SOLUCIONES JULIO 2021

VACACIONES. PROBLEMAS PARA NO PERDER EL “TOQUE”. AUTORES: COLECTIVO “CONCURSO DE PRIMAVERA”. RICARD PEIRÓ I ESTRUCH

https://www.concursoprimavera.es/#concurso

Julio 1: Como siempre letras iguales (diferentes) corresponden a dígitos iguales (diferentes)

$$\begin{array}{r} N\ O\ T\ A\ R \\ \times\ 4 \\ \hline R\ A\ T\ O\ N \end{array}$$

Solución: Fijémonos en la última multiplicación (Fig. 1). Tendremos:

$4 \cdot N$ + (llevamos) = $R \Rightarrow N = 1$ o 2.

Pero $N = 1$ es imposible pues ningún múltiplo de 4 acaba en 1 (Fig. 2).

Fig. 1

$$\begin{array}{r} N\ O\ T\ A\ R \\ \times\ 4 \\ \hline R\ A\ T\ O\ N \end{array}$$

Fig. 2

$$\begin{array}{r} 1\ O\ T\ A\ R \\ \times\ 4 \\ \hline R\ A\ T\ O\ 1 \end{array}$$

Por tanto, debe ser $N = 2$. Además en esta última multiplicación no llevamos ninguna de la anterior multiplicación (Fig. 3) pues si llevamos una (Fig. 4) tenemos que $9 \cdot 4$ no termina en 2

Fig. 3

$$\begin{array}{r} 2\ O\ T\ A\ 8 \\ \times\ 4 \\ \hline 8\ A\ T\ O\ 2 \end{array}$$

Fig. 4

$$\begin{array}{r} 2\ O\ T\ A\ 9 \\ \times\ 4 \\ \hline 9\ A\ T\ O\ 2 \end{array}$$

Fijémonos ahora en la penúltima multiplicación (Fig. 5)

$4 \cdot O$ + (llevamos) = $A \Rightarrow O = 1$ o 2. Pero $O \neq 2 = N \Rightarrow O = 1$

Fig. 5

$$\begin{array}{r} 2\ O\ T\ A\ 8 \\ \times\ 4 \\ \hline 8\ A\ T\ O\ 2 \end{array}$$

Fig. 6

$$\begin{array}{r} 2\ 1\ T\ A\ 8 \\ \times\ 4 \\ \hline 8\ A\ T\ 1\ 2 \end{array}$$

Fijémonos ahora en la segunda multiplicación (Fig. 7). Tendremos (llevamos 3 de la primera multiplicación):

$4 \cdot A + 3 = 10x + 1 \Rightarrow 4 \cdot A = 10x - 2 \Rightarrow 4 \cdot A$ acaba en 8.

De aquí, que, $A = 2$ o 7. Pero $A \neq 2 = N \Rightarrow A = 7$ (Fig. 8)

Fig. 7

$$\begin{array}{r} 2\ 1\ T\ A\ 8 \\ \times\ 4 \\ \hline 8\ A\ T\ 1\ 2 \end{array}$$

Fig. 8

$$\begin{array}{r} 2\ 1\ T\ 7\ 8 \\ \times\ 4 \\ \hline 8\ 7\ T\ 1\ 2 \end{array}$$

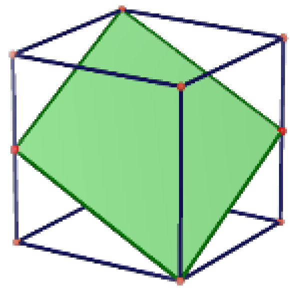
Por último (llevamos 3 de la segunda multiplicación y necesitamos llevar 3 para la cuarta multiplicación):

$4 \cdot T + 3 = 30 + T \Rightarrow 3T = 27 \Rightarrow T = 9$ (Fig. 9)

Fig. 9

$$\begin{array}{r} 2\ 1\ 9\ 7\ 8 \\ \times\ 4 \\ \hline 8\ 7\ 9\ 1\ 2 \end{array}$$

Julio 2-3: El cubo de la figura tiene arista la unidad. El cuadrilátero sombreado tiene dos vértices opuestos en vértices del cubo y los otros dos vértices en puntos medios de aristas del cubo. Clasificar el cuadrilátero, hallar sus ángulos y lados y su área



Solución: Sea $\overline{AB} = 1$ la arista del cubo. $\overline{AP} = \frac{1}{2}$.

Aplicando el teorema de Pitágoras al triángulo rectángulo $\overset{\Delta}{PAB}$:

$$\overline{PB} = \overline{BQ} = \overline{DQ} = \overline{DP} = \frac{\sqrt{5}}{2}.$$

Por tanto, el cuadrilátero PBQD es un rombo.

