SOLUCIONES ABRIL 2021

PROBLEMAS PARA BACHILLERATO (16-18 AÑOS). ORGANIZACIÓN: RAFAEL MARTÍNEZ CALAFAT. PROFESOR JUBILADO.

Abril 1-2: ¿Es posible colocar signos de suma o resta en las celdas vacías para que la expresión resultante sea:

1. 11?
2. impar?
3. 10, al menos de diez formas diferentes?

5		**6**		**7**		**8**		**9**		**10**		**11**		**12**		**13**		**14**		**15**

Solución: Para 1, tenemos:

Si designamos por A la suma de las celdas precedidas por el signo + y por B la suma de las celdas precedidas por el signo –, tendremos que si se requiere que su suma sea 11:

$$\left.\begin{array}{r} \dfrac{5+15}{2}\cdot 11 = \mathrm{A}+\mathrm{B} \\ 11 = \mathrm{A}-\mathrm{B} \end{array}\right\} \Leftrightarrow \quad \left.\begin{array}{r} 10\cdot 11 = \mathrm{A}+\mathrm{B} \\ 11 = \mathrm{A}-\mathrm{B} \end{array}\right\}$$

Sumando las dos ecuaciones llegamos a: 11 · 11 = 2A, lo cual es absurdo ya que el primer miembro es impar y el segundo miembro es par. Por tanto, la respuesta a la primera pregunta es no..

Para 2, tenemos:

Si I es el número impar que pretendemos obtener, tenemos:

$$\left.\begin{array}{r} 10\cdot 11 = \mathrm{A}+\mathrm{B} \\ \mathrm{I} = \mathrm{A}-\mathrm{B} \end{array}\right\} \Leftrightarrow \quad (\text{sumando})10\cdot 11 + \mathrm{I} = 2\mathrm{A}$$

El primer miembro es (par + impar =) impar mientras que el segundo miembro es par, lo cual es una contradicción. Por lo tanto, la respuesta a la segunda pregunta es no.

Para 3, tenemos:

$$\left.\begin{array}{r} 10\cdot 11 = \mathrm{A}+\mathrm{B} \\ 10 = \mathrm{A}-\mathrm{B} \end{array}\right\} \Leftrightarrow \quad \begin{array}{lcl} (\text{sumando}) \quad 120 = 2\mathrm{A} & \Leftrightarrow & \mathrm{A} = 60 \\ (\text{restando}) \quad 100 = 2\mathrm{B} & \Leftrightarrow & \mathrm{B} = 50 \end{array}$$

Es decir: la suma de los números precedidos por el signo + debe ser 60 y la suma de los demás números (los precedidos por el signo –) debe ser 50. Tenemos que investigar si hay al menos diez formas diferentes de elegir números de {6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15} para obtener la suma 55 (ya que el número 5 no puede ir precedido del signo -). Si elegimos 15 (y 5), para completar la suma hasta 60, podemos elegir dos de estos tres pares: 6-14, 7-13, 8-12 y 9-11. Entonces ya tenemos, de esta manera, que hay al menos:

$$\mathrm{C}_2^4 = \binom{4}{2} = \frac{4\cdot 3}{20} = 6$$

diferentes formas de obtener la suma 60. Otras formas de obtener la suma 60, no contempladas anteriormente son:

escoger: 5, 6, 7, 8, 9, 12, 13

escoger: 5, 7, 9, 12, 13, 14

escoger: 5, 6, 9, 12, 13, 15

escoger: 5, 6, 10, 11, 13, 15

que junto con las 6 anteriores proporcionan las diez requeridas en el enunciado. Por tanto, la respuesta a la parte 3 es: sí.

Abril 3: ¿Puede un número con 200 ceros, 100 unos, 100 doses y 100 treses ser un cuadrado perfecto?

Solución: Un número es un cuadrado perfecto si los exponentes de los primos que aparecen en su descomposición factorial como producto de números primos es par. Si el número está compuesto de 200 ceros, 100 unos, 100 doses y 100 treses, la suma de sus cifras es:

$$200\cdot 0 + 100\cdot 1 + 100\cdot 2 + 100\cdot 3 = 600$$

Como 600 es divisible por 3, pero no por 9, tendremos que cualquiera de los números del enunciado es divisible por 3, pero no por 9. Es decir, cualquiera de los números del enunciado tiene al tres en su descomposición factorial, pero esta, no contiene a 3^2. Por lo tanto, cualquiera de los números del enunciado no es un cuadrado perfecto.

Abril 5-6: Dani, utilizando una hoja de cálculo ha creado una colección de naturales, del 1 al 2021. A partir de ella se escogen dos de la colección y los sustituye por su suma. Este proceso se repite hasta que solo queda un número en la colección. ¿Qué número es el que queda?

Solución: Lo que hace Dani es, poco a poco, calculando la suma de los números escritos al principio, pues cada vez coge dos y los sustituye por su suma y reitera este proceso hasta quedarse con un número. El número final será:

$$\frac{2021+1}{2}\cdot 2021 = 2043231$$

Abril 7: ¿Es posible que sumando un número par de fracciones con numeradores la unidad y denominadores impares se obtenga la unidad?

Solución: Supongamos:

$$\frac{1}{2a_1+1}+\frac{1}{2a_2+1}+\cdots+\frac{1}{2a_{2m}+1}=1$$

Entonces:

$$\frac{\prod_{i\neq 1}(2a_i+1)+\prod_{i\neq 2}(2a_i+1)+\cdots+\prod_{i\neq 2m}(2a_i+1)}{(2a_1+1)\cdot(2a_2+1)\cdot\cdots\cdot(2a_{2m}+1)}=1$$

El denominador es el producto (de un número par) de impares y por tanto es impar.

