SOLUCIONES MAYO 2021

ACTIVIDADES PARA 1ESO Y 2ESO. 12-14 AÑOS. AUTOR: COLECTIVO "CONCURSO DE PRIMAVERA"

(https://www.concursoprimavera.es/#concurso)

Mayo 1: En cuántas partes queda dividido un círculo si dibujamos en él 2021 diámetros diferentes

Solución: Cada diámetro divide al círculo en dos partes. Al añadir un nuevo diámetro, cada uno de los dos radios que lo componen divide a una región en dos. Por tanto, 2021 diámetros dejarán dividido el círculo en ($2 \cdot 2021 =$) 2042 partes.

Mayo 3: Como siempre letras diferentes (iguales) representan dígitos diferentes (iguales)

$$\begin{array}{cccc} & A & B & C \\ & A & B & C \\ + & A & B & C \\ \hline & B & B & B \end{array}$$

Solución: Lo exigido es equivalente a:

$$\begin{array}{ccc} A & B & C \\ & \times & 3 \\ \hline B & B & B \end{array}$$

Por prueba y error sobre los valores posibles de $C \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$. Tenemos que $C = 0$ no es posible, (pues si $C = 0$ entonces $B = 0$ en contra de que B y C tengan valores diferentes). Si suponemos $C = 1$, entonces deberíamos tener

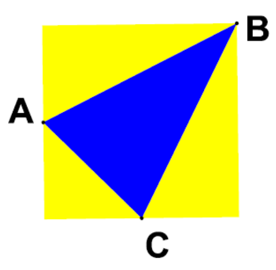
$$\begin{array}{ccc} A & 3 & 1 \\ & \times & 3 \\ \hline 3 & 3 & 3 \end{array}$$

que implica que la multiplicación está mal hecha pues $3 \times 3 = 9$. Siguiendo de esta manera llegamos a la posibilidad $C = 8$ en cuyo caso $B = 4$ y todo cuadra (con $A = 1$)

$$\begin{array}{ccc} 1 & 4 & 8 \\ & \times & 3 \\ \hline 4 & 4 & 4 \end{array}$$

Como el último valor posible para C (9) también falla tenemos que la anterior es la única solución al problema.

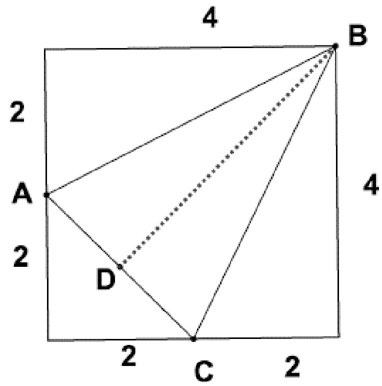
Mayo 4: Se tiene un cuadrado de lado 4m. Si A y C son los puntos medios, hallar el área del triángulo ΔABC



Solución: Tendremos

$$\text{base} = \text{AC} = \sqrt{2^2 + 2^2} = 2\sqrt{2}$$

$$\text{AB} = \text{CB} = \sqrt{4^2 + 2^2} = 2\sqrt{5}$$



ΔABC es isósceles (AB = CD) y por tanto, altura = BD siendo D el punto medio de AC.

$$\text{BD} = \sqrt{\text{BC}^2 - \text{DC}^2} = \sqrt{\left(2\sqrt{5}\right)^2 - \left(\sqrt{2}\right)^2} = 3\sqrt{2}$$

Por último:

$$\text{A}_{\Delta\text{ABC}} = \frac{\text{AC} \cdot \text{DB}}{2} = \frac{2\sqrt{2} \cdot 3\sqrt{2}}{2} = 6\ \text{m}^2$$

Mayo 5: Si sumamos las edades de tres hermanos por parejas obtenemos 26, 34 y 38 años. Calcular la edad del mediano.

Solución: Sean x, y y z las edades de los tres hermanos. Del enunciado, tenemos

$$\begin{aligned} x + y &= 26 \quad (1) \\ x + z &= 34 \quad (2) \\ y + z &= 38 \quad (3) \end{aligned}$$

En (1) participan los dos hermanos más jóvenes, mientras que el (3) participan los dos hermanos más mayores. Por tanto, en (2) el hermano que no participa es el mediano.

Sumando las tres ecuaciones tenemos:

$$2(x + y + z) = 98; \quad x + y + z = 49 \quad (4)$$

Por último, (4) – (1) lleva a y =15. La edad del mediano es 15 años.

