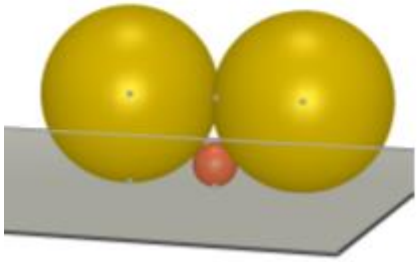
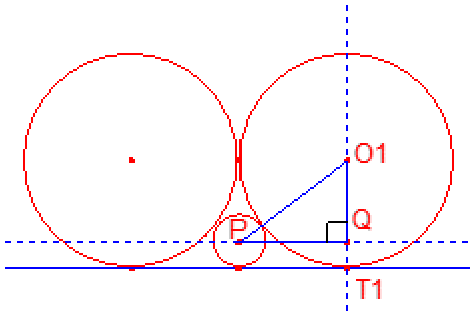
SOLUCIONES JUNIO 2021

PROBLEMAS PARA UTILIZAR PROGRAMAS GEOMÉTRICOS. AUTOR: RICARD PEIRÓ I ESTRUCH. IES "Abastos". València.



Junio 1-2: Se tienen dos esferas tangentes e iguales encima de una mesa. ¿Cuál es el radio de la esfera más grande que puede pasar entre las dos esferas por encima de la mesa?

Sangaku, Temple Kon'noh Hachiman, Tokyo. 1846



Solución: Sea r el radio de la esfera máxima. Esta esfera será tangente a las esferas de radio R.

Los centros de las tres esferas están en el mismo plano. Consideramos la sección formada por el plano que pasa por los centros de las dos esferas de radio R y es perpendicular a la mesa.

Sea O1 el centro de la esfera de la derecha. Sea P el centro de la esfera pequeña. Sea T1 el punto de tangencia de la esfera de centro O1 y la mesa. Sea Q la proyección de P sobre la recta O1T1

$$\overline{PQ} = R, \qquad \overline{PO1} = R + r, \qquad \overline{QO1} = R - r$$

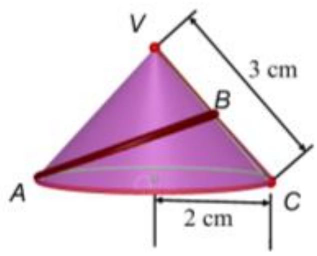
Aplicando el teorema de Pitágoras al triángulo rectángulo $\overset{\Delta}{PQO1}$

$$(R + r)^2 = (R - r)^2 + R^2$$

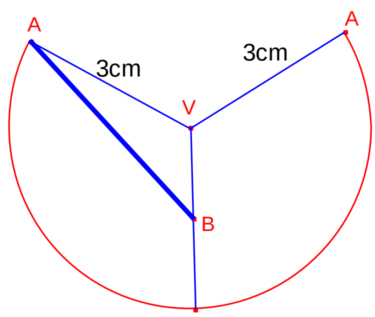
Simplificando:

$$4Rr = R^2; \quad r = \frac{1}{4}R$$

Junio 3-4: Sea el cono macizo de diámetro AC = 4 cm, vértice V y generatriz AV = 3 cm. Sea B el punto medio de la generatriz CV. ¿Cuál es la mínima distancia entre A y B?



Solución: Si recortamos y desarrollamos el cono por la línea AV, tenemos la figura adjunta. El arco del sector es igual a la longitud de la circunferencia de radio 2 cm.



$$L_{arc} = 2\pi \cdot 2 = 4\pi$$

El ángulo central del sector de radio 3 cm es:

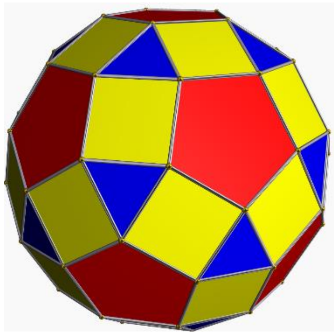
$$\alpha = \frac{4\pi}{3}\frac{180°}{\pi} = 240°$$

El punto B se encuentra en la bisectriz del sector anterior

$$\angle AVB = 120°$$

Aplicando el teorema del coseno al triángulo $\overset{\Delta}{\mathrm{AVB}}$

$$\overline{\mathrm{AB}}^2 = 3^2 + \left(\frac{3}{2}\right)^2 - 2 \cdot 3 \cdot \frac{3}{2} \cdot \cos 120° = \frac{63}{4}, \quad \overline{\mathrm{AB}} = \frac{3\sqrt{7}}{2} \cong 3.97 \text{ cm}$$



Junio 5-12: El rombicosidodecaedro es un poliedro arquimediano que tiene 62 caras que son 30 cuadrados, 12 pentágonos regulares y 20 triángulos equiláteros. Determinar el número de vértices

Solución: El rombicosidodecaedro es un poliedro convexo por lo tanto cumple la fórmula de Euler: El número de caras más el número de vértices es igual al número de aristas más 2: C + V = A + 2.