Cada sumando del numerador es el producto de impares y por tanto impar. Como hay un número par de sumandos la suma total es par.

Y ya hemos llegado a un absurdo: el numerador es par y el denominador es impar y nunca su cociente puede dar 1.

Abril 8: ¿Existe algún natural que sea igual a diez veces el producto de sus dígitos?

Solución: Sea Ab = $a_1a \ldots a_nb$ el número expresado como colección ordenada de dígitos. La exigencia del enunciado es equivalente a:

$$10\cdot A + b = 10\cdot a_1\cdot a_2\cdot\cdots\cdot a_n\cdot b \qquad (1)$$

El miembro izquierdo de la igualdad (1) tiene por cifra de unidades b mientras que el miembro derecho tiene por cifra de unidades a 0. Luego b = 0 y de aquí:

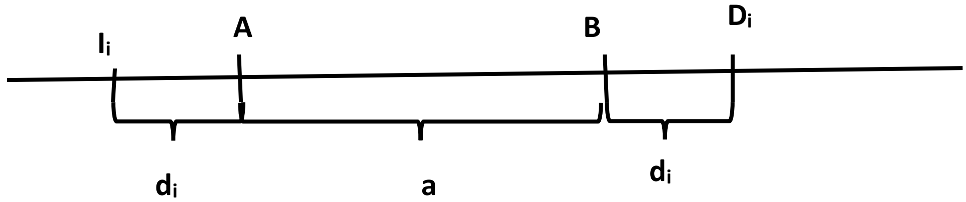
$$10 \cdot A + 0 = 10 \cdot a_1 \cdot a_2 \cdot \cdots \cdot a_n \cdot b = 10 \cdot a_1 \cdot a_2 \cdot \cdots \cdot a_n \cdot 0 = 0 \ \Rightarrow \ 10 \cdot A = 0 \ \Rightarrow \ A = 0$$

Y, en definitiva, que el número de partida es 0. Luego no hay natural tal que el número sea igual a 10 veces el producto de los dígitos del número.

Abril 9-10: Sea dado un segmento AB

a) ¿es posible escoger un número par de puntos fuera del segmento AB, pero en la recta AB de manera que la suma de distancias de esos puntos a A sea igual a la suma de distancias de esos puntos a B?
b) ¿es posible escoger un número impar de puntos fuera del segmento AB, pero en la recta AB de manera que la suma de distancias de esos puntos a A sea igual a la suma de distancias de esos puntos a B?

Solución: Para la primera pregunta tenemos:



Dado el segmento (y la recta AB) y cualquier número par 2n, escogemos la mitad de los puntos a la izquierda de A y la otra mitad de los puntos a la derecha de B de manera que:

$$d(I_i, A) = d_i = d(D_i, B) \quad \forall i \in \{1, 2, \cdots, n\}$$

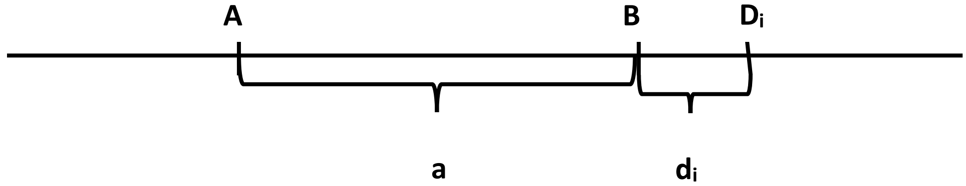
Entonces:

$$\sum_{i=1}^{n} \big(d(I_i, A) + d(D_i, A)\big) = \sum_{i=1}^{n} \big(d_i + (a + d_i)\big) = na + 2\sum_{i=1}^{n} d_i$$

$$\sum_{i=1}^{n} \big(d(I_i, B) + d(D_i, B)\big) = \sum_{i=1}^{n} \big((a + d_i) + d_i\big) = na + 2\sum_{i=1}^{n} d_i$$

Y, por tanto, la contestación a a) es afirmativa.

Para la pregunta b), tenemos: Necesariamente los puntos no deben estar todos a la izquierda de A o a la derecha de B. Si, por ejemplo, están todos a la derecha de B tendremos

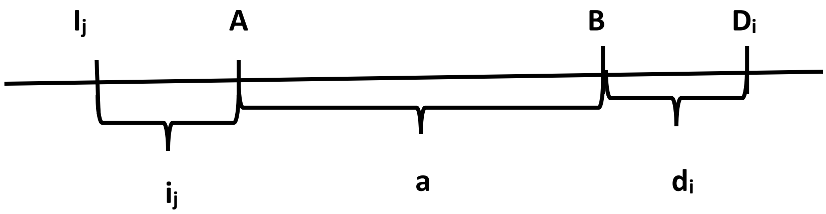


$$\sum_{i=1}^{2n+1} d(A, D_i) = \sum_{i=1}^{2n+1} (a + d_i) = (2n+1)a + \sum_{i=1}^{2n+1} d_i\ ; \qquad \sum_{i=1}^{2n+1} d(B, D_i) = \sum_{i=1}^{2n+1} d_i$$

Si:

$$\sum_{i=1}^{2n+1} d(A, D_i) = \sum_{i=1}^{2n+1} d(B, D_i) \quad \Rightarrow \quad (2n+1)a = 0 \quad \Rightarrow \quad a = 0 \quad \Rightarrow \quad A = B$$