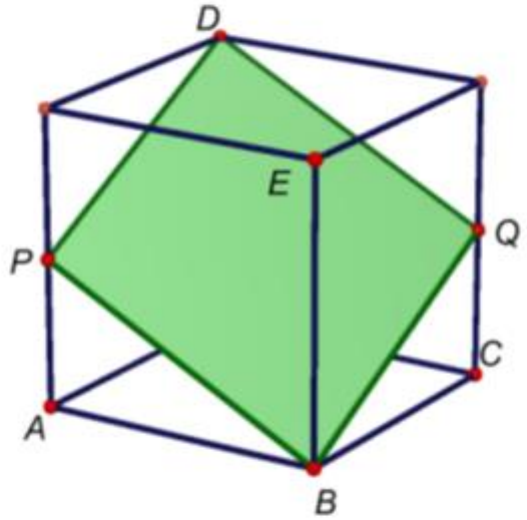
Aplicando el teorema de Pitágoras al triángulo rectángulo $\overset{\Delta}{ABE}$:

$$\overline{AE} = \overline{AC} = \overline{PQ} = \sqrt{2}.$$

Aplicando el teorema de Pitágoras al triángulo rectángulo $\overset{\Delta}{BED}$:

$$\overline{BD} = \sqrt{3}.$$

$\overline{BD} \neq \overline{PQ}$, y por tanto, PBQD no es un cuadrado.



Sea $\alpha = \angle BPD = \angle BQD$. Aplicando el teorema del coseno al triangulo $\overset{\Delta}{PBD}$:

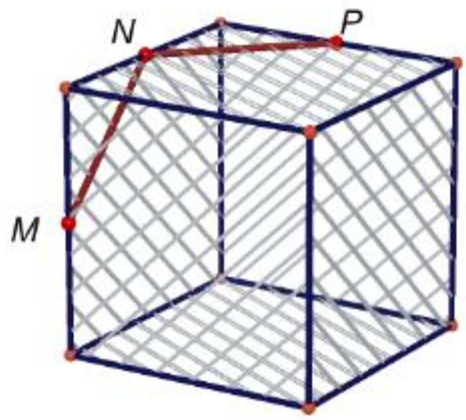
$$\left(\sqrt{3}\right)^2 = \left(\frac{\sqrt{5}}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{5}}{2}\right)^2 - 2 \cdot \left(\frac{\sqrt{5}}{2}\right)\left(\frac{\sqrt{5}}{2}\right)\cos\alpha, \quad \cos\alpha = \frac{-1}{5}, \quad \alpha = \arccos\frac{-1}{5} = 101°32'13"$$

$$\angle PBQ = \angle PDQ = 180° - \alpha = 78°27'47"$$

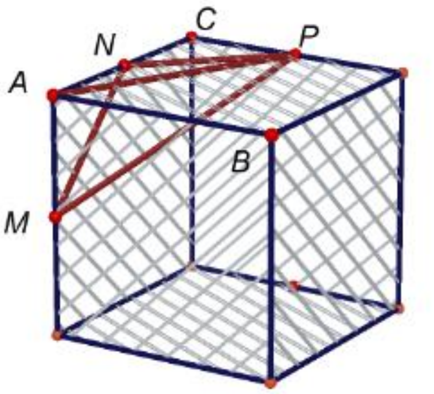
El área del rombo PBQD es:

$$S_{PBQD} = \frac{1}{2}\overline{PQ} \cdot \overline{BD} = \frac{1}{2}\sqrt{2} \cdot \sqrt{3} = \frac{\sqrt{6}}{2}$$

Julio 5: Sean M, N y P los puntos medios de tres aristas consecutivas de un cubo. Hallar el ángulo $\angle MNP$



Solución: Sea $\overline{\mathrm{AB}} = \mathrm{a}$, la arista del cubo. $\alpha = \angle\mathrm{MNP}$. Obviamente:



$$\overline{\mathrm{MN}} = \overline{\mathrm{NP}} = \frac{\sqrt{2}}{2}\mathrm{a}$$

Aplicando el teorema de Pitágoras al triángulo rectángulo $\overset{\Delta}{\mathrm{ACP}}$.

$$\overline{\mathrm{AP}} = \frac{\sqrt{5}}{2}\mathrm{a}$$

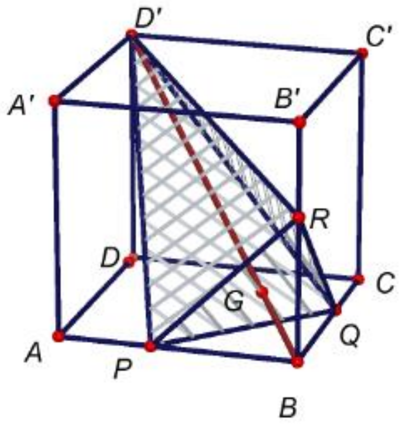
Aplicando el teorema de Pitágoras al triángulo rectángulo $\overset{\Delta}{\mathrm{MAP}}$.

$$\overline{\mathrm{MP}} = \frac{\sqrt{6}}{2}\mathrm{a}$$

Aplicando el teorema del coseno al triángulo $\overset{\Delta}{\mathrm{MNP}}$

$$\left(\frac{\sqrt{6}}{2}\mathrm{a}\right)^2 = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\mathrm{a}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\mathrm{a}\right)^2 - 2\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\mathrm{a}\right)^2 \cos\alpha, \quad \cos\alpha = -\frac{1}{2}, \quad \alpha = \angle\mathrm{MNP} = 120°$$