Mayo 6-7: Dani sube la escalera de su casa dando zancadas de dos en dos y las baja a zancadas de tres en tres. Si para subir da 7 zancadas más que para bajar, ¿cuántos escalones tiene la escalera de su casa?

Solución: Sea x el número de zancadas que da Dani al subir. Entonces x – 3 es el número de zancadas para bajar. Como las zancadas para subir son de dos escalones y las zancadas de bajar son de tres escalones:

$$2x = 3(x - 7); \quad 2x = 3x - 21; \quad 21 = x$$

Luego el número de escalones es de (2·21 =) 42 escalones.

Mayo 8: Cinco pelotas pesan lo mismo que una peonza y un yoyó. Una peonza pesa lo mismo que dos pelotas y un yoyó. ¿Cuántas pelotas pesan lo mismo que dos peonzas?

Solución: Si representamos por p el peso de una pelota, por π el peso de una peonza y por y el peso de un yoyó, la información del enunciado la podemos representar por:

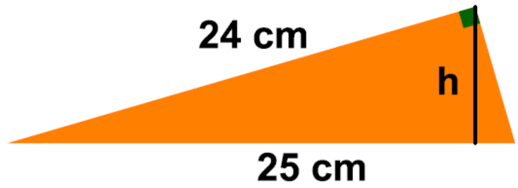
$$\begin{aligned} 5p &= 1\pi + 1y \\ 1\pi &= 2p + 1y \end{aligned}$$

Invirtiendo la segunda y sumando, tendremos:

$$\left.\begin{aligned} 5p &= 1\pi + 1y \\ 2p + 1y &= 1\pi \end{aligned}\right\} \Rightarrow \ 7p + 1y = 2\pi + 1y \ \Rightarrow \ 7p = 2\pi$$

Es decir, dos peonzas pesan lo mismo que siete pelotas.

Mayo 10-11: La hipotenusa de un triángulo rectángulo mide 25 cm y un cateto suyo mide 24 cm, ¿cuánto mide la altura que cae sobre la hipotenusa?



Solución: El otro cateto del triángulo medirá:

$$x = \sqrt{25^2 - 24^2} = 7$$

Y ahora, al calcular su área:

$$A = \begin{cases} = \dfrac{24 \cdot 7}{2} \\ = \dfrac{25 \cdot h}{2} \end{cases}$$

Por tanto:

$$\frac{24 \cdot 7}{2} = \frac{25 \cdot h}{2} \ \Rightarrow \ 24 \cdot 7 = 25 \cdot h \ \Rightarrow \ \frac{24 \cdot 7}{25} = h = \frac{168}{25} \text{ cm} \approx 6{,}72 \text{ cm}$$

Mayo 12: Aitana riega las plantas de su terraza de la siguiente manera: cada día riega las 12 macetas o los 8 macetones. Si al final de la semana ha regado 76 recipientes ¿cuántos días regó las 12 macetas?

Solución: Sea x el número de días que Aitana regó las 12 macetas. Entonces 7 – x, son los días que regó los 8 macetones. Además, se debe cumplir:

$$12x + 8(7 - x) = 76$$

Resolviendo la ecuación, tenemos:

$$12x + 56 - 8x = 76; \quad 4x = 20; \quad x = 5$$

Luego, Aitana regó esa semana las 12 macetas un total de 5 días.

Mayo 13: El número 1a69b (donde a y b son dígitos) es múltiplo de 2, de 9 y de 11. Calcular a y b.

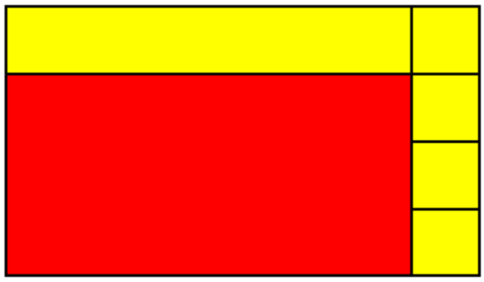
Solución: Recordando los criterios de divisibilidad, tendremos:

$$\begin{aligned} 1a69b = \dot{\hat{2}} \ &\Leftrightarrow \ b \in \{0, 2, 4, 6, 8\} \\ 1a69 = \dot{\hat{9}} \ &\Leftrightarrow \ 16 + a + b = \dot{\hat{9}} \\ 1a69 = \widehat{11} \ &\Leftrightarrow \ 2 + a - b = \dot{\widehat{11}} \end{aligned}$$