Por tanto, algunos puntos deben estar a la derecha de B y otros a la izquierda de A. Como hay que seleccionar un número impar de puntos, a la derecha de B o a la izquierda de A ha de haber un número impar (y en el otro sitio un número par). Supongamos que a la izquierda de A hay un número impar de puntos y a la derecha de B hay un número par de puntos:



$$\forall j \in J \text{ con } |J| \text{ impar}, \quad \forall i \in I = \{1, 2, 3, \cdots, 2n+1\} - J \text{ con } |I| \text{par}$$

Entonces:

$$D_1 = \sum_{j \in J} d(I_j, A) + \sum_{i \in I} d(D_i, A) = \sum_{j \in J} i_j + \sum_{i \in I} (a + d_i) = |I| \cdot a + \sum_{j \in J} i_j + \sum_{i \in I} d_i$$

$$D_2 = \sum_{j \in J} d(I_j, B) + \sum_{i \in I} d(D_i, B) = \sum_{j \in J} (a + i_j) + \sum_{i \in I} d_i = |J| \cdot a + \sum_{j \in J} i_j + \sum_{i \in I} d_i$$

Si

$$D_1 = D_2 \;\Rightarrow\; (|I| - |J|)a = 0 \;\Rightarrow\; |I| = |J|$$

Lo que es un absurdo, pues estamos suponiendo que I es de cardinalidad par y J es de cardinalidad impar. Por tanto, la contestación a b) es negativa.

<u>Abril 12:</u> Si A no es múltiplo de 3 y B no es múltiplo de 3, ¿puede ser A·B múltiplo de 3?

<u>Solución:</u> Obviamente la contestación es negativa.

$$\left.\begin{array}{l}\text{Si A no es múltiplo de 3} \Rightarrow \text{En A no está el factor 3} \\ \text{Si B no es múltiplo de 3} \Rightarrow \text{En B no está el factor 3}\end{array}\right\} \Rightarrow \text{en AB no está el factor 3} \Rightarrow \text{AB no es múltiplo de 3}$$

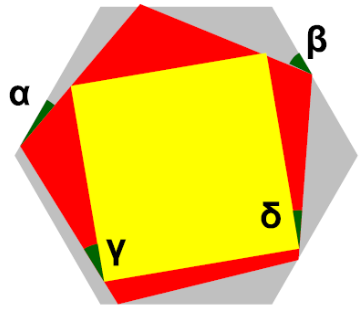
O de forma alternativa:

$$\text{Si A no es múltiplo de 3} \Rightarrow \begin{cases} A = 1(3) \\ A = 2(3) \end{cases}, \quad \text{Si B no es múltiplo de 3} \Rightarrow \begin{cases} B = 1(3) \\ B = 2(3) \end{cases}$$

Y la tabla de multiplicar nos proporciona:

B\A	1(3)	2(3)
1(3)	1(3)	2(3)
2(3)	2(3)	1(3)

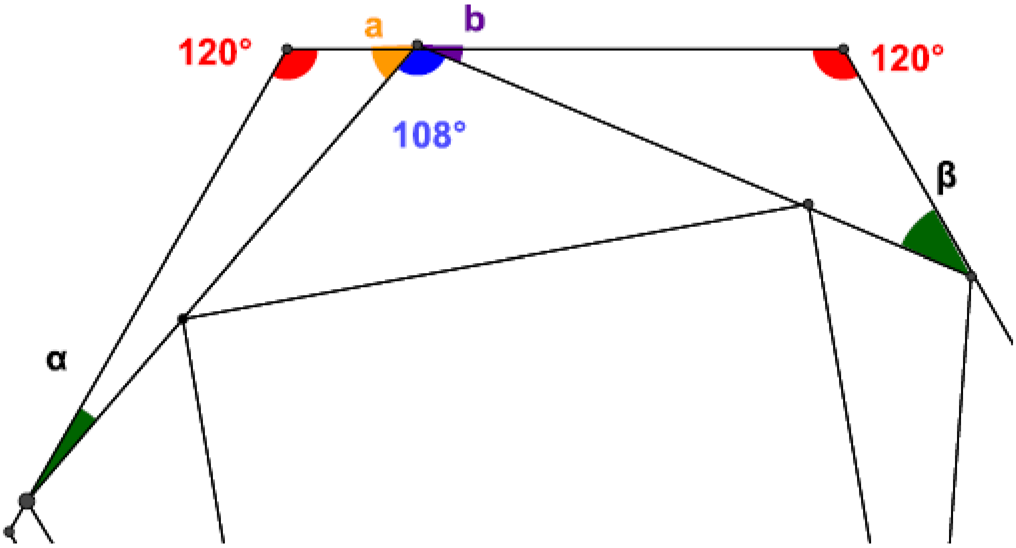
Es decir, AB = 1(3) o AB = 2(3). Por tanto, AB no es múltiplo de 3.



Abril 13-14: Se tiene un cuadrado cuyos vértices tocan los lados de un pentágono regular. A su vez, los vértices del pentágono están tocando los lados de un hexágono regular. Calcular:

(1) $\alpha + \beta$
(2) $\gamma + \delta$

Solución: Para la primera pregunta tendremos:



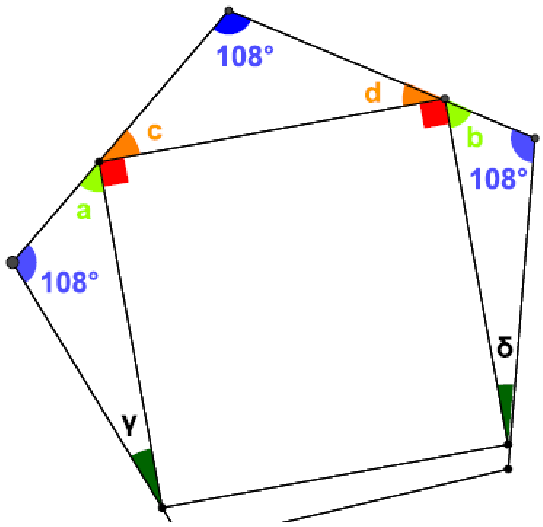
El ángulo entre dos aristas consecutivas de un hexágono es (ángulo central: 360/6 = 60° $\Rightarrow$ 180° – 60° =) 120°. El ángulo entre dos aristas consecutivas de un pentágono es (ángulo central: 360/5 = 72° $\Rightarrow$ 180° – 72° =) 108°.