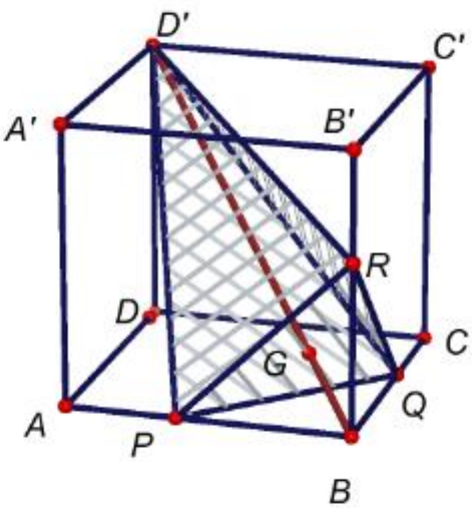
Julio 6-7: Sea ABCDA'B'C'D' un cubo de arista a. Sean P, Q y R puntos de las aristas AB, BC y BB', respectivamente, tales que BP = BQ = BR = x. Determinar el volumen del tetraedro PQRD' en función de x y a.



Solución: Aplicando el teorema de Pitágoras a los triángulos ΔADB, ΔDBD', ΔPBQ, ΔPBR y ΔRBQ, llegamos a:

$$\overline{\mathrm{PQ}} = \overline{\mathrm{QR}} = \overline{\mathrm{PR}} = \mathrm{x}\sqrt{2}, \qquad \overline{\mathrm{DB}} = \mathrm{a}\sqrt{2}, \qquad \overline{\mathrm{BD'}} = \mathrm{a}\sqrt{3}$$

Sea G el baricentro del triángulo equilátero ΔPQR. Sea $\mathrm{h} = \overline{\mathrm{GB}}$ la altura del tetraedro PBQR sobre la base ΔPQR. El volumen del tetraedro PBQR es:



$$\mathrm{V}_{\mathrm{PBQR}} = \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}\cdot\mathrm{x}^3 = \frac{1}{3}\cdot\left(\frac{\sqrt{3}}{4}\left(\mathrm{x}\sqrt{2}\right)^2\right)\cdot\mathrm{h}$$

Despejando h, llegamos a:

$$\mathrm{h} = \frac{\sqrt{3}}{3}\mathrm{x}$$

Por lo tanto, la altura del tetraedro PQRD' sobre la base ΔPQR es:

$$\overline{\mathrm{GD'}} = \mathrm{a}\sqrt{3} - \frac{\sqrt{3}}{3}\mathrm{x}$$

Y, el volumen del tetraedro PQRD’ es:

$$V_{PQRD'}=\frac{1}{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{4}\cdot\left(x\sqrt{2}\right)^2\cdot\left(a\sqrt{3}-\frac{\sqrt{3}}{3}x\right)=\frac{1}{2}\cdot x^2\cdot\left(a-\frac{1}{3}x\right)=\frac{1}{6}\cdot(3a-x)\cdot x^2$$

Julio 8-15: Carmen se jubila este curso y sus alumnos han decidido regalarle cada uno un pentágono o un hexágono. Carmen ha contado 282 aristas y 49 polígonos. Si los que le regalaron hexágonos le hubieran regalado pentágonos y los que le regalaron pentágonos le hubieran regalado hexágonos, ¿cuántas aristas tendría?

Solución: Sea x (y) el número de pentágonos (hexágonos). De la información del enunciado, tenemos:

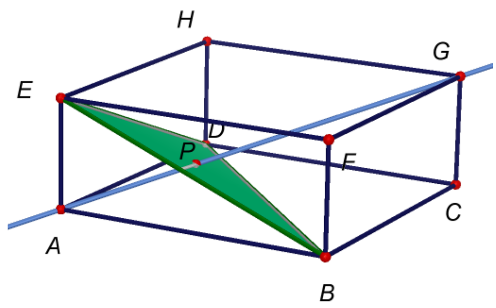
$$\left.\begin{array}{c}5x+6y=282\\ x+y=49\end{array}\right\}$$

De la segunda ecuación despejamos y y sustituimos en la primera con lo que:

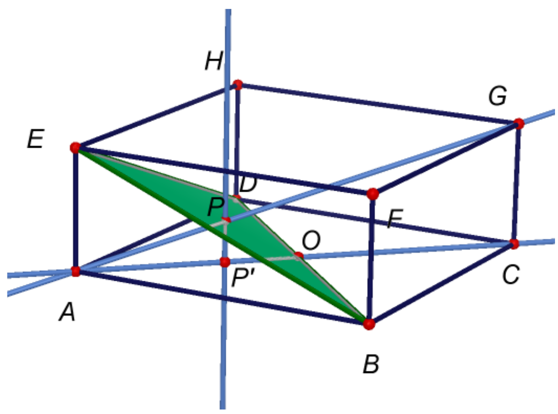
$$5x+6(49-x)=282,\quad x=12,\quad y=49-12=37$$

