SOLUCIONS GENER 2021

PROBLEMES PER A LA PREPARACIÓ DE L'OLIMPÍADA DE 3r I 4t DE L'ESO, CONVOCADA PER LA FESPM EN 2003. 14-16 ANYS. COL·LECCIÓ CONFECCIONADA PER: JOSÉ COLÓN LACALLE. Professor jubilat

Gener 1-2: Vaig nàixer el segle passat. El 25 d'agost de 2001 vaig complir tants anys com val la suma dels dígits de l'any del meu naixement. Determina la data del meu naixement

Solució: Siga el 25 d'agost de 19xy (sent x e i dígits) la data de naixement del subjecte. Tindrem de l'enunciat:

$$1 + 9 + x + y = 2001 - 19xy = 2 \cdot 1000 + 1 - 1000 - 900 - 10x - y$$

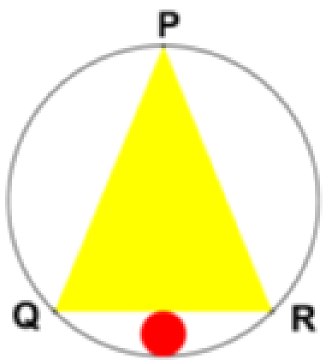
$$10 + x + y = 1000 - 899 - 10x - y; \quad 11x + 2y = 101 - 10; \quad 11x + 2y = 91$$

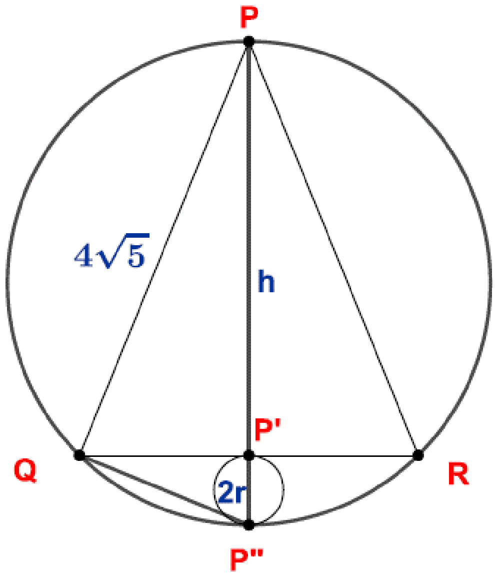
I, ara, per prova i error:

x	$¿y = \dfrac{91 - 11x}{2} \in \mathbb{N}?$
9	No
8	No
7	Sí. y =7
6	No
5	No
4	No
3	No
2	No
1	No

Per tant, la data de naixement és el **25 d'agost de 1977**.

Gener 4-11: En una circumferència de radi 6 inscrivim un triangle isòsceles ΔPQR en el qual PQ = PR = $4\sqrt{5}$. Una segona circumferència és tangent a la primera i tangent a la base QR del triangle, com a mostra la figura. Trobar el radi de la circumferència xicoteta





Solució: Siga h l'altura del triangle isòsceles i r el radi de la circumferència xicoteta. Llavors:

$$h + 2r = 12 \ (= \text{diàmetre de la circumferència}) \quad (*)$$

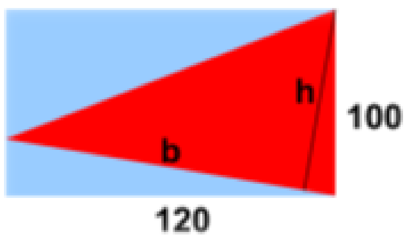
D'altra banda, $\Delta QPP'' \cong \Delta QPP'$ (perquè tots dos són rectangles i tenen en comú l'angle en P). D'ací:

$$\frac{4\sqrt{5}}{12} = \frac{h}{4\sqrt{5}} \Rightarrow h = \frac{16 \cdot 5}{12} = \frac{20}{3}$$