En el triángulo de la izquierda: $\alpha + 120° + a = 180° \Rightarrow a = 180° - (120° + \alpha)$

En el triángulo de la derecha: $\beta + 120° + b = 180° \Rightarrow b = 180° - (120° + \beta)$.

Por último: $180° = a + b + 108° \Rightarrow 180° - (120° + \alpha) + 180° - (120° + \beta) + 108° = 180° \Rightarrow \alpha + \beta = 48°$

Para la segunda pregunta, tendremos:



El ángulo entre dos aristas consecutivas de un pentágono es (ángulo central: 360/5 = 72° $\Rightarrow$ 180° – 72° =) 108°.
En el triángulo de la izquierda: $a = 180° - 108° - \gamma$
En el triángulo de la derecha: $b = 180° - 108° - \delta$
Además:

$$c = 180° - 90° - a = 18° + \gamma$$
$$d = 180° - 90° - b = 18° + \delta$$

Y, por último, en el triángulo central:

$$108° + c + d = 180° = 108° + 18° + \gamma + 18° + \delta.$$

De donde:

$$\gamma + \delta = 36°$$

<u>Abril 15:</u> Probar que un natural tiene un número impar de divisores $\Leftrightarrow$ es un cuadrado perfecto.

<u>Solución:</u> Recordemos que

$$\text{si } N = \prod_{i=1}^{n} p_i^{\alpha_i} \text{ entonces el número de divisores de N es } \prod_{i=1}^{n}(\alpha_i + 1)$$

$\Leftarrow$ Si N es un cuadrado perfecto, cada primo de su descomposición factorial como producto de números primos tiene exponente par. Por tanto cada factor (α_i + 1) es impar, y entonces:

$$\prod_{i=1}^{n}(\alpha_i + 1)$$

es producto de impares y por tanto impar.

$\Rightarrow$ Si un número tiene un número impar de divisores, entonces

$$\prod_{i=1}^{n}(\alpha_i + 1) \text{ es impar } \Rightarrow (\alpha_i + 1) \text{ es impar } \forall i \in \{1, 2, \cdots, n\} \Rightarrow \alpha_i \text{ es par } \forall i \in \{1, 2, \cdots, n\}$$

(pues si α_j fuese impar, entonces α_j + 1 sería par y el producto sería par). De lo que deducimos:

$$N = \prod_{i=1}^{n} p_i^{\alpha_i} = \left(\prod_{i=1}^{n} p_i^{\alpha_i/2}\right)^2 = (n)^2$$

Es decir, N es un cuadrado perfecto.

<u>Abril 16:</u> Un equipo de carreras dispone de un coche con el que recorrer 3500 km para entrenamientos de la temporada. Cada día pueden recorrer 300 o 500 o 700 km, ¿pueden realizar el plan de entrenamiento en un número par de días?

<u>Solución:</u> Sean x las sesiones de 300 km, y las sesiones de 500 km y k – (x + y) las sesiones de 700 km. Debe de cumplirse:

$$300x + 500y + 700 \cdot (k - x - y) = 3500; \quad 3x + 5y + 7 \cdot (k - x - y) = 35; \quad 7k - 35 = 4x + 2y$$

El miembro de la derecha es un número par, mientras que el miembro de la izquierda es, si k es par, (par – impar =) impar. Luego no se puede realizar el plan de entrenamiento en un número par de días.

<u>Abril 17:</u> Hallar los naturales a tales que **a + 2a + 3a + ··· + 9a** resulta ser un natural con todas sus cifras iguales.

<u>Solución:</u>

(1) **a + 2a + 3a + ··· + 9a = 45·a = k·11** $\Rightarrow 5 \cdot 3^2 \cdot a = k \cdot 11 \Rightarrow$ k a de contener a los factores 5 y 3^2, en contra de que sea un dígito.
(2) **a + 2a + 3a + ··· + 9a = 45·a = k·111** $\Rightarrow 5 \cdot 3^2 \cdot a = k \cdot 3 \cdot 37 \Rightarrow 5 \cdot 3 \cdot a = k \cdot 37 \Rightarrow$ k a de contener a los factores 5 y 3, en contra de que sea un dígito.
(3) **a + 2a + 3a + ··· + 9a = 45·a = k·1111** $\Rightarrow 5 \cdot 3^2 \cdot a = k \cdot 11 \cdot 101 \Rightarrow$ k a de contener a los factores 5 y 3^2, en contra de que sea un dígito.
(4) **a + 2a + 3a + ··· + 9a = 45·a = k·11111** $\Rightarrow 5 \cdot 3^2 \cdot a = k \cdot 41 \cdot 271 \Rightarrow$ k a de contener a los factores 5 y 3^2, en contra de que sea un dígito
(5) **a + 2a + 3a + ··· + 9a = 45·a = k·111111** $\Rightarrow 5 \cdot 3^2 \cdot a = k \cdot 3 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 37 \Rightarrow 3 \cdot 5 \cdot a = k \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 37 \Rightarrow$ k a de contener a los factores 5 y 3, en contra de que sea un dígito.