La contestación a la pregunta planteada, es: 6·12 + 5·37 = 257

Julio 9-10: Dado el ortoedro ABCDEFGH, la diagonal AG corta al triángulo ΔBDE en el punto P. Demostrar que P es el baricentro del triángulo ΔBDE



Solución 1: Sean $\overline{AB}=a,\overline{BC}=b,\overline{AE}=c$ las aristas del ortoedro. Sea O el centro de la cara ABCD. O es el punto medio de las diagonales del rectángulo ABCD. Sea P’ la proyección de P sobre la cara ABCD. Los puntos E, A, P, P’, O, C, G son coplanarios. Los puntos E, P, O están alineados.



Aplicando el teorema de Pitágoras al triángulo rectángulo $\overset{\Delta}{ABC}$

$$\overline{AC}=\sqrt{a^2+b^2}$$

Sea $x=\overline{AP'}$

$$\overline{OP'}=\frac{1}{2}\sqrt{a^2+b^2}-x$$

Los triángulos rectángulos $\overset{\Delta}{APP'}$, $\overset{\Delta}{ACG}$ son semejantes. Aplicando el teorema de Tales:

$$\frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}=\frac{\overline{PP'}}{x}\quad(1)$$

Los triángulos rectángulos $\overset{\Delta}{EAO}$, $\overset{\Delta}{PP'O}$ son semejantes. Aplicando el teorema de Tales:

$$\frac{2c}{\sqrt{a^2+b^2}}=\frac{\overline{PP'}}{\frac{1}{2}\sqrt{a^2+b^2}-x}\quad (2)$$

Dividiendo las expresiones ((1) : (2)):

$$\frac{1}{2}=\frac{\frac{1}{2}\sqrt{a^2+b^2}-x}{x}$$

Resolviendo la ecuación:

$$x=\frac{1}{3}\sqrt{a^2+b^2}$$

Aplicando el teorema de Tales a los triángulos rectángulos $\overset{\Delta}{EAO}$, $\overset{\Delta}{PP'O}$

$$\frac{\overline{EP}}{\overline{OP}}=\frac{\overline{AP'}}{\overline{OP'}}=\frac{\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{3}}{\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{2}-\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{3}}=\frac{\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{3}}{\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{6}}=2$$

Por tanto, P es el baricentro del triángulo $\overset{\Delta}{BDE}$

Solución 2 (Nick Kalapodis @NickKalapodis): Sean A(0, 0, 0); B(a, 0, 0); C(a, b, 0); D(0, b, 0), E(0,0,c); F(a, 0, c); G(a, b, c) y H(0, b, c). La ecuación del plano que pasa por E(0,0,c); B(a, 0, 0) y D(0, b, 0) es:

$$\begin{vmatrix} x-0 & y-0 & z-c \\ a-0 & 0-0 & 0-c \\ 0-0 & b-0 & 0-c \end{vmatrix}=0 \;\Rightarrow\; \begin{vmatrix} x & y & z-c \\ a & 0 & -c \\ 0 & b & -c \end{vmatrix}=0 \;\Rightarrow x\begin{vmatrix} 0 & -c \\ b & -c \end{vmatrix}-a\begin{vmatrix} y & z-c \\ b & -c \end{vmatrix}=0$$

$$\Rightarrow\; bcx+cay+abz=abc \;\Rightarrow\; \frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1\quad (1)$$

La ecuación de la recta que pasa por A(0, 0, 0) y G(a, b, c) es:

$$\frac{x-0}{a-0}=\frac{y-0}{b-0}=\frac{z-0}{c-0}\;\Rightarrow\;\frac{x}{a}=\frac{y}{b}=\frac{z}{c}\quad (2)$$

Las coordenadas del punto que pertenece al plano (1) y a la recta (2) es

$$P\left(\frac{a}{3},\frac{b}{3},\frac{c}{3}\right)$$

El centro de gravedad del triángulo ΔBDE es:

$$G\left(\frac{a+0+0}{3},\frac{0+b+0}{3},\frac{0+0+c}{3}\right)=\left(\frac{a}{3},\frac{b}{3},\frac{c}{3}\right)=P$$

Julio 12-13: Los tutores de 1D y 1E han recibido cromos para repartir entre sus tutorados. Tocaban a 25 cromos por alumno y sobraban 8. Como 4 alumnos no quisieron coger cromos, se repartieron los cromos sobrantes y tocaron a 3 cromos más. ¿Cuántos alumnos cogieron cromos?