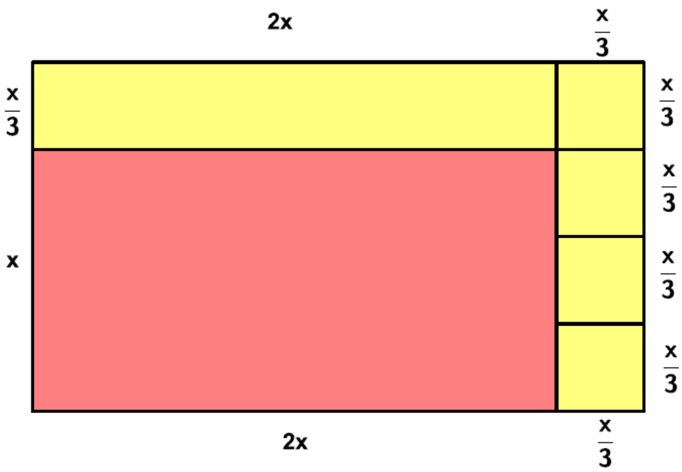
Y ahora, calculando a para cada uno de los casos posibles de b y comprobando la condición de divisibilidad por 11

b	$16+a+b=\dot{\hat{9}}$	¿ $2+a-b=\dot{\widehat{11}}$?	
0	a = 2	no	
2	a = 0	si	10692
	a = 9	no	
4	a = 7	no	
6	a = 5	no	
8	a = 3	no	

<u>Mayo 14-15:</u> A un rectángulo rojo de 54 cm de perímetro y con base doble que su altura, se le han añadido cuatro cuadrados y un rectángulo amarillos. ¿Cuál es el área del rectángulo formado por las seis figuras?



<u>Solución:</u> De la figura adjunta tendremos:



Respecto del rectángulo rojo:

$$6x = 54 \;\Rightarrow\; x = 9 \text{ cm}$$

Respecto del nuevo rectángulo:

$$\text{base} = 2x + \frac{x}{3} = \frac{7x}{3}$$

$$\text{altura} = x + \frac{x}{3} = \frac{4x}{3}$$

Por último:

$$A = \frac{7x}{3}\cdot\frac{4x}{3} = \frac{28\cdot x^2}{9} = \frac{28\cdot 9^2}{9} = 252 \text{ cm}^2$$

<u>Mayo 17:</u> Las longitudes de los lados de un rectángulo son naturales, la base mide 7 cm más que la altura y la suma de las longitudes de tres lados es 70 cm. Hallar el perímetro.

<u>Solución:</u> Supongamos que el rectángulo tiene base b y altura h. Del enunciado, tenemos: b = h +7. Puesto que la suma de las longitudes de tres lados es 70, tendremos:

$$\begin{cases} 2h+b = 2h+h+7 = 70 \;\Rightarrow\; h = 21 \;\Rightarrow\; b = 21+7 = 28 \\ h+2b = h+2(h+7) = 70 \;\Rightarrow\; 3h = 56 \;\Rightarrow\; h = \dfrac{56}{3} \notin \mathbb{N} \end{cases}$$

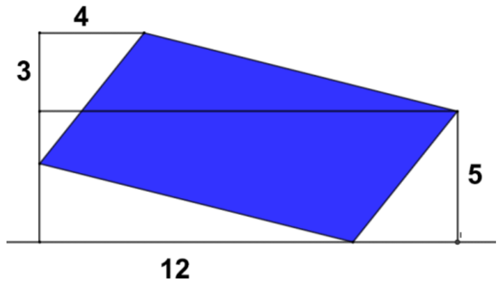
Luego, únicamente es posible h = 21 y b = 28, en cuyo caso el perímetro vale (2·(21 + 28) =) 98 cm.

<u>Mayo 18-19:</u> Aitana observa en el laboratorio como se reproducen unas bacterias. El primer día había 1000, el segundo el doble que el primero, el tercero el triple que el segundo, el cuarto había cuatro veces lo que había el tercero. ¿Cuántas bacterias dirías que habrá el décimo día?