Las aristas están formadas por la intersección de dos lados de los poliedros que forman las caras. Entonces el número de aristas es igual en mitad del número de lados que forman los polígonos que forman las caras.

$$\mathrm{A} = \frac{4 \cdot 30 + 5 \cdot 12 + 3 \cdot 20}{2} = 120, \quad 62 + \mathrm{V} = 120 + 2, \quad \mathrm{V} = 60$$

Junio 7-8: En un cubo de arista a se ha inscrito un octaedro regular con vértices en seis aristas del cubo (véase la figura adjunta).

Calcular la arista del octaedro
Calcular la proporción entre los volúmenes del octaedro y el cubo

Solución: Sea $\overline{\mathrm{AB}} = \mathrm{a}$, la arista del cubo. Sea

$$\overline{\mathrm{AP}} = \overline{\mathrm{AQ}} = \overline{\mathrm{AR}} = \mathrm{x}$$

La arista del octaedro regular es:

$$\overline{\mathrm{PQ}} = \mathrm{x}\sqrt{2}$$

Aplicando el teorema de Pitágoras al triángulo rectángulo $\overset{\Delta}{\mathrm{RA'S}}$:

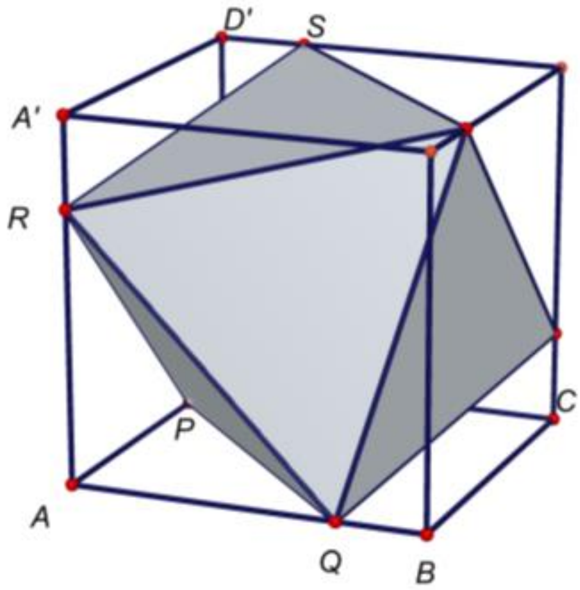
$$\overline{\mathrm{RS}} = \sqrt{\mathrm{a}^2 + 2(\mathrm{a} - \mathrm{x})^2}$$

Igualando las aristas:

$$\sqrt{\mathrm{a}^2 + 2(\mathrm{a} - \mathrm{x})^2} = \mathrm{x}\sqrt{2}, \quad \mathrm{x} = \frac{3}{4}\mathrm{a}$$

La arista del octaedro es:

$$\overline{\mathrm{PQ}} = \frac{3\sqrt{2}}{4}\mathrm{a}$$



El volumen del cubo es:

$$V_{\text{cubo}} = a^3$$

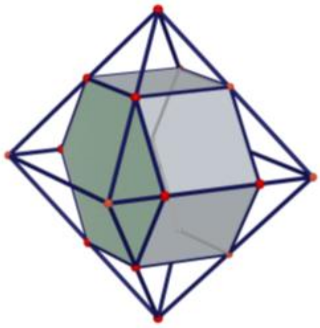
El volumen del octaedro es:

$$V_{\text{octaedro}} = \frac{\sqrt{2}}{3}\overline{PQ}^3 = \frac{\sqrt{2}}{3}\left(\frac{3\sqrt{2}}{4}a\right)^3 = \frac{9}{16}a^3$$

La proporción entre los volúmenes es:

$$\frac{V_{\text{octaedro}}}{V_{\text{cubo}}} = \frac{9}{16}$$

Junio 9-16: En un octaedro regular se ha inscrito un prisma hexagonal recto con todas sus aristas iguales. Determinar la proporción entre los volúmenes del prisma y del octaedro. (El prisma hexagonal no es regular)



Solución: Sea el octaedro regular de arista $\overline{PQ} = a$. Sea ABCDFG la base del prisma. Sean $\overline{CD} = \overline{CH} = x$, aristas del prisma. (Notemos que las aristas de la base no son iguales). Tendremos:

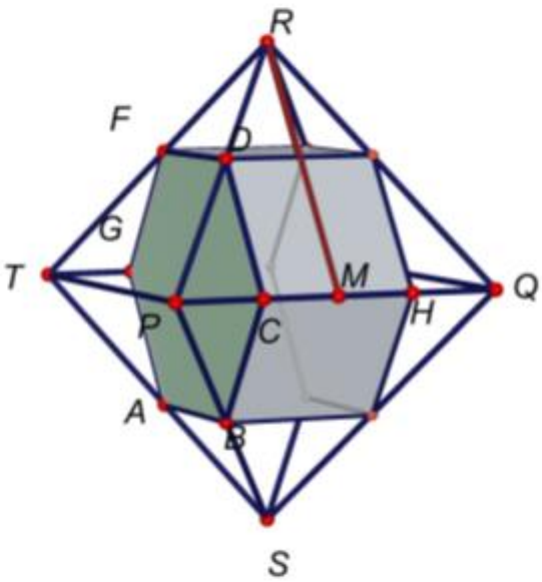
$$\overline{PC} = \frac{a - x}{2}, \angle DPC = 60°, \operatorname{tag}(60°) = \frac{x}{\frac{a-x}{2}} = \sqrt{3},$$
$$x = \left(2\sqrt{3} - 3\right)a$$

Notemos que TSQR es un cuadrado de lado a y, por tanto:

$$\overline{RS} = a\sqrt{2}$$

El volumen del octaedro es:

$$V_{\text{octaedro}} = \frac{1}{3} \cdot a^2 \cdot a\sqrt{2} = \frac{\sqrt{2}}{3}a^3$$



Calculamos el área de la base del prisma, tendremos:

$$\overline{CG} = a, \overline{AB} = \overline{FC} = \left(2\sqrt{3} - 3\right)a$$

(por tanto, la base, no es un hexágono regular). Puesto que $\overset{\Delta}{PMR}$ es un triángulo 30°-60°-90°:

$$\overline{MR} = \frac{\sqrt{3}}{2}\, a$$

Por otra parte, los triángulos $\overset{\Delta}{BCD}, \overset{\Delta}{SMR}$ son semejantes y al aplicar Tales, tenemos:

$$\frac{\overline{BD}}{\overline{RS}} = \frac{\overline{CD}}{\overline{MR}}, \qquad \frac{\overline{BD}}{a\sqrt{2}} = \frac{\left(2\sqrt{3} - 3\right)a}{\frac{\sqrt{3}}{2}a}, \qquad \overline{BD} = \left(4\sqrt{2} - 2\sqrt{6}\right)a$$

Por último:

$$S_{ABCDFG} = 2 \cdot S_{CDFG} = \frac{\overline{CG} + \overline{DF}}{2}\overline{BD} = \frac{2\sqrt{3} - 2}{2}\left(4\sqrt{2} - 2\sqrt{6}\right)a^2 = \left(6\sqrt{6} - 10\sqrt{2}\right)a^2$$

Y, el volumen del prisma es:

$$V_{prisma} = \left(6\sqrt{6} - 10\sqrt{2}\right)\left(2\sqrt{3} - 3\right)a^3 = \left(66\sqrt{2} - 38\sqrt{6}\right)a^3$$

La proporción entre los volúmenes es:

$$\frac{V_{prisma}}{V_{octaedro}} = \frac{66\sqrt{2} - 38\sqrt{6}}{\frac{\sqrt{2}}{3}} = 6\left(33 - 19\sqrt{3}\right)$$

Junio 10-11: En el interior de un cubo se ha inscrito una dipirámide hexagonal regular. Determinar la proporción entre los volúmenes de la dipirámide y el cubo. Determinar la proporción entre las áreas de la dipirámide y el cubo

Solución: Sea $\overline{AB} = a$ la arista del cubo. El volumen y el área del cubo son:

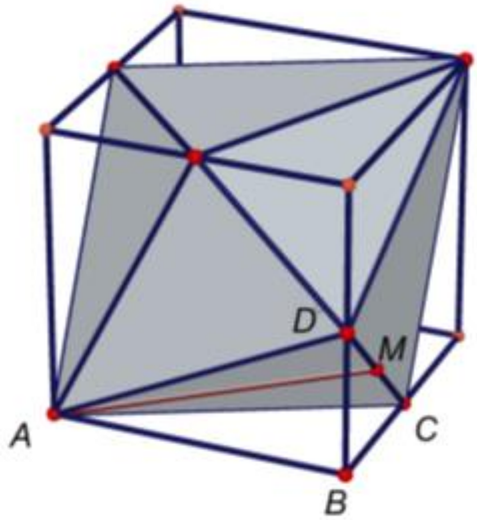
$$V_{cubo} = a^3, \;\; S_{cubo} = 6a^2$$