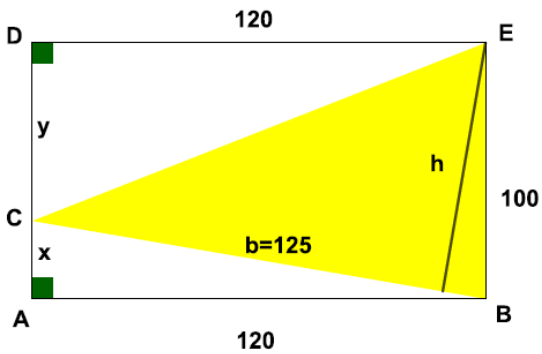
Per tant, en (*)

$$r = \frac{12 - 2r}{2} = \frac{12 - 2 \cdot \frac{20}{3}}{2} = \frac{8}{3}$$

Gener 5-6: En un rectangle de mesures 120 de llarg i 100 d'alt, s'inscriu un triangle com en la figura. Si la base b del triangle mesura 125, quant mesura l'altura h?



Solució: Siguen x i y les distàncies definides en la figura adjunta. Tindrem, x + y = 100



Aplicant Pitàgores al triangle ΔABC:

$$x = \sqrt{125^2 - 120^2} = 35$$

Per tant:

$$A_{\Delta ABC} = \frac{120 \cdot 35}{2} = 2100 \quad (1)$$

$$y = 100 - 35 = 65 \Rightarrow A_{\Delta CDE} = \frac{65 \cdot 120}{2} = 3900 \ (2)$$

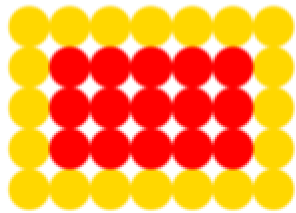
De (1) i (2):

$$A_{\Delta ABC} + A_{\Delta CDE} = 2100 + 3900 = 6000$$

D'on:

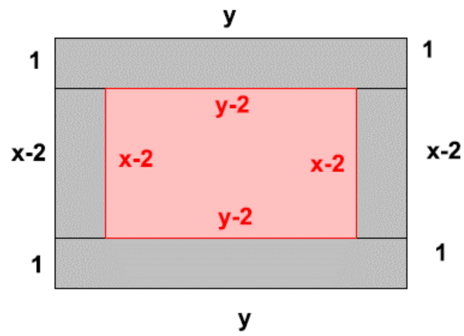
$$A_{\Delta CBE} = A_{ABDE} - (A_{\Delta ABC} + A_{\Delta CDE}) = 12000 - 6000 = 6000 = \frac{125 \cdot h}{2} \quad \Rightarrow \mathbf{h} = \frac{\mathbf{6000 \cdot 2}}{\mathbf{125}} = \mathbf{96}$$

<u>Gener 7-8:</u> Un tapet es forma unint cercles grocs en l'exterior i rojos a l'interior, sense solapaments. Existeix algun tapet en el qual els cercles grocs igualen en número als cercles rojos?



<u>Solució:</u> Suposem que el tapet té y cercles en horitzontal i x en vertical. Llavors, té 2y + 2(x – 2) en l'exterior i (x – 2)·(y – 2) a l'interior. Ha de complir-se, llavors, que:

$$2y + 2\cdot(x-2) = (y-2)\cdot(x-2)$$
$$xy - 4x - 4y + 8 = 0$$
$$y(x-4) = 4x - 8 \Rightarrow \begin{cases} x-4=0 & y\cdot 0 = 4\cdot 4 - 8; 0 = 8 \text{ NO!} \\ x-4\neq 0 & y = \dfrac{4x-8}{x-4} = 4 + \dfrac{8}{x-4} \end{cases}$$



Per tant, x – 4 és un divisor de 8, i.e. x – 4∈{±1, ±2, ±4, ±8}

Si x – 4 = 1, llavors x = 5 e y = 4 + 8 = 12. Si x – 4 = – 1, aleshores x = 3 e y = 4 – 8 = – 4 NO.