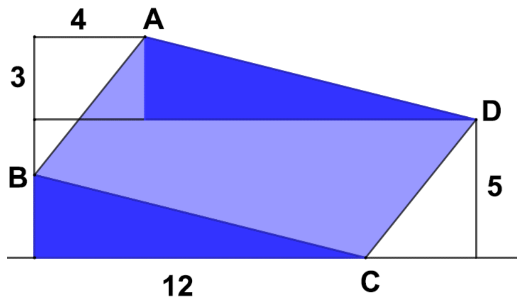
Solución: Si b_i indica el número de bacterias del día i, tendremos:

$$\begin{aligned} b_{10} &= 10\cdot b_9 = 10\cdot 9\cdot b_8 = 10\cdot 9\cdot 8\cdot b_7 = 10\cdot 9\cdot 8\cdot 7\cdot b_6 = 10\cdot 9\cdot 8\cdot 7\cdot 6\cdot b_5 \\ &= 10\cdot 9\cdot 8\cdot 7\cdot 6\cdot 5\cdot b_4 = 10\cdot 9\cdot 8\cdot 7\cdot 6\cdot 5\cdot 4\cdot b_3 = 10\cdot 9\cdot 8\cdot 7\cdot 6\cdot 5\cdot 4\cdot 3\cdot b_2 \\ &= 10\cdot 9\cdot 8\cdot 7\cdot 6\cdot 5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot b_1 = 10\cdot 9\cdot 8\cdot 7\cdot 6\cdot 5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1000 = 3{,}628.800 \end{aligned}$$

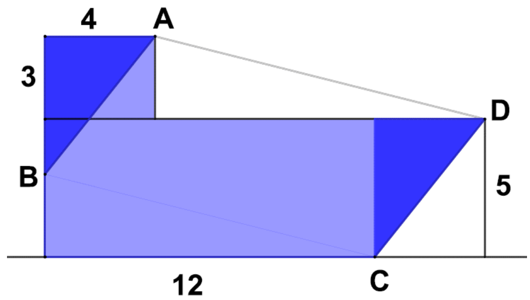
Mayo 20: Hallar el área del paralelogramo azul



Solución: Deslizamos el triángulo del paralelogramo azul resaltado por las aristas AB y DC

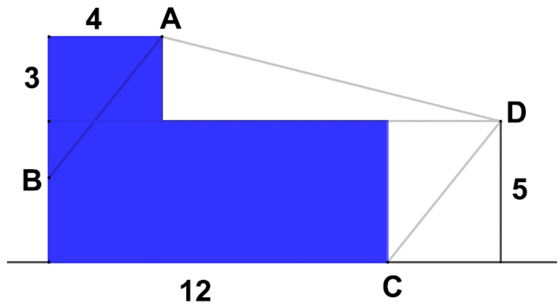


De la misma forma trasladamos el triángulo del paralelogramo azul resaltado por las aristas DA y CB

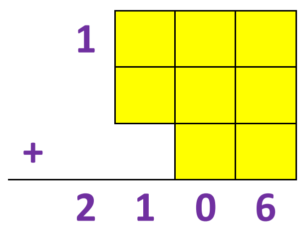


Nos queda por calcular el área de la zona de color azul. Pero este cálculo es sencillo: Se trata de dos rectángulos, uno de base 12 y altura 5 y otro de base 4 y altura 3.

$$A = 3\cdot 4 + 12\cdot 5 = 72$$



Mayo 21: Completa con las cifras desde 2 hasta 9, sin repetir ninguna, las celdas amarillas para que la suma esté bien



Solución: El valor más pequeño posible (para las unidades y las decenas) es (2 + 3 + 4 =) 9 y el valor más grande es (9 + 8 + 7 =) 24. Luego, necesariamente, la suma de las unidades debe ser 16 y la suma de las decenas debe ser 19 (para que con la que llevamos obtengamos 20) y la suma de las centenas debe ser 9 (para que con las dos que llevamos de las decenas obtengamos 11) y así estará bien efectuada la suma. Así pues, deberemos particionar el conjunto {2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9} en tres subconjuntos, dos subconjuntos de tres elementos con sumas de elementos 19 y 16 y el otro subconjunto de dos elementos con suma de elementos 9.

Las únicas posibilidades para las centenas son:

(1) $9 = 7 + 2$ | (2) $9 = 6 + 3$ | (3) $9 = 5 + 4$

Para el caso (1), tenemos:

$19 = 9 + 6 + 4$	$19 = 8 + 6 + 5$
$16 = 8 + 5 + 3$	$16 = 9 + 4 + 3$

Para el caso (2), tenemos:

$19 = 9 + 8 + 2$	$19 = 8 + 7 + 4$
$16 = 7 + 5 + 4$	$16 = 9 + 5 + 2$

Para el caso (3), tenemos:

$19 = 9 + 8 + 2$	$19 = 9 + 7 + 3$
$16 = 7 + 6 + 3$	$16 = 8 + 6 + 2$

Las soluciones son:

$$\begin{array}{rcccc} & 1 & 7 & 9 & 8 \\ & & 2 & 6 & 5 \\ + & & & 4 & 3 \\ \hline & 2 & 1 & 0 & 6 \end{array} \qquad \begin{array}{rcccc} & 1 & 7 & 8 & 9 \\ & & 2 & 6 & 4 \\ + & & & 5 & 3 \\ \hline & 2 & 1 & 0 & 6 \end{array} \qquad \begin{array}{rcccc} & 1 & 6 & 9 & 7 \\ & & 3 & 8 & 5 \\ + & & & 2 & 4 \\ \hline & 2 & 1 & 0 & 6 \end{array}$$

$$\begin{array}{rcccc} & 1 & 6 & 8 & 9 \\ & & 3 & 7 & 5 \\ + & & & 4 & 2 \\ \hline & 2 & 1 & 0 & 6 \end{array} \qquad \begin{array}{rcccc} & 1 & 5 & 9 & 7 \\ & & 4 & 8 & 6 \\ + & & & 2 & 3 \\ \hline & 2 & 1 & 0 & 6 \end{array} \qquad \begin{array}{rcccc} & 1 & 5 & 9 & 8 \\ & & 4 & 7 & 6 \\ + & & & 3 & 2 \\ \hline & 2 & 1 & 0 & 6 \end{array}$$

Cada una de estas soluciones puede intercambiar las cifras situadas en cada columna. Por tanto, cada una de estas soluciones verdaderamente lleva ($3! \cdot 3! \cdot 2! =$) 72 soluciones

Mayo 22: Hace una semana el 10% de la clase de Laia tenía gripe. Hoy, el 10% de los enfermos sanó y el 10% de los sanos enfermó. ¿Qué porcentaje de la clase tiene la gripe?

Solución: Sea x el tamaño de la clase. Hace una semana teníamos:

$$10\% \text{ de x tenía gripe} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{10x}{100} = \dfrac{x}{10} \text{ tenía gripe} \\ \dfrac{9x}{10} \text{ no tenía gripe} \end{cases}$$

Esta semana tendremos:

$$90\% \text{ de los que tenía gripe sigue con gripe} \Rightarrow \text{con gripe las dos semanas} = \frac{90}{100}\cdot\frac{x}{10} = \frac{9x}{100}$$

$$10\% \text{ de los que no tenía gripe tiene gripe} \Rightarrow \text{con gripe solo esta semana} = \frac{10}{100}\cdot\frac{9x}{10} = \frac{9x}{100}$$

Por tanto:

$$\text{con gripe la segunda semana} = \frac{9x}{100}+\frac{9x}{100} = \frac{18x}{100} = 18\% \text{ de x}$$

Mayo 24/31-25: Completa el diagrama adjunto, sabiendo que es una tabla de sumar (es decir, a + b = 8, y así todas las demás casillas), que el mayor número que aparece es 21, y que todos los 15 naturales son diferentes

+	b		
a	8	12	
	10		
	13		

Solución: Como entre 8 y 10 hay una diferencia de 2, también la ha de haber entre la segunda y tercera entrada de la primera columna. Como entre 8 y 13 hay una diferencia de 5, también la ha de haber entre las entradas de segunda y cuarta de la primera columna. De forma análoga entre 12 y 8 hay una diferencia de 4 que también se ha de mantener entre 10 y la tercera entrada de la columna tercera y entre 13 y la cuarta entrada la tercera columna y entre b y la primera entrada de la tercera columna

+	b	b+4	
a	8	12	
a+2	10	14	
a+5	13	17	

Como el mayor número que aparece en la tabla es 21, este valor ha de estar en la cuarta entrada de la cuarta columna. Y como entre 17 y 21 hay una diferencia de 4, esta diferencia se ha de mantener entre las entradas de la cuarta columna y la tercera

+	b	b+4	b+8
a	8	12	16
a+2	10	14	18
a+5	13	17	21

Queda por rellenar la primera fila y columna con la exigencia de que hay 15 naturales diferentes. Es decir, a y b han de escogerse de {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 9, 11, 15, 16, 19, 20} de manera que se cumpla a + b = 8 y además a ≠ b. Es decir: a = 1 y b= 7 o a = 2 y b = 6 o a = 3 y b = 5. En definitiva las soluciones posibles son: (y sus traspuestas entre primera fila y columna)

+	7	11	15
1	8	12	16
3	10	14	18
6	13	17	21

+	6	10	14
2	8	12	16
4	10	14	18
7	13	17	21

+	5	9	13
3	8	12	16
5	10	14	18
8	13	17	21

Mayo 26: Los invitados a una boda ocuparon varias mesas de 7 comensales. Como estaban muy apretados se preparó 3 mesas más y entonces ocuparon todas las mesas, pero con 6 comensales por mesa. ¿Cuántos invitados había?