El volumen de la dipirámide es igual al volumen del cubo menos 6 tetraedros ABCD.

$$V_{dipirámide} = a^3 - 6 \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2}a \cdot \frac{1}{2}a \cdot \frac{1}{2}a = \frac{3}{4}a^3$$

Aplicando el teorema de Pitágoras al triángulo rectángulo $\overset{\Delta}{BCD}$:

$$\overline{CD} = \frac{\sqrt{2}}{2}a$$



Aplicando el teorema de Pitágoras al triángulo rectángulo $\overset{\Delta}{ABC}$

$$\overline{AC} = \frac{\sqrt{5}}{2}a$$

Aplicando el teorema de Pitágoras al triángulo rectángulo $\overset{\Delta}{ACM}$:

$$\overline{AM} = \sqrt{\left(\frac{\sqrt{5}}{2}\right)^2 - \left(\frac{\sqrt{2}}{4}\right)^2} = \frac{3\sqrt{2}}{4}a$$

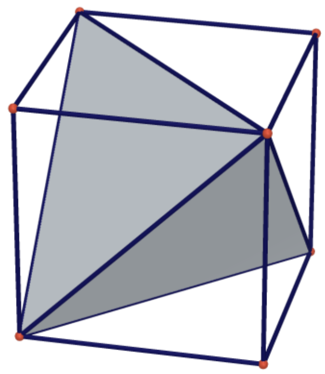
El área de la dipirámide es igual a 12 veces el área del triangulo $\overset{\Delta}{ACD}$

$$S_{\text{dipirámide}} = 12 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} a \cdot \frac{3\sqrt{2}}{4} a = \frac{9}{2} a^2$$

Por tanto:

$$\frac{V_{\text{dipirámide}}}{V_{\text{cubo}}} = \frac{3}{4}, \quad \frac{S_{\text{dipirámide}}}{S_{\text{cubo}}} = \frac{\frac{9}{2} a^2}{6a^2} = \frac{3}{4}$$

Junio 14-15: En un cubo se ha inscrito un tetraedro, como indica la figura. Calcular el área del tetraedro y la proporción entre el volumen del tetraedro y el volumen del cubo



Solución 1: Sea a la arista del cubo. Su volumen será:

$$V_{\text{cubo}} = a^3$$

El volumen del tetraedro es igual al volumen del cubo menos el volumen de 4 tetraedros que tienen 3 aristas del cubo perpendiculares

$$V_{\text{tetraedro}} = a^3 - 4\left(\frac{1}{3} \cdot \frac{a^2}{2} \cdot a\right) = \frac{a^3}{3}$$

La proporción de volúmenes es:

$$\frac{V_{\text{tetraedro}}}{V_{\text{cubo}}} = \frac{1}{3}$$

Solución 2: Sea a la arista del cubo. Su volumen será:

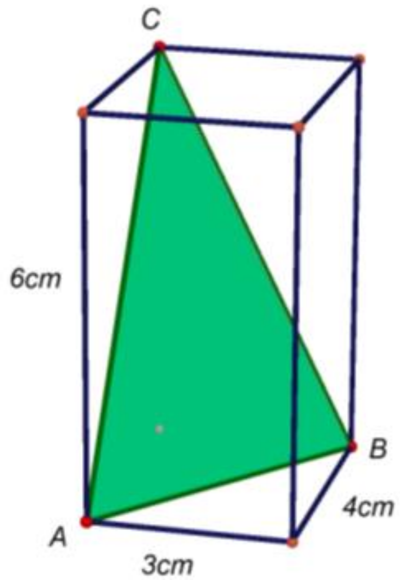
$$V_{\text{cubo}} = a^3$$

El tetraedro es regular de arista $a\sqrt{2}$. Y, de aquí, que su volumen sea:

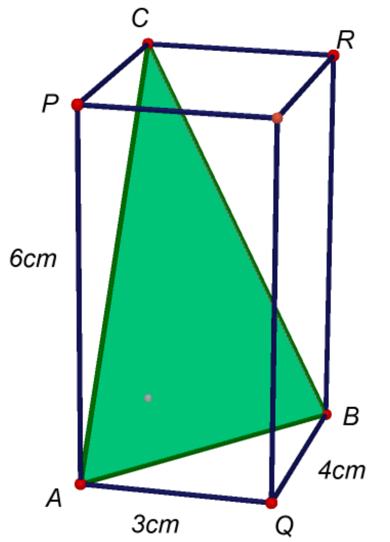
$$V_{\text{tetraedro}} = \frac{x^3\sqrt{2}}{12} = \frac{\left(a\sqrt{2}\right)^3\sqrt{2}}{12} = \frac{a^3}{3}$$