(6) **a + 2a + 3a + ⋯ + 9a = 45·a = k·1111111** $\Rightarrow 5\cdot 3^2\cdot a = k\cdot 239\cdot 4649 \Rightarrow$ k a de contener a los factores 5 y 3^2, en contra de que sea un dígito.

(7) **a + 2a + 3a + ⋯ + 9a = 45·a = k·11111111** $\Rightarrow 5\cdot 3^2\cdot a = k\cdot 11\cdot 73\cdot 101\cdot 137 \Rightarrow$ k a de contener a los factores 5 y 3^2, en contra de que sea un dígito.

(8) **a + 2a + 3a + ⋯ + 9a = 45·a = k·111111111** $\Rightarrow 5\cdot 3^2\cdot a = k\cdot 3^2\cdot 37\cdot 333667 \Rightarrow 5\cdot a = k\cdot 37\cdot 333667$

La igualdad se cumple si k = 5 y a = 37·333667 = 12345679.

Una vez hemos visto cómo funciona la exigencia para los casos más sencillos, volvemos a la ecuación originada.

$$45\cdot a = k\cdot \overbrace{1111\cdots 11}^{m} \;\Leftrightarrow\; 3^2\cdot 5\cdot a = k\cdot \overbrace{111\cdots\cdot 11}^{m}$$

Como k tiene una única cifra, k solo puede tomar los valores 5, 3 o 9.

Si k = 3 o k = 9, tendremos:

$$3\cdot 5\cdot a = \overbrace{111\cdots 11}^{m} \quad\Rightarrow\quad \overbrace{111\cdots\cdot 11}^{m} = \dot{\hat{5}} \;\text{ Absurdo}$$
$$5\cdot a = \overbrace{111\cdots 11}^{m} \quad\Rightarrow\quad \overbrace{111\cdots\cdot 11}^{m} = \dot{\hat{5}} \;\text{ Absurdo}$$

Si k = 5, entonces:

$$9\cdot a = \overbrace{111\cdots 11}^{m} \quad\Rightarrow\quad \overbrace{111\cdots\cdot 11}^{m} = \dot{\hat{9}} \;\Rightarrow \text{el número de unos es } m = 9n\ (9, 18, 27, 36, \dots\dots)$$

Ya tenemos una solución hallada para 9 unos: a_1 = 12345679. Para 18 unos tendremos:

$$5\cdot \overbrace{111\cdots 11}^{18} = 5\cdot\left(\overbrace{111\cdots 11}^{9}\cdot 10^9 + \overbrace{111\cdots 11}^{9}\right) = 45\cdot a_1\cdot 10^9 + 45\cdot a_1 = 45\cdot(a_1\cdot 10^9 + a_1)$$
$$= 45\cdot a_2$$

Es decir: a_2 = 12345679012345679.

Por inducción, las soluciones son:

$$a_{n+1} = a_n + 10^{9n}\cdot a_1$$
$$a_1 = 12345679$$

(A la solución para 9n unos se le antecede un cero y todas las cifras ordenadas de la primera solución). Para n = 1 y n = 2 ya lo tenemos demostrado. Supongámoslo cierto para n y veámoslo para n + 1

$$45(a_n + 10^{9n}\cdot a_1) = 45a_n + 45a_1\cdot 10^{9n} = 5\cdot \overbrace{111\cdots 11}^{9n} + 5\cdot \overbrace{111\cdots 11}^{9}\cdot 10^{9n}$$
$$= 5\cdot\left(\overbrace{111\cdots 11}^{9n} + \overbrace{111\cdots 11}^{9}\cdot 10^{9n}\right) = 5\cdot \overbrace{111\cdots 11}^{9(n+1)}$$

Abril 19: Halla el menor natural tal que el número es igual a 5 veces el producto de sus dígitos.

Solución: Obviamente los números buscados no pueden tener una única cifra. Supongamos que los números tiene dos cifras: N = 10a + b. La exigencia del enunciado se transforma en

$$10a + b = 5ab \;\Rightarrow\; b = 5a(b-2) \quad (*)$$

Como 5a(b – 2) es múltiplo de 5, b debe de serlo. Por tanto, b = 0 o b = 5. Entonces

$$\text{si } b = 0 \;\Rightarrow\; 10a = 10a + b = 5ab = 0 \;\Rightarrow\; a = 0 \;\Rightarrow\; 10a + b = 0 \notin \mathbb{N}$$
$$\text{si } b = 5 \text{ en } (*) \text{ tenemos: } 5 = 5a(5-2) \;\Rightarrow\; 5 = 3\cdot 5a \;\Rightarrow 1 = 3a \text{ ¡absurdo!}$$

Luego tampoco hay un número con dos cifras que cumpla lo exigido.

Veamos qué ocurre si el número tiene tres cifras: N = 100a + 10b + c. Tendremos:

$$\mathrm{N = 100a + 10b + c = 5 \cdot a \cdot b \cdot c \;\; \Rightarrow \;\; 100a + c = 5 \cdot a \cdot b \cdot c - 10 \cdot b = 5b(a \cdot c - 2)}$$

Como 5b(ac – 2) es múltiplo de 5, 100a + c debe de serlo. Por tanto, c = 0 o c = 5.