Si x – 4 = 2, llavors x = 6 e y = 4 + 4 = 8. Si x – 4 = – 2, aleshores x = 2 e y = 4 – 4 = 0 NO.

Si x – 4 = 4, llavors x = 8 e y = 4 + 2 = 6. Si x – 4 = – 4, aleshores x = 0 NO

Si x – 4 = 8, llavors x = 12 e y = 4 + 1 = 5. Si x – 4 = – 8, aleshores x = – 4 NO

Només compleixen el requisit de l'enunciat els tapets 5x12 i 6x8. (Els altres dos , són els anteriors girats 90°)

<u>Gener 9:</u> Una rajola té dimensions a, b, c. Existeix algun número tal que, si multipliquem a, b, c per ell obtenim una altra rajola amb doble àrea i doble volum?

<u>Solució:</u> Siguen A (= 2ab + 2ac + 2bc) i V (= abc), l'àrea i el volum de la rajola inicial. Siga k el número preguntat en l'enunciat, que suposem existeix. Llavors l'àrea i el volum de la nova rajola compleixen:

$$A_n = 2\cdot ka\cdot kb + 2\cdot ka\cdot kc + 2\cdot kb\cdot kc = k^2\cdot(2ab + 2ac + 2cb) = k^2\cdot A = 2A \Rightarrow k^2 = 2 \Rightarrow k = \sqrt{2}$$

$$V_n = ka\cdot kb\cdot kc = k^3\cdot V = 2\cdot V \Rightarrow k^3 = 2 \Rightarrow k = \sqrt[3]{2}$$

Per tant:

$$\sqrt{2} = \sqrt[3]{2}$$

Que és un absurd. Per tant, alguna suposició inicial o algun pas en la demostració és una falsedat. Com que tots els passos són correctes, l'única suposició que hem fet (que k existeix) és falsa.

<u>Gener 12-13:</u> Aitana és l'encarregada de marcar els llibres en la llibreria. Segons ella va rebre diversos llibres el dilluns i va marcar alguns d'ells. El dimarts va rebre tants llibres nous com no havia marcat el dilluns i va marcar 12. El dimecres va rebre 14 llibres més que el dilluns i va marcar doble nombre de llibres que el dilluns. El dijous va rebre el doble de llibres que havia marcat el dimecres i va marcar 10. El divendres va rebre 4 llibres i va marcar 14 llibres menys que els que havia rebut el dimecres. El dissabte va marcar els 20 llibres que li quedaven de la setmana. És això possible, o està equivocada?

Solució: Si x (y) és el nombre de llibres rebuts (marcats) el dilluns, tenim:

	rebuts	marcats	queden per marcar	condició
Dilluns	x	y	$x - y$	$x - y \geq 0$
Dimarts	$x - y$	12	$2x - 2y - 12$	$x - y \geq 6$
Dimecres	$x + 14$	$2y$	$3x - 4y + 2$	$3x - 4y \geq - 2$
Dijous	$4y$	10	$3x - 8$	$3x \geq 8$
Divendres	4	x	$2x - 4$	$2x - 4 \geq 0$
Dissabte	0	20	0	
total	$3x+3y+18$	$x + 3y + 42$		

Tenim dues condicions que han de complir-se: el total de rebuts ha de ser igual al total de marcats o els que queden per marcar el divendres ha de coincidir amb els marcats el dissabte. Tindrem:

$$3x + 3y + 18 = x + 3y + 42; \quad 2x = 24; \quad \mathbf{x = 12}$$

$$2x - 4 = 20; \quad \mathbf{x = 12}$$

No hi ha informació sobre y, excepte l'aportada per l'última columna de la taula, que es redueix a:

$$\left.\begin{array}{r} \left.\begin{array}{r} 12 \geq y \\ 12 - y \geq 6 \end{array}\right\} \\ 3 \cdot 12 - 4y \geq -2 \end{array} \begin{array}{r} 6 \geq y \\ 9{,}5 \geq y \end{array}\right\} \Rightarrow \; 6 \geq y \geq 0$$

L'enunciat és cert si el dilluns es reben 12 llibres i es marquen qualsevol quantitat entre {0, 1, 2, 3, 4, 5, 6}

Gener 14: Si un cordell es talla en trossos de 20 cm, sobra un tros de 15 cm. Si el cordell tinguera el triple de longitud, hi hauria sobres? De quants cm?