La proporción de volúmenes es:

$$\frac{V_{\text{tetraedro}}}{V_{\text{cubo}}} = \frac{1}{3}$$



Junio 17-24: Con los vértices del ortoedro de la figura, se ha dibujado el triángulo ΔABC. Calcular la medida de los lados del triángulo ΔABC. Calcular los ángulos del triángulo ΔABC. Calcular el área del triángulo ΔABC



Solución: Aplicando el teorema de Pitágoras al triángulo $A\overset{\Delta}{P}C$

$$\overline{AC} = 2\sqrt{13}$$

Aplicando el teorema de Pitágoras al triángulo $A\overset{\Delta}{Q}B$

$$\overline{AB} = 5$$

Aplicando el teorema de Pitágoras al triángulo $B\overset{\Delta}{R}C$

$$\overline{BC} = 3\sqrt{5}$$

Aplicando el teorema del coseno al triángulo $A\overset{\Delta}{B}C$

$$\left(3\sqrt{5}\right)^2 = 5^2 + \left(2\sqrt{13}\right)^2 - 2\cdot 5\cdot 2\sqrt{13}\cdot \cos A,$$

$$\cos A = \frac{8}{5\sqrt{13}}, A = \arccos\frac{8}{5\sqrt{13}} \approx 63°39'21''$$

$$5^2 = \left(3\sqrt{5}\right)^2 + \left(2\sqrt{13}\right)^2 - 2\cdot 3\sqrt{5}\cdot 2\sqrt{13}\cdot \cos C,\quad \cos C = \frac{6}{\sqrt{65}},\quad C = \arccos\frac{6}{\sqrt{65}} \approx 41°54'32''$$

$$B = 180° - (A + C) \approx 74°26'7''$$

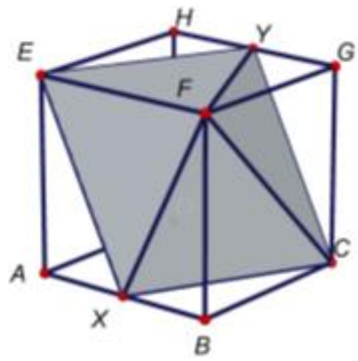
Por último, para el área:

$$S_{ABC} = \frac{1}{2}bc\cdot \sin A = \frac{1}{2}2\sqrt{13}\cdot 5\cdot \sin 63°39'21'' \approx 16.16\ cm^2$$

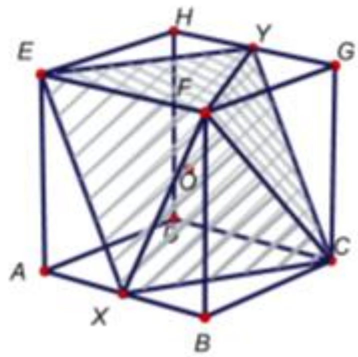
O, utilizando la fórmula de Herón:

$$S_{ABC} = \sqrt{s\cdot(s-a)\cdot(s-b)\cdot(s-c)}$$

$$= \sqrt{\frac{2\sqrt{13}+5+3\sqrt{5}}{2}\cdot\frac{-2\sqrt{13}+5+3\sqrt{5}}{2}\cdot\frac{2\sqrt{13}-5+3\sqrt{5}}{2}\cdot\frac{2\sqrt{13}+5-3\sqrt{5}}{2}} = 3\sqrt{29}$$



Junio 18-19: Sea ABCDEFGH un cubo de arista a. Sean X e Y los puntos medios de las aristas AB y GH, respectivamente. Se construye la pirámide de base XCYE y vértice F. Calcular la medida del segmento XY, el área de la base XCYE y el volumen de la pirámide XCYEF



Solución: Sea O el centro del cubo. El punto O pertenece a la base XCYE de la pirámide. Tendremos:

$$\overline{XY} = \overline{BG} = \sqrt{a^2 + a^2} = a\sqrt{2}$$

después de aplicar Pitágoras al triángulo ΔBCG.