Si c = 0, entonces:

$$\mathrm{N = 100a + 10b + 0 = 5 \cdot a \cdot b \cdot 0 = 0} \;\notin \mathbb{N}$$

Si c = 5, entonces:

$$\mathrm{100a + 5 = 5b(5a - 2) \;\; \Rightarrow \;\; 20a + 1 = b(5a - 2) \xRightarrow{5a-2\neq 0} b = \frac{20a + 1}{5a - 2} = 4 + \frac{9}{5a - 2}}$$

Luego 5a – 2 es un divisor de 9, es decir 5a – 2 debe ser ±1, ±3 o ±9.

$$\mathrm{si}\ 5a - 2 = \pm 1 \;\; \Rightarrow \;\; a \notin \mathbb{N}$$
$$\mathrm{si}\ 5a - 2 = \pm 9 \;\; \Rightarrow \;\; a \notin \mathbb{N}$$
$$\mathrm{si}\ 5a - 2 = -3 \;\; \Rightarrow \;\; a \notin \mathbb{N}$$
$$\mathrm{si}\ 5a - 2 = 3 \;\; \Rightarrow \;\; a = 1, b = 4 + \frac{9}{3} = 7$$

Y como, c = 5, tenemos que un número que cumple lo exigido en el enunciado es el 175.

Abril 20: ¿Cuál es el mayor entero m tal que m siempre divide a:

$$\mathbf{n^2 \cdot (n^2 - 1) \cdot (n^2 - 4)}$$

para cualquier entero n > 2?

Solución: Investiguemos valores posibles para m, viendo los divisores de $n^2 \cdot (n^2 - 1) \cdot (n^2 - 4) = (n - 2) \cdot (n - 1) \cdot n^2 \cdot (n + 1) \cdot (n + 2)$ para los primeros valores de n

	n – 2	n – 1	n^2	n + 1	n+ 2		
n = 3	1	2	3^2	4	5	→	$1 \cdot 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5$
n = 4	2	3	2^4	5	6	→	$2^4 \cdot 3^2 \cdot 5$
n = 5	3	4	5^2	6	7	→	$2^3 \cdot 3^2 \cdot 5^2 \cdot 7$
n = 6	4	5	6^2	7	8	→	$2^7 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7$
n = 7	5	6	7^2	8	9	→	$2^4 \cdot 3^3 \cdot 5 \cdot 7^2$
:	:	:	:	:	:	:	:

Parece que $m = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5$ (un valor más grande de m haría que m no dividiese a $n^2 \cdot (n^2 - 1) \cdot (n^2 - 4)$ por ejemplo para n = 3). Faltará demostrar que m divide a $n^2 \cdot (n^2 - 1) \cdot (n^2 - 4)$ para todos los valores de n posteriores a n = 7. Tendremos:

$$n^2 \cdot (n^2 - 1) \cdot (n^2 - 4) = (n - 2) \cdot (n - 1) \cdot n^2 \cdot (n + 1) \cdot (n + 2) \quad (*)$$

Como entre dos naturales consecutivos hay uno que es múltiplo de dos, en la expresión (*) hay al menos dos múltiplos de 2, como además esos múltiplos de dos son consecutivos, uno es múltiplo de cuatro. Por tanto, en la expresión (*) hay, al menos, el factor 2^3. Como entre tres naturales consecutivos hay uno que es múltiplo de tres, en la expresión (*) hay, al menos, dos múltiplos de tres:

$$\text{si } n-2=\dot{3} \Rightarrow n+1=\dot{3} \Rightarrow \text{en } (*) \text{ hay dos factores } 3$$
$$\text{si } n-1=\dot{3} \Rightarrow n+2=\dot{3} \Rightarrow \text{en } (*) \text{ hay dos factores } 3$$
$$\text{si } n=\dot{3} \Rightarrow \text{en } (*) \text{ hay dos factores } 3$$

Luego la expresión (*) es divisible por 3^2. Como entre cinco naturales consecutivos hay, al menos, uno que es múltiplo de cinco, tendremos que en la expresión (*) hay, al menos, un factor cinco.

En definitiva, en la expresión (*) hay, al menos, tres factores 2, dos factores 3 y un factor 5. Luego la expresión (*) es divisible por ($2^3 \cdot 3^2 \cdot 5$ =) 360, cualquiera que sea n > 2.

Abril 21: ¿Cuál es el número más grande (pequeño) de ocho dígitos diferentes que sea divisible por 11?

Solución: El mayor número de ocho cifras diferentes es: 98765432. Como 2 – 3 + 4 – 5 + 6 – 7 + 8 – 9 = – 4, 98765432 –(– 4) = 98765436 es múltiplo de 11. Y, restando sucesivamente 11 a este número (hasta lograr un número con todas sus cifras diferentes) conseguimos múltiplos de 11:

$$98765436 \underset{-11}{\longrightarrow} 98765425 \underset{-11}{\longrightarrow} 98765414 \underset{-11}{\longrightarrow} 98765403$$

El mayor número de ocho cifras distintas múltiplo de 11 es 98765403.