Solución: Como cuatro alumnos no quisieron cromos, los cromos que sobraron fueron: 4·25 + 8 = 108. Estos se repartieron entre los x alumnos de los dos grupos que si quisieron cromos tocando a cada uno de ellos 3 cromos más. Luego:

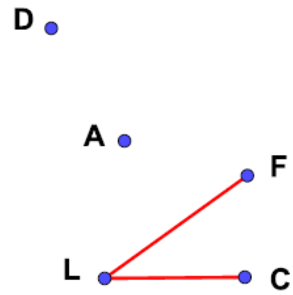
$$x=\frac{108}{3}=36$$

Julio 14: Para llenar la copa a la mitad de altura de su contenido hemos tardado 1 segundo, ¿cuánto tardaremos en llenar toda la copa?

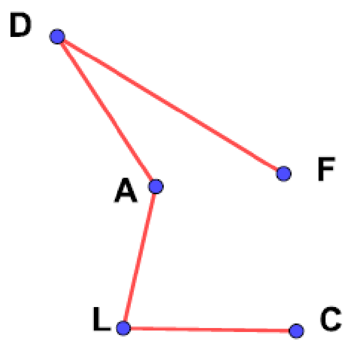
Solución: Los triángulos generados por la sección del cono generadas por un plano que pasa por un diámetro de la base del cono y por el vértice del cono son semejantes, de razón de proporcionalidad 1:2. Por lo tanto, el volumen del cono grande es (2^3) ocho veces el volumen del cono pequeño.

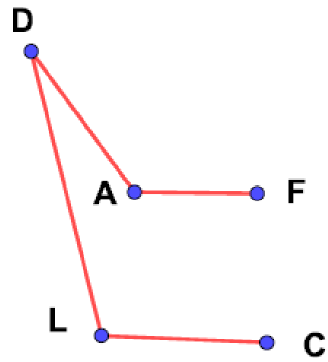
Por tanto, tardaremos siete segundos más en llenar toda la copa

Julio 16: En un comité de 5 personas, Laia, Dani y Aitana conocen a dos personas, mientras que Carles y Ferran conocen solo a una. Si Laia y Carles se conocen, ¿es posible que Laia y Ferran se conozcan?



Solución: Si suponemos que se conocen Laia y Ferran tendremos el siguiente grafo adjunto que debería completarse con dos líneas llegando a A y dos líneas llegando a D (notemos que en L, F y C ya están todas las líneas exigidas en el enunciado) y esto es imposible. Los únicos grafos posibles cumpliéndose el enunciado son los de abajo y en ellos no se conectan L y F





Julio 17: Si aumentamos los lados de un cuadrado en un cierto porcentaje, su área aumenta un 96%. ¿En qué porcentaje hubiera disminuido su área si en vez de alargar los lados, los acorto en dicho porcentaje?

Solución: Sea x el lado del cuadrado. Si aumentamos los lados un r% su longitud pasa de x a $\left(1+\frac{r}{100}\right)x$ y su área pasa de x^2 a $\left(1+\frac{r}{100}\right)^2 x^2$. Del enunciado tenemos:

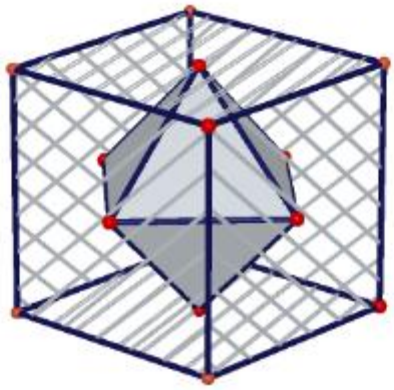
$$\left(1+\frac{r}{100}\right)^2 = 1{,}96; \quad 1+\frac{r}{100} = \sqrt{1{,}96}; \quad r = 40$$

Si disminuimos los lados del cuadrado un 40% su longitud pasa de x a ser $\left(1-\frac{40}{100}\right)x = 0{,}6 \cdot x$ y su área pasa de x^2 a $0{,}6^2 \cdot x^2$. De aquí:

$$0{,}6^2 = \left(1 - \frac{s}{100}\right); \quad 0{,}36 = 1 - \frac{s}{100}; \quad s = 64$$

Es decir, su área disminuye en un 64%

Julio 19-20: El octaedro que tiene los vértices en los centros de las caras de un cubo se denomina poliedro dual del cubo. Calcular la proporción entre los volúmenes del cubo y de su octaedro dual



Solución: Sea c la arista del cubo. La diagonal del octaedro regular es igual a la arista del cubo. La arista del octaedro es

$$\frac{\sqrt{2}}{2}c$$

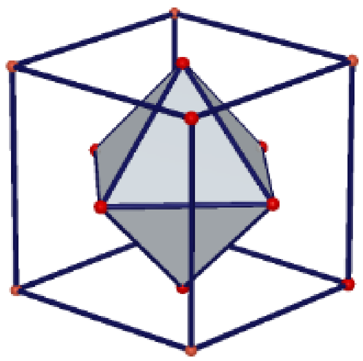
El volumen del octaedro es igual a dos veces el volumen de una pirámide cuadrangular regular de arista de la base $\frac{\sqrt{2}}{2}c$ y altura $\frac{1}{2}c$:

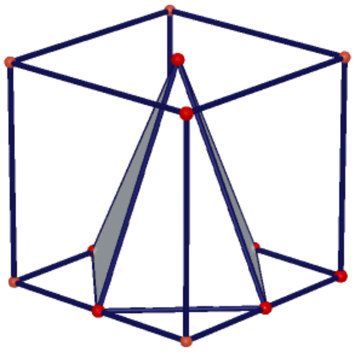
$$V_{\text{octaedro}} = 2 \cdot \left(\frac{1}{3} \cdot \left(\frac{\sqrt{2}}{2}c\right)^2 \frac{1}{2}c\right) = \frac{1}{6}c^3$$

La proporción entre los volúmenes del octaedro y del cubo es:

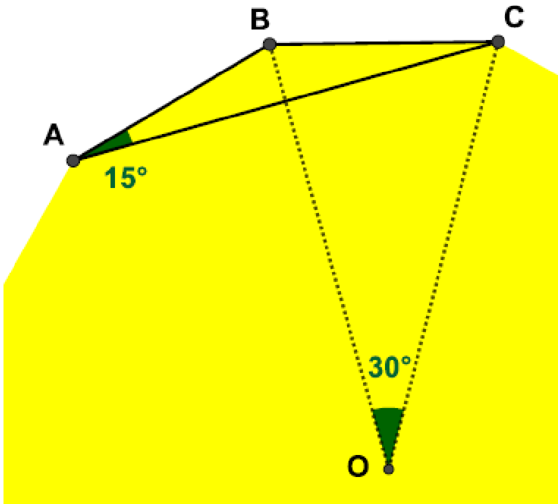
$$\frac{V_{\text{octaedro}}}{V_{\text{cubo}}} = \frac{\frac{1}{6}c^3}{c^3} = \frac{1}{6}$$

Notemos que el volumen del octaedro es igual al volumen de la pirámide de base un cuadrado que tiene los vértices en los puntos medios de una cara y altura igual a la arista del cubo.





Julio 21: Se tiene un polígono regular. Si AB y BC son dos aristas consecutivas y $\angle BAC = 15°$, ¿cuántos lados tiene el polígono?

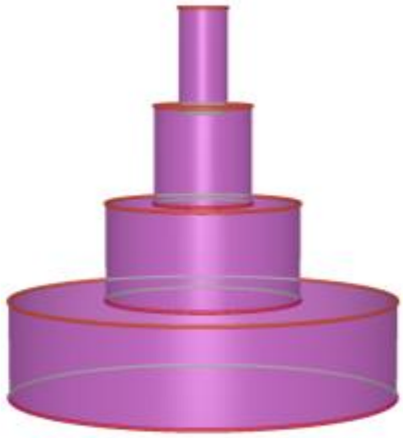


Solución: Sea n el número de lados del polígono regular. Del enunciado $\angle BAC = 15°$. Sea O el centro del polígono regular (el centro de la circunferencia circunscrita). Por la relación entre ángulo inscrito en una circunferencia y ángulo central tendremos que, $\angle BOC = 30°$. Pero:

$$30° = \frac{360°}{n} \Rightarrow n = \frac{360°}{30°} = 12$$

Es decir, se trata de un dodecágono

Julio 22-29: En la figura, el cilindro inferior tiene radio 1 y altura 1. Los cilindros superiores tienen la mitad del radio que el inferior y altura 1. Determinar el volumen de los 4 cilindros. Calcular el volumen en el caso de que hubiera 10 cilindros. Calcular el volumen en el caso de que hubiera infinitos cilindros



Solución: Para el volumen de los cuatro cilindros:

$$V_4 = \pi \cdot 1^2 \cdot 1 + \pi\left(\frac{1}{2}\right)^2 \cdot 1 + \pi\left(\frac{1}{4}\right)^2 \cdot 1 + \pi\left(\frac{1}{8}\right)^2 \cdot 1 = \pi\left(1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{16} + \frac{1}{64}\right) = \frac{85}{64}\pi \approx 4.172427743$$

Los volúmenes de los cilindros forman una progresión geométrica de primer término π y razón $\frac{1}{4}$. La suma de los 10 primeros términos es:

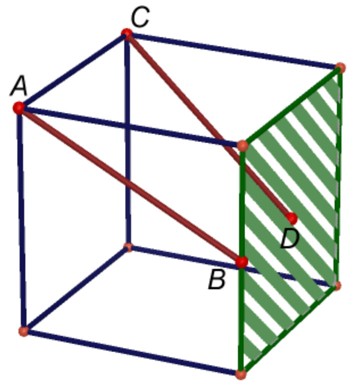
$$V_{10} = \frac{\pi\left(1 - \left(\frac{1}{4}\right)^{10}\right)}{1 - \frac{1}{4}} = \frac{349525}{262144}\pi \approx 4{,}18878621$$

La suma de los infinitos términos de una progresión geométrica de primer término π y razón $\frac{1}{4}$ es:

$$V_{inf} = \frac{\pi}{1 - \frac{1}{4}} = \frac{4}{3}\pi \approx 4.188790205\ .$$

Nota: La suma de los infinitos volúmenes de los cilindros es igual al volumen de una esfera de radio 1.