Solució: Siga L la longitud del cordell. Tindrem de l'enunciat:

$$20x + 15 = L \;\Rightarrow\; L - 15 = \dot{\widehat{20}} \;\Rightarrow\; 3 \cdot (20x + 15) = 60x + 45 = 3x \cdot 20 + 20 + 20 + 5$$
$$= (3x + 2) \cdot 20 + 5$$

Llavors, si el cordell és de longitud triple hi haurà el triple de trossos més dos, de longitud 20 cm i **sobrarà un tros de 5 cm.**

Gener 15-16: Un àrbitre tria tres barrets simultàniament d'un conjunt de tres blancs i dos negres. Tres homes asseguts, alineats un darrere l'altre, i mirant tots en la mateixa direcció (de manera que cadascun només pot veure el barret dels quals té davant d'ell) tanquen els ulls mentre se'ls col·loca un dels barrets triats. Els barrets no triats s'oculten a la vista. L'àrbitre li pregunta al tercer de la filera si sap el color del seu barret i aquest contesta que no ho sap. Li ho pregunta a l'assegut en el centre i també contesta que no ho sap. Llavors el primer diu que el seu és blanc. Com va poder deduir-ho?

Solució: Representarem per ternes

(color del barret del tercer, color del barret del segon, color del barret del primer)

els resultats de l'experiment.

Si el tercer home (veient els barrets dels dos primers) no pot garantir el color del seu barret és perquè veu dos barrets blancs o un blanc i un altre negre, perquè si vera dos barrets negres podria garantir que el seu barret és necessàriament blanc. Després els resultats compatibles amb què el tercer no pot assegurar el color del seu barret són:

(, B, B)

(, B, N)

(, N, B)

El segon tampoc pot garantir el color del seu barret, la qual cosa vol dir que ell veu (el color del barret del primer) un barret de color blanc, (si vera un barret de color negre llavors ell podria garantir que porta un barret de color blanc). Després si el tercer i el segon no poden garantir el color del seu barret, el primer pot garantir que el seu barret és de color blanc.

Gener 18-19: Si escrivim tots els nombres naturals, sense cap separació entre ells, a partir de l'1 i fins al 2021, obtenim un número amb moltes xifres:

123456789101112131415 16 ······ 201920202021

Quantes xifres té aquest número? Quina és la xifra que ocupa el lloc 2002 per l'esquerra?

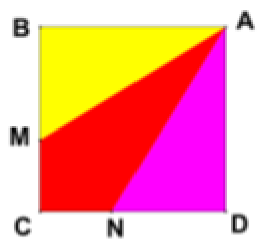
Solució: Tenim el següent quadre:

números	¿quants números?	xifres per número	llocs ocupats	acumulat
1, ············ , 9	(9 – 0 =) 9	1	9·1 = 9	9
10, ········ , 99	(99 – 9 =) 90	2	90·2 = 180	189
100, ···· , 999	(999 – 99 =) 900	3	900·3 = 2700	2889
1000, ·· , 1999	(1999 – 999 =) 1000	4	1000·4 = 4000	6889
2000, ·· , 2021	(2021 – 1999 =) 22	4	22·4 = 88	6977

Després el número té 6977 xifres.