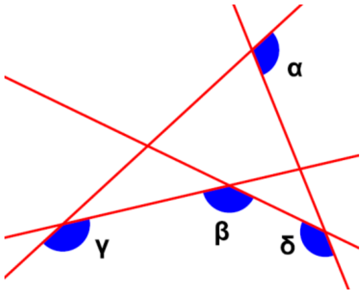
Para el menor natural de ocho cifras distintas múltiplo de 11 tenemos:

El menor número de ocho cifras diferentes es: 10234567. Como 7 – 6 + 5 – 4 + 3 – 2 + 0 – 1 = 2, 10234567 – 2 = 10234565 es múltiplo de 11. Y, sumando sucesivamente 11 a este número (hasta lograr un número con todas las cifras diferentes) conseguimos múltiplos de 11:

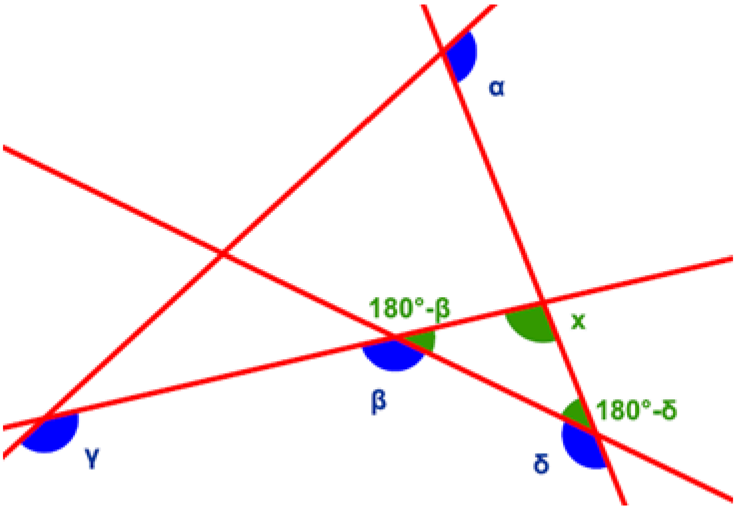
$$10234565 \underset{+11}{\longrightarrow} 10234576$$

El menor número de ocho cifras distintas múltiplo de 11 es 10234576

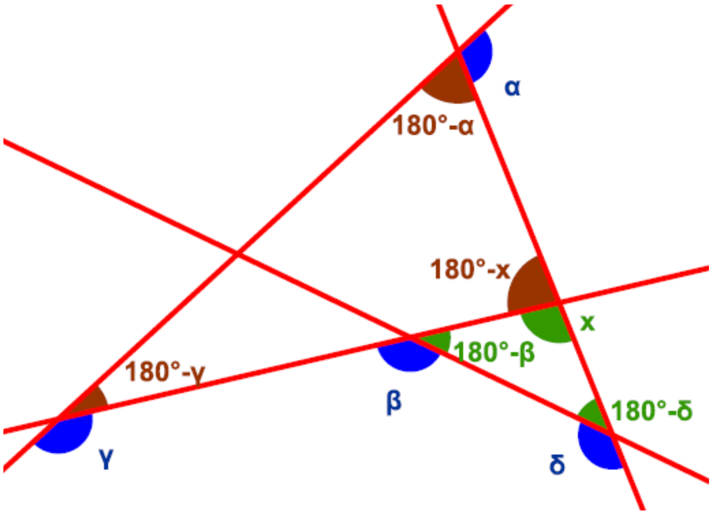
Abril 22: Calcular: $\alpha + \beta + \gamma + \delta$



Solución:



$$x + 180° - \beta + 180° - \delta = 180°$$
$$\Rightarrow \quad 180° + x = \beta + \delta \ (*)$$



$$180° - \alpha + 180° - x + 180° - \gamma = 180°$$
$$360° = \alpha + \gamma + x \qquad (**)$$

Sumando (*) y (**), tenemos:

$$180° + x + 360° = \beta + \delta + \alpha + \gamma + x \quad \Rightarrow \quad 540° = \beta + \delta + \alpha + \gamma$$

Abril 23-24: En una investigación demoscópica, un grupo humano se clasifica de acuerdo con ciertos criterios: sexo (M, F) edad (joven, madura, jubilada) tendencia política (extrema izquierda, izquierda, derecha, extrema derecha) y opinión de un líder político (0-2, 3-4, 5-6, 7-8, 9-10). En cada clase generada hay 10 personas, es decir, por ejemplo, hay 10 mujeres, jubiladas, de derechas que clasifican al líder político con 7-8 y así sucesivamente. ¿Cuántas personas hay en el grupo? Si una persona es mujer, joven, de izquierdas y con puntuación 3-4, ¿cuántas personas hay en el grupo que difieran exactamente en dos criterios? Y ¿cuántas que difieran en al menos dos criterios?

Solución: Para la primera pregunta, veamos cuántos criterios existen

sexo	edad	tendencia política	opinión líder	total
2	3	4	5	(2·3·4·5 =) 120

Si en cada uno de ellos hay 10 personas, el número total de personas es (120·10 =) 1200.

Para la segunda pregunta tendremos:

sexo	edad	tendencia	opinión	número personas	total
mujer	joven	izquierdas	3-4	1	1
mujer	joven	3	4	10	(3·4·10 =) 120
mujer	2	izquierdas	4	10	(2·4·10 =) 80
mujer	2	3	3-4	10	(2·3·10 =) 60
1	joven	izquierdas	4	10	(1·4·10 =) 40
1	joven	3	3-4	10	(1·3·10 =) 30
1	2	izquierdas	3-4	10	(1·2·10 =) 20

Por ejemplo, la tercera fila sería el total de personas que coinciden con la dada en su sexo (mujer) y edad (joven) y difieren de ella en la tendencia y la opinión y así sucesivamente.

En total hay (120 + 80 + 60 + 40 + 30 + 20 =) 350 personas que difieren de la considerada exactamente en dos criterios.

Para la tercera pregunta, calculemos cuántas personas difieren con la considerada únicamente en un criterio

sexo	edad	tendencia	opinión	número personas	total
mujer	joven	izquierdas	3-4	1	1
mujer	joven	izquierdas	4	10	(4·10 =) 40
mujer	joven	3	3-4	10	(3·10 =) 30
mujer	2	izquierdas	3-4	10	(2·10 =) 20
1	joven	izquierdas	3-4	10	(1·10 =) 10

Hay (40 + 30 + 20 + 10 =) 100 personas que difieren de la considerada en exactamente un criterio.