Julio 23-24: En la figura, A y C son vértices de un cubo de arista 1, B es el punto medio de la arista y D es el centro de la cara sombreada. ¿Las rectas que pasa por A y B y la que pasa por C y D, se cortan? En caso afirmativo, ¿en qué punto? Calcular el área del cuadrilátero ABCD.

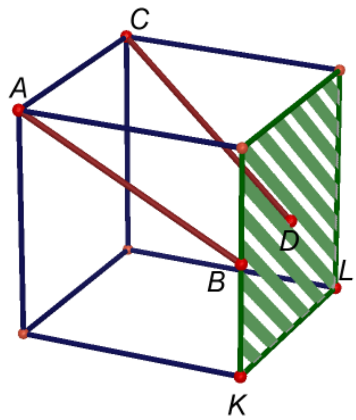


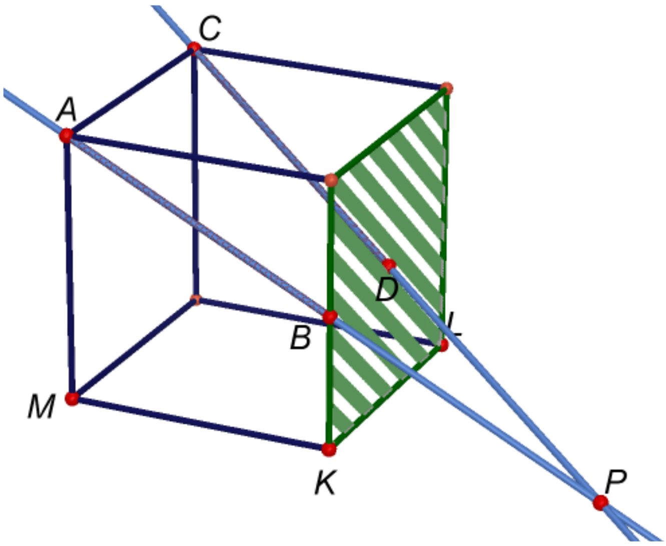
Solución: Los segmentos $\overline{\mathrm{AC}}$ y $\overline{\mathrm{BD}}$ son paralelos ya que las aristas $\overline{\mathrm{AC}}$ y $\overline{\mathrm{KL}}$ son paralelas y $\overline{\mathrm{KL}}$ y $\overline{\mathrm{BD}}$ son paralelas. Entonces, A, B, C, i D son coplanarios. Por tanto, las rectas AB y CD son secantes. Obviamente:

$$\overline{\mathrm{BD}} = \frac{1}{2}\overline{\mathrm{AC}}$$

Sea P la intersección de las rectas AB y CD. $\overline{\mathrm{BD}}$ es paralela mediana del triángulo $\overset{\Delta}{\mathrm{ACP}}$. P pertenece al plano que forman los puntos ABK.

$$\overline{\mathrm{AB}} = \overline{\mathrm{BP}}$$





Entonces, P pertenece a la recta MK y $\overline{\mathrm{MP}} = 2\cdot\overline{\mathrm{MK}}$

ABDC es un trapecio rectángulo $\angle\mathrm{CAB} = 90°$.

$$\overline{\mathrm{AB}} = \frac{\sqrt{5}}{2}$$

El área del trapecio ABDC es:

$$\mathrm{S_{ABDC}} = \frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{2}\right)\frac{\sqrt{5}}{2} = \frac{3\sqrt{5}}{8}$$

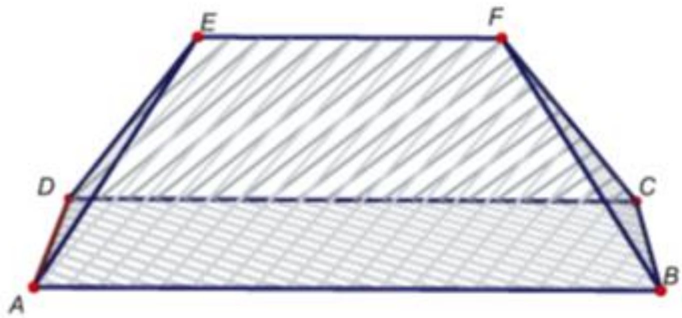
Julio 26: ¿Cuántas cifras tiene el número:

$16^{505}\cdot 3125^{404}$?

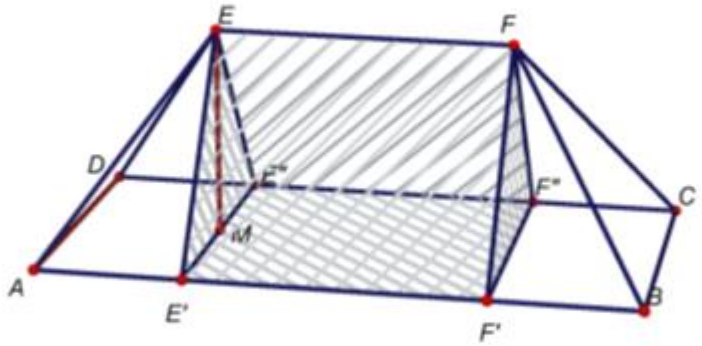
Solución: Tendremos:

$$\mathrm{N} = (2^4)^{505}\cdot(5^5)^{404} = 2^{2020}\cdot 5^{2020} = (2\cdot 5)^{2020} = 10^{2020}$$

Es decir, N tiene 2021 cifras: un 1 seguido de 2020 ceros.