Vegem quina xifra ocupa el lloc 2002 del número per l'esquerra. Com les 189 primeres xifres (per l'esquerra) corresponen a números d'una o dues xifres, tindrem que el lloc 2002 correspon al (2002 – 189 =) 1813 lloc dels números de tres xifres. Com 1813 = 604·3 +1, tindrem que la xifra 2002 del número correspon a la primera xifra del número que ocupa el lloc 605 (= 604 + 1) de tres xifres. És a dir, la xifra 2002 és la primera del número (605 + 99 =) 704, és a dir la xifra 2002 és un 7.

Gener 20-27: Tres germans han heretat un camp quadrat que han de dividir com indica la figura, perquè en A hi ha un pou que tots volen utilitzar. On han d'estar M i N perquè les superfícies dels triangles ΔABM i ΔAND i el quadrilàter AMCN siguen iguals?

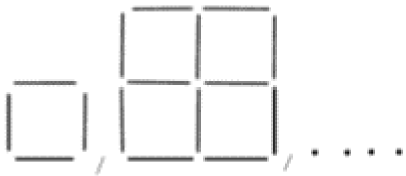


Solució: Siga l el costat del quadrat. Se exigeix que: $A_{\Delta ABM} = A_{AMCN} = A_{\Delta AND}$. Per simetria, deu complir-se que $2 \cdot A_{\Delta ACN} = A_{\Delta AND}$. Per tant:

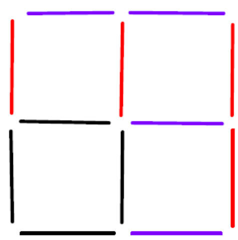
$$2 \cdot \frac{CN \cdot l}{2} = \frac{ND \cdot l}{2} \quad \Rightarrow \quad CN = \frac{ND}{2} \quad \Rightarrow \quad 2 \cdot CN = ND \quad \Rightarrow \quad l = CN + ND = 2CN + CN = 3CN$$

$$\Rightarrow \quad \mathbf{CN = CM = \frac{l}{3}}$$

Gener 21-22: S'estan construint quadrícules de costat 1, 2, ... amb escuradents de longitud un. Quants escuradents necessitarem per a fer una quadrícula de costat n?



Solució 1: La primera quadrícula consta de 4 escuradents. La segona quadrícula consta dels 4 de la primera i s'agreguen 4 (=2·2) escuradents verticals (rojos) i 4 (= 2·2) horitzontals (morats); és a dir, s'afigen (2·2 +2·2 = 2(2 + 2) =) 2·4 escuradents. La tercera quadrícula consta dels de la segona als quals s'afigen 6 (= 3·2) horitzontals i 6 (= 3·2) verticals; és a dir, s'afigen (3·2 + 3·2 = 3(2 + 2) =) 3·4 escuradents. La quarta quadrícula consta dels de la tercera quadrícula, als quals s'afig 8 (= 4·2) horitzontals i 8 (= 4·2) verticals; és a dir, s'afigen (4·2 + 4·2 = 4(2+2) =) 4·4 escuradents. I així, successivament.



És a dir:

$a_1 = (1 \cdot 4 + 0) = 4$

+8

$a_2 = (2 \cdot 4 + 4) = 12$ +4

+12 (*)

$a_3 = (3 \cdot 4 + 12) = 24$ +4

+16

$a_4 = (4 \cdot 4 + 24) = 40$

d_n es una PA de diferència 4 $\Rightarrow$ $d_n = 8 + 4(n - 1) = 4 + 4n$

Per tant:

$$\mathbf{a_n} = 4 + \sum_{k=1}^{n-1} d_k = 4 + \frac{d_1 + d_{n-1}}{2}(n-1) = 4 + \frac{8 + 4 + 4(n-1)}{2}(n-1) = 4 + 6(n-1) + 2(n-1)^2$$

$$= 4 + 6n - 6 + 2n^2 - 4n + 2 = 2n^2 + 2n = \mathbf{2n(n+1)}$$

Solució 2: En adonar-nos en (*) que a_n és una PA de segon ordre, tindrem:

$$\left.\begin{array}{l} a_1 = 4 \\ a_2 = 12 \\ a_3 = 24 \end{array}\right\} \Rightarrow \quad a_n = An^2 + Bn + C$$