Solución: Si x es el número de mesas con 7 comensales, x + 3 es el número de mesas de 6 comensales. Por tanto:

$$7x = 6(x+3) \quad \Rightarrow \quad x = 18$$

Luego en la boda había (7·18 =) 126 invitados.

Mayo 27: Como siempre letras diferentes (iguales) representan dígitos diferentes (iguales)

(LEE)^2 = PEDAL

Solución: Como el mayor (menor) valor posible para PEDAL es 98765 (10234) tendremos:

$$101 < \sqrt{10234} \leq \mathrm{LEE} = \sqrt{\mathrm{PEDAL}} \leq \sqrt{98765} < 315$$

Por lo tanto, L solo puede tomar los valores 1, 2 o 3.

Si suponemos L = 1, como $(1\mathrm{EE})^2 = \mathrm{PEDA1}$, acaba en 1 (= L), buscamos una cifra E tal que

$$\mathrm{E}^2 = 10\mathrm{x} + 1$$

E	E^2
0	0
1	1
2	4
3	9
4	16
5	25
6	36
7	49
8	64
9	81

La única posibilidad (excluida L = 1 = E, por ir contra el enunciado) es E = 9 (mirar tabla adjunta). En este caso:

$$(\mathrm{LEE})^2 = (199)^2 = 30601 = \mathrm{PEDAL}$$

Y, por tanto, se cumplen todas las exigencias del enunciado. Ya tenemos una solución.

Si suponemos L = 2, como $(2\mathrm{EE})^2 = \mathrm{PEDA2}$, acaba en 2 (= L), buscamos una cifra E tal que

$$\mathrm{E}^2 = 10\mathrm{x} + 2$$

Pero, según la tabla adjunta para ningún valor posible de E su cuadrado acaba en 2. Es decir L = 2, no aporta ninguna solución.

Si suponemos L = 3, como $(3\mathrm{EE})^2 = \mathrm{PEDA3}$, acaba en 3 (= L), buscamos una cifra E tal que

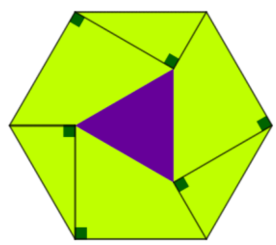
$$\mathrm{E}^2 = 10\mathrm{x} + 3$$

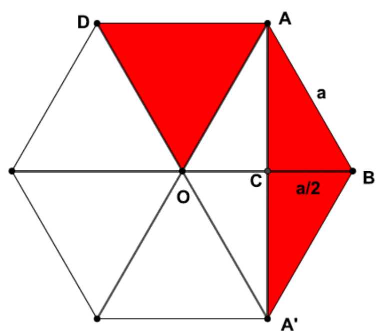
Pero, según la tabla adjunta para ningún valor posible de E su cuadrado acaba en 3. Es decir L = 3, no aporta ninguna solución:

La única solución al problema planteado es:

$$(\mathrm{LEE})^2 = (199)^2 = 30601 = \mathrm{PEDAL}$$

Mayo 28-29: Ayudándonos de algunas perpendiculares hemos dibujado un triángulo morado en el interior del hexágono regular verde. Si el área del hexágono regular es 120 cm^2, ¿cuál es el área, en cm^2, del triángulo morado?





Solución: Recordemos que un hexágono regular de lado a, podemos considerarlo compuesto por seis triángulos equiláteros de lado a. Si ese el caso, tendremos:

$$A_{\Delta OAD} = A_{\Delta OAB} = 2 \cdot A_{\Delta ACB} = A_{\Delta ACB} + A_{\Delta CBA'} = A_{\Delta AA'B}$$

Según lo anterior, en la ilustración adjunta, el área de los triángulos azules equivale a la mitad del área del hexágono. De aquí:

$$A_{\Delta PTQ} = \frac{120}{2} = 60$$

Como el triángulo ΔXYZ divide en cuatro triángulos iguales al triángulo ΔTPQ, tendremos:

$$60 = A_{\Delta TPQ} = 4 \cdot A_{\Delta XYZ} \;\; \Rightarrow \;\; \frac{60}{4} = A_{\Delta XYZ} = 15 \text{ cm}^2$$