Julio 27-28: En la figura ABCD es un rectángulo con AB = 20 y BC = 10. Los triángulos ΔADE y ΔCBF son iguales y equiláteros. Si EF = 10 y EF//AB, calcular el volumen del cuerpo



Solución: Sea E' la proyección de E sobre $\overline{AB}$. Sea F' la proyección de F sobre $\overline{AB}$. Sea E" la proyección de E sobre $\overline{CD}$. Sea F" la proyección de F sobre $\overline{CD}$. Obviamente:

$$\overline{AE'} = \overline{DE''} = \overline{BF'} = \overline{CF''} = \frac{\overline{AB} - \overline{EF}}{2} = 5$$

Aplicando el teorema de Pitágoras al triángulo rectángulo $\Delta AE'E$:

$$\overline{EE'} = \sqrt{10^2 - 5^2} = 5\sqrt{3}\,.$$

Sea M el punto medio del segmento $\overline{E'E''}$.

$$\overline{E'M} = \frac{1}{2}\overline{BC} = 5\,.$$

Aplicando el teorema de Pitágoras al triángulo rectángulo $\Delta E'EM$:

$$\overline{EM} = \sqrt{\left(5\sqrt{3}\right)^2 - 5^2} = 5\sqrt{2}\,.$$

El volumen de la figura es igual a la suma del volumen del prisma EE'E''F'F"F de base triangular más dos veces el volumen de la pirámide AE'E"DE de base rectangular.

El volumen del prisma EE'E"FF'F" es:

$$V_{EE'E''FF'F''} = \frac{1}{2}\overline{E'E''}\cdot\overline{EM}\cdot\overline{EF} = \frac{1}{2}10\cdot 5\sqrt{2}\cdot 10 = 250\sqrt{2}\,.$$

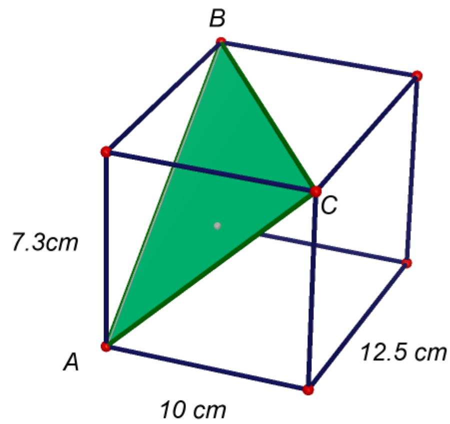
El volumen de la pirámide AE'E"DE es:

$$V_{AE'E''DE} = \frac{1}{3}\overline{AE'}\cdot\overline{E'E''}\cdot\overline{EM} = \frac{1}{3}5\cdot 10\cdot 5\sqrt{2} = \frac{250}{3}\sqrt{2}\,.$$

El volumen de la figura es:

$$V = 250\sqrt{2} + 2\left(\frac{250}{3}\sqrt{2}\right) = \frac{1250}{3}\sqrt{2}\,.$$

Julio 30-31: Un ortoedro tiene aristas de 12,5 cm, 10 cm, y 7,3 cm. Calcular el área del triángulo ΔABC



Solución: Aplicando tres veces el teorema de Pitágoras:

$$\overline{AB}^2 = 12.5^2 + 7.3^2 = 209.54 \qquad \overline{AC}^2 = 10^2 + 7.3^2 = 153.29 \qquad \overline{BC}^2 = 12.5^2 + 10^2 = 256.25$$

$$\overline{AB} = \sqrt{12.5^2 + 7.3^2} \approx 14.48 \text{ cm} \qquad \overline{AC} = \sqrt{10^2 + 7.3^2} \approx 12.38 \text{ cm} \qquad \overline{BC} = \sqrt{12.5^2 + 10^2} \approx 16.01 \text{ cm}$$

Aplicando el teorema del coseno:

$$A = \arccos\left(\frac{256.25 - 209.54 - 153.29}{-2\sqrt{209.54}\sqrt{153.29}}\right) \approx 72^o42' \qquad B = \arccos\left(\frac{153.29 - 209.54 - 256.25}{-2\sqrt{209.54}\sqrt{256.25}}\right) \approx 47^o36'$$

$C = 180^o - (A + B) \approx 59^o42'$.

El área del triángulo es:

$$S_{ABC} = \frac{\sqrt{209.54}\sqrt{153.29}\sin(72^o42')}{2} \approx 85.56 \text{ cm}^2 .$$