Per a n = 1, tindrem: 4 = A + B + C (1)

Per a n = 2, tindrem: 12 = 4A + 2B + C (2)

Per a n = 3, tindrem: 24 = 9ª + 3B + C (3)

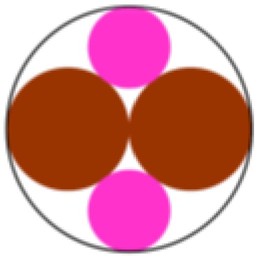
Efectuant (2) – (1), pleguem a 8 = 3A + B (4)

Efectuant (3) – (2), pleguem a 12 = 5A + B (5)

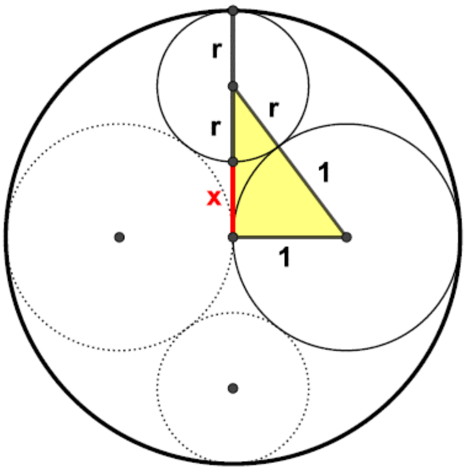
Efectuant (5) – (4), pleguem a 4 = 2A $\Rightarrow$ **A =2.**

Substituint en (4), pleguem a **B = 2**. Substituint en (1), pleguem a **C = 0.** Que porta a la mateixa solució anterior.

Gener 23-30: En la figura hi ha un total de cinc circumferències totes elles tangents entre si. Les dues de color marró tenen radi 1. Les dues de color morat són iguals. Troba el seu radi.



Solució: Siga r el radi de la circumferència més xicoteta. De la figura de baix, tindrem, d'una banda: $x + 2r = 2$ (1)



I aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle ombrejat:

$$(x + r)^2 + 1^2 = (1 + r)^2 \qquad (2)$$

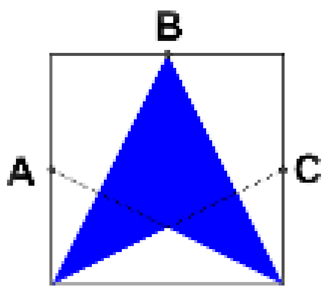
De (1) tindrem, aïllant x:

$$x = 2 - 2r$$

I, substituint en (2), pleguem a:

$$(2 - r)^2 + 1 = (1 + r)^2 \;\Rightarrow\; 4 - 4r = 2r \;\Rightarrow\; 4 = 6r \;\Rightarrow\; \mathbf{r = \frac{2}{3} m}$$

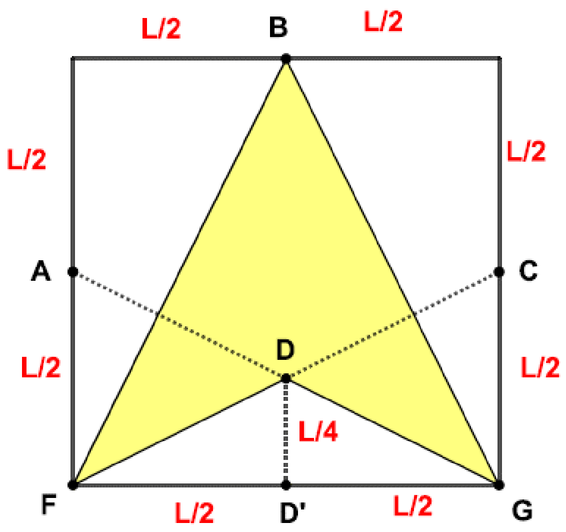
Gener 25: En la figura hi ha un quadrat de costat L. A, B i C són punts mitjans. Trobar àrea i perímetre de la zona blava