Por último: El número de personas que difieren de la considerada en al menos dos criterios es igual al número de personas que difieren de la considerada menos el número de personas que difieren de la considerada en un único criterio. Es decir, hay ((1199 – 9) – 100 = 1190 – 100 =) 1090 personas que difieren de la considerada en al menos dos criterios.

Abril 26-27: Consideremos las sucesiones de enteros positivos en las que, a partir del tercer término, el término n-ésimo es la media aritmética de los n-1 términos anteriores. ¿Cuántas de estas sucesiones cumplen que $a_{100} = 1$?

Solución: Sea $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una de esas sucesiones. Entonces tenemos:

$$a_1$$

$$a_2$$

$$a_3 = \frac{a_1 + a_2}{2}$$

$$a_4 = \frac{a_1 + a_2 + a_3}{3} = \frac{a_1 + a_2 + \frac{a_1 + a_2}{2}}{3} = \frac{a_1 + a_2}{2}$$

$$a_5 = \frac{a_1 + a_2 + a_3 + a_4}{4} = \frac{a_1 + a_2 + \frac{a_1 + a_2}{2} + \frac{a_1 + a_2}{2}}{4} = \frac{a_1 + a_2}{2}$$

$$a_6 = \frac{a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5}{5} = \frac{a_1 + a_2 + \frac{a_1 + a_2}{2} + \frac{a_1 + a_2}{2} + \frac{a_1 + a_2}{2}}{5} = \frac{a_1 + a_2}{2}$$

Parece ser que las sucesiones de las que hablamos cumplen:

$$a_n = \frac{a_1 + a_2}{2} \quad \forall n \geq 3$$

Demostrémoslo por inducción completa. Para n = 3 ya lo tenemos probado. Supongamos que todos los términos hasta el n – 1 y posteriores al segundo término coinciden con la semisuma de los dos primeros y veamos que también lo cumple el término n-ésimo.

$$a_n = \frac{a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + \cdots + a_{n-2} + a_{n-1}}{n-1} = \left\{ \begin{array}{c} a_3 = \dfrac{a_1 + a_2}{2} \\ a_4 = \dfrac{a_1 + a_2}{2} \\ \vdots \\ a_{n-2} = \dfrac{a_1 + a_2}{2} \\ a_{n-1} = \dfrac{a_1 + a_2}{2} \end{array} \right\}$$

$$= \frac{(a_1 + a_2) + \overbrace{\frac{a_1 + a_2}{2} + \frac{a_1 + a_2}{2} + \cdots + \frac{a_1 + a_2}{2}}^{n-3}}{n-1} = \frac{\frac{n-1}{2}(a_1 + a_2)}{n-1} = \frac{a_1 + a_2}{2}$$

Luego, las sucesiones de las que hablamos son aquellas en las que a_1 y a_2 son naturales cualesquiera y los términos posteriores son la media aritmética de los dos iniciales, Como $a_{100} = 1$

$$a_{100} = \frac{a_1 + a_2}{2} = 1 \quad (a_1, a_2 \in \mathbb{N} \Rightarrow)\ a_1 = a_2 = 1$$

Luego, la única sucesión de las consideradas que cumple $a_{100} = 1$ es la sucesión idénticamente igual a 1

Abril 28: Si $\mathbf{a^2 + b^2 = 3 \cdot a \cdot b}$ calcular

$$\left(\frac{\mathbf{a+b}}{\mathbf{a-b}}\right)^{\mathbf{6}}$$

Solución:

$$\left(\frac{a+b}{a-b}\right)^6 = \left(\left(\frac{a+b}{a-b}\right)^2\right)^3 = \left(\frac{(a+b)^2}{(a-b)^2}\right)^3 = \left(\frac{a^2 + b^2 + 2ab}{a^2 + b^2 - 2ab}\right)^3 = \left(\frac{3ab + 2ab}{3ab - 2ab}\right)^3 = \left(\frac{5ab}{ab}\right)^3 = 5^3 = 125$$

Abril 29: ¿Es cierto que, si un natural es divisible por 28 y es divisible por 8, es también divisible por (28·8 =) 224?

Solución 1: La contestación a la pregunta ofrecida es no: Si N es divisible por 28 (= $7 \cdot 2^2$) lo que se puede afirmar es que en la descomposición factorial de N aparece el factor 7 y el factor 2^2. Si además N es divisible por 8 (= 2^3) en la descomposición factorial de N aparece el factor 2^3. Luego en la descomposición factorial de N aparece el factor 7 y el factor 2^3 y no necesariamente debe de aparecer el factor 7 y el factor 2^5 ($2^5 \cdot 7$ = 28·8 =224)

Solución 2: Con un contraejemplo suficiente.

$$\left.\begin{array}{l} 56 \text{ es divisible por } 28 \\ 56 \text{ es divisible por } 8 \end{array}\right\} \ 56 \text{ no es divisible por } 224\ (= 28 \cdot 8)$$

Abril 30: Resolver la ecuación:

1716·6!·7! = n!

Solución: Tenemos

$$1716 = 2^2 \cdot 3 \cdot 11 \cdot 13 = 11 \cdot 12 \cdot 13$$

$$\left.\begin{array}{l} 6! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 = 8 \cdot 9 \cdot 10 \\ 7! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \end{array}\right\} \Rightarrow \ 6! \cdot 7! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 10 = 10!$$

$$1716 \cdot 6! \cdot 7! = 10! \cdot 11 \cdot 12 \cdot 13 = 13!$$

Luego n = 13