1 \\ & & \times\ 1 & A \\ \hline & D & 0 & A \\ A & 0 & 1 & \\ \hline A & D & 1 & A \end{array}$$

Hay dos soluciones posibles:

A = 2; D = 4; C = 1 y B = 0

$$\begin{array}{cccc} & 2 & 0 & 1 \\ & & \times\ 1 & 2 \\ \hline & 4 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 1 & \\ \hline 2 & 4 & 1 & 2 \end{array}$$

A = 3; D = 9; C = 1 y B = 0

$$\begin{array}{cccc} & 3 & 0 & 1 \\ & & \times\ 1 & 3 \\ \hline & 9 & 0 & 3 \\ 3 & 0 & 1 & \\ \hline 3 & 9 & 1 & 3 \end{array}$$

Marzo 22-29: Al lado está la tabla de clasificación de un torneo veraniego de fútbol sala en el que participan 4 equipos: A, B, C y D. Cada equipo jugó un partido contra los otros tres. El torneo tuvo la particularidad de que no hubo partidos que terminaran con el mismo número de goles marcados. Averiguar razonadamente los resultados de todos los partidos.

	partidos				goles	
	J	G	E	P	F	C
A	3	2	1	0	4	1
B	3	2	0	1	8	4
C	3	1	0	2	1	6
D	3	0	1	2	2	4

Solución: En la tabla se observa que A y D han empatado un partido. Luego A y D han empatado el partido A-D. Como A tiene un gol en contra, ese partido ha terminado 0-0 o 1-1.

Si A-D termina en 0-0, los otros partidos jugados por A deben haber terminado en 2-1 y 2-0 o 3-1 y 1-0.

Si A-D termina en 1-1 los otros partidos jugados por A deben haber terminado en 1-0 y 2-0.

Supongamos que A-D termina en 0-0, entonces los demás partidos jugados por D deben haber terminado en 2-3 y 0-1 (*).

Supongamos que A-D termina en 1-1, entonces los demás partidos jugados por D deben haber terminado en 1-2 y 0-1, pero entonces tenemos un partido terminado en 0-1 (el jugado por A) y otro terminado en 0-1 (el jugado por D) que contradice el enunciado del problema.

Con esto tenemos que el partido A-D termina en 0-0.

Si A-D termina con 0-0 y los demás partidos jugados por A terminan en 3-1 y 1-0, tendremos que hay un partido jugado por A que termina con 1 gol y otro partido jugado por D que también termina con 1 gol (*) lo que contradice el enunciado.

Es decir, tendremos, con lo razonado hasta ahora:

RESULTADO	PARTIDO	NÚMERO GOLES
0-0	A-D	0
2-1	A-(B o C)	3
2-0	A-(C o B)	2

2-3	D-B(**)	5
0-1	D-C	1

((**) no puede ser D-C porque los goles a favor de C contabilizan solo un gol)

Supongamos que 2-1 es el resultado A-B, entonces 2-0 es el resultado de A-C. Analicemos el partido B-C, sin este partido tenemos que los goles a favor de B son (1 + 3 =) 4 y que los goles en contra de B son (2 + 2 =) 4, el partido B-C debe de haber terminado con 4-0.

Es decir, una posibilidad de resultados es (***)

PARTIDO	RESULTADO
A-D	0-0
A-B	2-1
A-C	2-0
D-B	2-3
D-C	0-1
B-C	4-0

La otra posibilidad

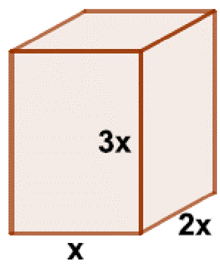
RESULTADO	PARTIDO	NÚMERO GOLES
0-0	A-D	0
2-1	A- C	3
2-0	A-B	2
2-3	D-B	5
0-1	D-C	1

es imposible, pues, a falta del partido B-C se tiene:

	F	C
B	3	4
C	2	2

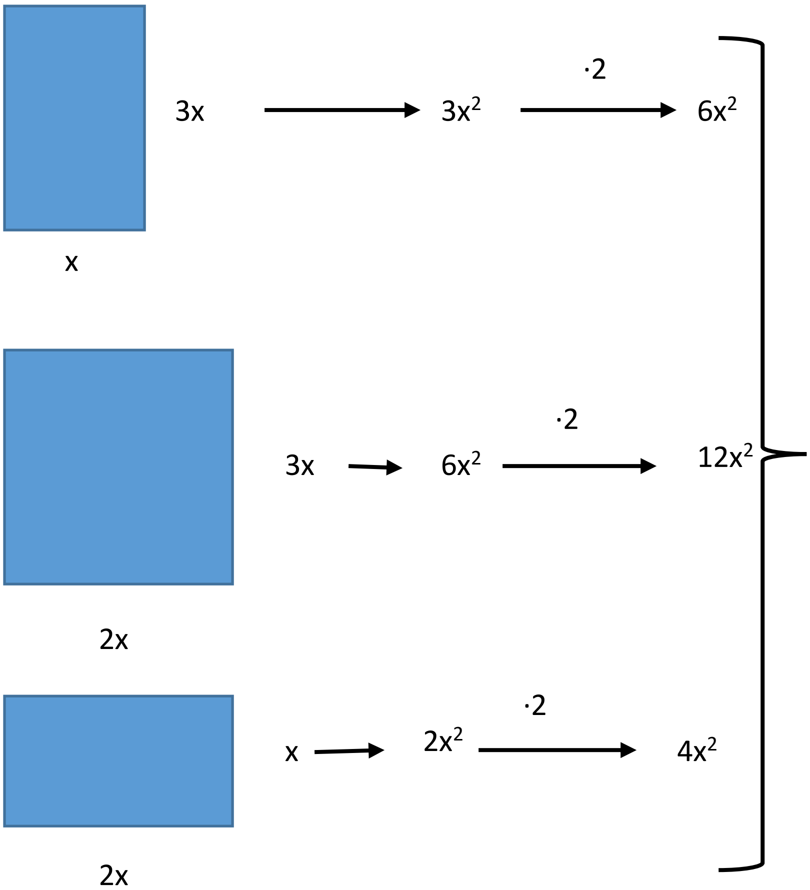
Con lo que, por una parte, el resultado B-C debe ser 5-0, y por otra parte debe ser 2-0. Por tanto, la única posibilidad es la contemplada en (***)

Marzo 23: Las longitudes de los lados de un prisma recto de base rectangular son proporcionales a 1, 2 y 3. La superficie total del prisma es 550 cm^2. Hallar el volumen.



Solución: Sean x, 2x y 3x las dimensiones del prisma recto de base rectangular. Su volumen será: $6x^3$. El valor de x debemos sacarlo de saber que su superficie total es 550 cm^2.

Tendremos:

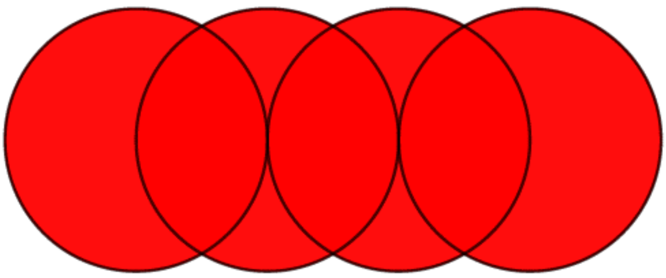


$22x^2 = 550 \Rightarrow x^2 = 25 \Rightarrow x = 5$

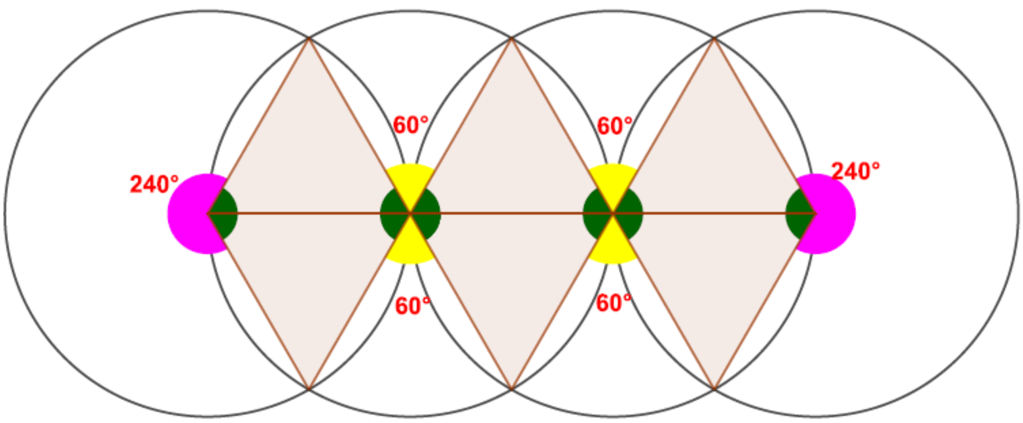
Luego:

$$V = 6x^3 = 6 \cdot 5^3 = 750\ \text{cm}^3$$

<u>Marzo 25-26:</u> Hallar el perímetro de la zona generada por los cuatro círculos cada uno de ellos de radio 10 cm y en la que cada circunferencia pasa por los centros de las circunferencias adjuntas



<u>Solución:</u> Los triángulos de la figura adjunta son equiláteros, pues cada lado mide (r =) 10 cm



Por tanto, los ángulos de color verde miden, cada uno de ellos, 60°. De donde los ángulos de color amarillo miden (180° – 2·60° =) 60° y los ángulos de color morado (360° – 2·60° =) 240°. Además el perímetro de la figura es el perímetro de dos sectores de ángulo central 240° más el perímetro de cuatro sectores circulares de ángulo central 60°. Como 2·240° + 4·60° = 720° = 2·360°, el perímetro de todos esto sectores corresponde al perímetro de dos circunferencias. En definitiva, el perímetro de la figura es de:

$$2 \cdot 2\pi r = 4\pi \cdot 10 = 40\pi \text{ cm}$$

Marzo 30-31: Los alumnos de 2º de la E.S.O. se van de acampada y deciden dejar encendida una vela cada noche durante el campamento. Sabiendo que si la vela permanece encendida toda la noche queda un cuarto de vela y por tanto con los restos de las velas de 4 noches se tiene una vela que se puede utilizar otra noche, ¿cuántas noches estarán de acampada si compran 16 velas? Calcula el menor número de velas que deben comprar si quieren tener luz de vela durante 105 noches.

Solución: Si disponemos de 16 velas, tenemos para 16 noches y sobrarán 16 cuartos de vela, que generarán (16/4 =) 4 velas más, que cubrirán 4 noches más y sobrarán 4 cuartos de vela, que generarán (4/4 =) una vela más, que cubrirá una noche más y sobrará un cuarto de vela. En total con 16 velas tendremos luz para (16 + 4 + 1 =) 21 noches y sobrará un cuarto de vela.

Para contestar a la segunda cuestión planteada, razonamos de la siguiente forma

Velas compradas	Noches con luz	Restos de vela
$4^2 = 16$	$4^2 + 4^1 + 4^0 = 21$	¼ vela
$4^3 = 64$	$4^3 + 4^2 + 4^1 + 4^0 = 85$	¼ vela
$4^3 + 4^2 = 64 + 16 = 80$	$4^3 + 2\cdot(4^2 + 4^1 + 4^0) = 106$	½ vela

Luego con 80 velas tenemos para 106 noches y sobra media vela. Si probamos con 79 velas, tenemos:

$$\begin{array}{rrrrl}
\mathbf{79} & | \; 4 & & & \\
3 & \mathbf{19} & | \; 4 & & \\
 & 3 & \mathbf{4} & | \; 4 & \\
 & & 0 & \mathbf{1} & | \; 4 \\
 & & & 1 & \mathbf{0}
\end{array}$$

79 + 19 + 4 + 1 + 0 = 103 noches

Y ahora de los restos de las divisiones y de los restos de las últimas cuatro velas y de la que viene de los restos de las divisiones, tenemos:

$$\frac{3}{4} + \frac{3}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = 2$$

que alcanza las (103 + 2 =) 105 noches