El área de la base es el doble del área del triángulo ΔCEX. Al aplicar Pitágoras al triángulo ΔAEC:

$$\overline{CE} = \sqrt{\left(\sqrt{2}a\right)^2 + a^2} = a\sqrt{3}$$

$$\overline{OX} = \frac{1}{2} \cdot \overline{XY} = a\frac{\sqrt{2}}{2}$$

El área de la base XCYE es:

$$S_{XCYE} = 2\left(\frac{1}{2} \cdot \overline{CE} \cdot \overline{OX}\right) = \frac{\sqrt{6}}{2}a^2$$

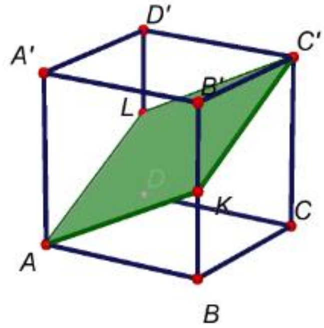
Para el volumen de la pirámide XCYEF, tendremos:

$$X\left(\frac{a}{2}, 0, 0\right); \quad C(a, a, 0); \quad Y\left(\frac{a}{2}, a, a\right); \quad E(0, 0, a); \quad F(a, a, 0)$$

$$\text{Ecuación del plano que pasa por X, C, Y y E: } \pi \equiv 2x - y + z = a$$

$$\text{altura de la pirámide} = d(\pi, F) = \frac{|2 \cdot 0 - 0 + a - a|}{\sqrt{2^2 + (-1)^2 + 1^2}} = \frac{2a}{\sqrt{6}}$$

$$V_{XCYEF} = \frac{1}{3} \cdot S_{XCYE} \cdot d(\pi, F) = \frac{1}{3} \cdot \frac{\sqrt{6}}{2}a^2 \cdot \frac{2a}{\sqrt{6}} = \frac{a^3}{3}$$



Junio 21-28: Sea ABCDA’B’C’D’ un cubo de arista unidad. Sea K el punto medio de la arista BB’. El plano C’KA corta a la arista DD’ en L. Hallar el ángulo que forman el plano AKC’ y la cara ABCD del cubo. Calcular el área del cuadrilátero AKC’L

Solución: Aplicando el teorema de Pitágoras al triángulo rectángulo e isósceles ΔABC, tenemos:

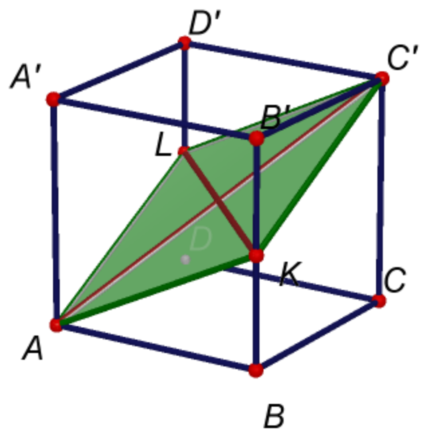
$$\overline{AC} = \sqrt{2}$$

El ángulo que forma el plano AKC' y la cara ABCD del cubo es:

$$\alpha = \angle C'AC.$$

Aplicando razones trigonométricas al triángulo rectángulo $\overset{\Delta}{ACC'}$:

$$\alpha = \operatorname{arctg}\frac{\overline{CC'}}{\overline{AC}} = \operatorname{arctg}\frac{\sqrt{2}}{2} \approx 35°15'52"$$



Calculemos el área del cuadrilátero AKC'L. Tendremos, L es el punto medio de la arista $\overline{DD'}$. AKC'L es un rombo en el que:

$$\overline{KL} = \overline{AC} = \sqrt{2}$$

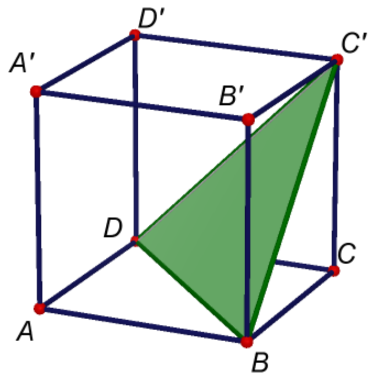
Y al aplicar el teorema de Pitágoras al triángulo rectángulo ΔACC':

$$\overline{AC'} = \sqrt{\left(\sqrt{2}\right)^2 + 1^2} = \sqrt{3}$$

El área del rombo AKC'L es:

$$S_{AKC'L} = \frac{1}{2}\overline{AC} \cdot \overline{KL} = \frac{\sqrt{6}}{2} \approx 1.22$$

Junio 22-23: Sea ABCDA'B'C'D' un cubo de arista unidad. Consideremos el plano que pasa por BDC'. Hallar el ángulo que forma el plano que pasa por BC'D y la cara ABCD del cubo. Calcular área y perímetro del triángulo ΔDBC'



Solución: Aplicando el teorema de Pitágoras al triángulo rectángulo e isósceles $\overset{\Delta}{BCD}$:

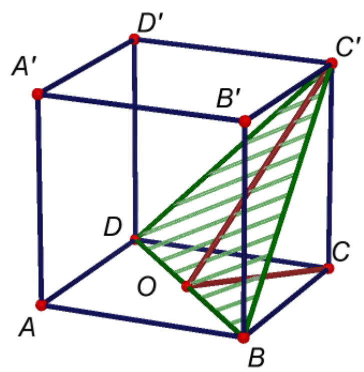
$$\overline{AC} = \sqrt{2}$$

Sea O el centro del cuadrado ABCD. El ángulo que forma el plano BC'D y la cara ABCD del cubo es:

$$\alpha = \angle C'OC,\ \ \overline{OC} = \frac{1}{2}\overline{BD} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

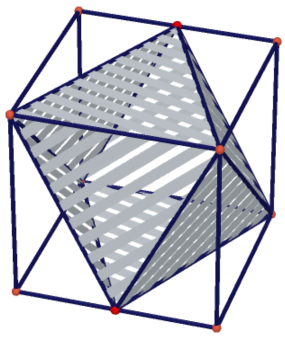
Aplicando razones trigonométricas al triángulo rectángulo $\overset{\Delta}{OCC'}$:

$$\alpha = \operatorname{arctg}\frac{\overline{CC'}}{\overline{OC}} = \operatorname{arctg}\sqrt{2} \approx 54°44'8"$$

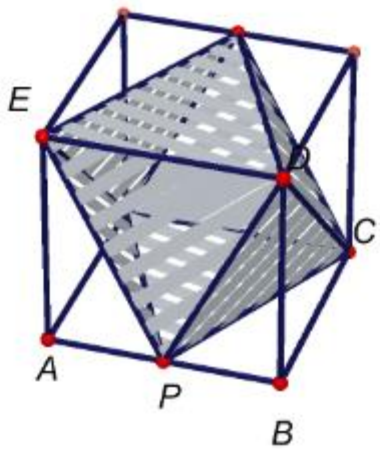


Como el triángulo $\overset{\Delta}{BC'D}$ es equilátero (tres lados iguales), su área es:

$$S_{BC'D} = \frac{\sqrt{3}}{4}\left(\sqrt{2}\right)^2 = \frac{\sqrt{3}}{2} \approx 0.87$$



<u>Junio 25-26:</u> En un cubo se ha inscrito un octaedro. Determinar la proporción entre sus volúmenes y entre sus áreas



<u>Solución:</u> Sea $\overline{AB} = a$, la arista del cubo. El volumen del cubo es $V_{cubo} = a^3$. El volumen del octaedro es igual al volumen del cubo menos 4 pirámides triangulares de base el triángulo rectángulo $\overset{\Delta}{PBC}$ y altura $\overline{BD} = a$.

$$V_{octaedro} = a^3 - 4\left(\frac{1}{3}\frac{1}{2}\frac{1}{2}a \cdot a \cdot a\right) = \frac{2}{3}a^3$$

La proporción entre los volúmenes es:

$$\frac{V_{octaedro}}{V_{cubo}} = \frac{2}{3}$$

El área del cubo es $S_{cubo} = 6a^2$

El área del octaedro es igual a 4 veces el área de un triángulo $\overset{\Delta}{PCD}$, de lados

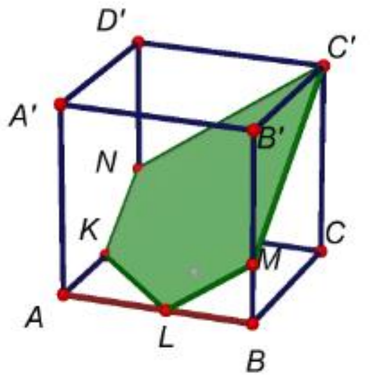
$$\overline{PC} = \overline{PD} = \frac{\sqrt{5}}{2}a, \overline{CD} = \sqrt{2}a$$

más cuatro veces el área de un triangulo $\overset{\Delta}{PDE}$. La altura sobre la base $\overline{CD}$ del triangulo $\overset{\Delta}{PCD}$, mide $\frac{\sqrt{3}}{2}a$

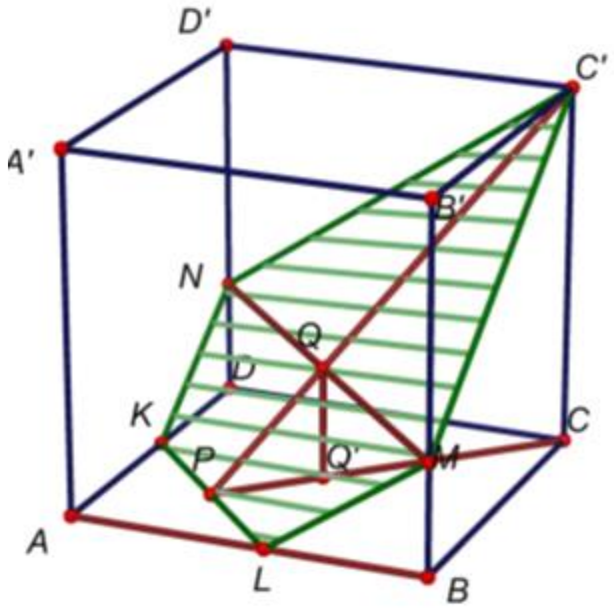
$$S_{octaedro} = 4\left(\frac{1}{2}a\sqrt{2}\frac{\sqrt{3}}{2}a\right) + 4\left(\frac{1}{2}a^2\right) = \left(2+\sqrt{6}\right)a^2$$

La proporción entre los volúmenes es:

$$\frac{S_{octaedro}}{S_{cubo}} = \frac{2+\sqrt{6}}{6}$$



Junio 29-30: Sea ABCDA'B'C'D' un cubo de arista unidad. Sean K y L los puntos medios de las aristas AD y AB. El plano C'KL corta a las aristas BB' y DD' en M y N, respectivamente. Calcular el ángulo que forman el plano KLC' y la cara ABCD del cubo. Calcular el área del pentágono KLMC'N



Solución: Sean P y Q los puntos medios de los segmentos $\overline{\mathrm{KL}}, \overline{\mathrm{NM}}$, respectivamente. El ángulo que forman el plano KLC' y la cara ABCD del cubo es:

$$\alpha = \angle \mathrm{C'PC}$$

Aplicando el teorema de Pitágoras al triángulo rectángulo e isósceles $\overset{\Delta}{\mathrm{APL}}$:

$$\overline{\mathrm{AP}} = \frac{\sqrt{2}}{4}, \qquad \overline{\mathrm{KL}} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Aplicando el teorema de Pitágoras al triángulo rectángulo e isósceles $\overset{\Delta}{\mathrm{ABC}}$

$$\overline{\mathrm{AL}} = \frac{1}{2}, \qquad \overline{\mathrm{AC}} = \sqrt{2}, \qquad \overline{\mathrm{PC}} = \frac{3\sqrt{2}}{4}$$

Aplicando razones trigonométricas al triángulo rectángulo $\overset{\Delta}{\mathrm{PCC'}}$:

$$\alpha = \operatorname{arctg}\frac{\overline{\mathrm{CC'}}}{\overline{\mathrm{PC}}} = \operatorname{arctg}\frac{2\sqrt{2}}{3} \approx 43°18'50"$$

Por otra parte:

$$\overline{\mathrm{MN}} = \sqrt{2}.$$

La proyección Q' del punto Q sobre la cara ABCD es el centro de esta cara:

$$\overline{\mathrm{PQ'}} = \overline{\mathrm{AP}} = \frac{\sqrt{2}}{4}$$

Aplicando el teorema de Tales a los triángulos semejantes $\overset{\Delta}{\mathrm{PCC'}}, \overset{\Delta}{\mathrm{PQ'Q}}$:

$$\frac{\overline{\mathrm{QQ'}}}{1} = \frac{\frac{\sqrt{2}}{4}}{\frac{3\sqrt{2}}{4}}, \quad \overline{\mathrm{MB}} = \overline{\mathrm{QQ'}} = \frac{1}{3}$$

Aplicando el teorema de Pitágoras al triángulo rectángulo $\overset{\Delta}{\mathrm{PCC'}}$:

$$\overline{\mathrm{PC'}} = \sqrt{1^2 + \left(\frac{3\sqrt{2}}{4}\right)^2} = \frac{\sqrt{34}}{4}$$

Aplicando el teorema de Tales a los triángulos semejantes $\overset{\Delta}{\mathrm{PCC'}}, \overset{\Delta}{\mathrm{PQ'Q}}$:

$$\frac{\overline{\mathrm{PQ}}}{\frac{\sqrt{34}}{4}} = \frac{1}{3}, \qquad \overline{\mathrm{PQ}} = \frac{\sqrt{34}}{12}, \qquad \overline{\mathrm{QC'}} = \frac{\sqrt{34}}{6}$$

El área del pentágono KLMC'N es igual a la suma de las áreas del trapecio KLMN y del triángulo $\overset{\Delta}{\mathrm{NMC'}}$

$$\mathrm{S_{KLMC'N}} = \frac{1}{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \sqrt{2}\right)\frac{\sqrt{34}}{12} + \frac{1}{2}\sqrt{2}\frac{\sqrt{34}}{6} = \frac{7\sqrt{17}}{24} \approx 1.20$$