Solució: En primer lloc tenim que $\Delta FDD' \cong \Delta FCG$ (perquè, mirar figura inferior, tots dos triangles estan en posició de Tales). Per tant:

$$\frac{DD'}{\frac{L}{2}} = \frac{\frac{L}{2}}{L} \Rightarrow DD' = \frac{\frac{L^2}{4}}{L} = \frac{L}{4}$$

S



Per a àrees, tenim:

$$\left.\begin{aligned} A_{\Delta FBG} &= \frac{1}{2}L\cdot L = \frac{L^2}{2} \\ A_{\Delta FDG} &= \frac{1}{2}L\frac{L}{4} = \frac{L^2}{8} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \mathbf{A_{FBGD}} = A_{\Delta FBG} - A_{\Delta FDG}$$

$$= \frac{L^2}{2} - \frac{L^2}{8} = \frac{\mathbf{3\cdot L^2}}{\mathbf{8}}$$

Per al perímetre, tenim:

$$\mathbf{P} = 2\cdot FB + 2\cdot FD = 2\sqrt{\frac{L^2}{4} + L^2} + 2\sqrt{\frac{L^2}{4} + \frac{L^2}{16}}$$

$$= 2\frac{\sqrt{5}L}{2} + 2\frac{\sqrt{5}L}{4} = \mathbf{3\frac{\sqrt{5}L}{2}}$$

Gener 26: Un estadi té una capacitat de 25000 espectadors. Un dia, amb l'estadi quasi ple, el $\mathbf{15,\widehat{5}\%}$ dels espectadors estaven en la graderia Sud i el $\mathbf{24,\widehat{524}}\%$ eren dones. Quants espectadors podia haver-hi en l'estadi?

Solució: Siga x el nombre d'assistents. Sabem que x < 25000. També tindrem que el $15,\widehat{5}\%$ de x és un nombre natural, per la qual cosa:

$$15,\widehat{5}\% \text{ de } x = \frac{15,\widehat{5}}{100}\cdot x = \frac{\frac{155-15}{9}}{100}\cdot x = \frac{140}{900}\cdot x = \frac{7}{45}\cdot x \in \mathbb{N}$$

I com 7 no divideix a 45, x a de ser múltiple de 45.

Anàlogament, el $24,\widehat{524}\%$ de x es un número natural, por la qual cosa:

$$24,\widehat{524}\% \text{ de } x = \frac{24,\widehat{524}}{100}\cdot x = \frac{\frac{24524-24}{999}}{100}\cdot x = \frac{245}{999}\cdot x \in \mathbb{N}$$

I com 245 i 999 no tenen factors comuns, x a de ser múltiple de 999.

Com a x a de ser múltiple de 45 i múltiple de 999, ha de ser múltiple del mcm (45, 999) (= mcm (32·5; 33·37) = 33·37·5) = 4995. El menor valor possible de x és 4995. Els altres valors possibles de x són els múltiples de 4995, és a dir: (4995·2 =) 9990; (4995·3 =) 14985; (4995·4 =) 19980; (4995·5 =) 24975. Com els posteriors múltiples excedeixen a 25000, aquesta és l'última solució possible. Com, a més, l'enunciat diu que l'estadi estava quasi ple, concloem que hi havia **24975 assistents**.

Gener 28: Dani havia de sumar tots els capicues de quatre xifres, però es va oblidar de sumar un. Si va obtindre 490776, quin es va oblidar?

Solució: Designarem per $\overline{xyyx}$ al capicua que té el dígit x ($\neq 0$) en les unitats de miler i en les unitats i al dígit y en les centenes i desenes. Calculem:

$$\sum_{x,y}\overline{xyyx} = \sum_{x=1}^{9}\left(\sum_{y=0}^{9}\overline{xyyx}\right)$$

Tindrem:

$$\sum_{y=0}^{9}\overline{xyyx}=\sum_{y=0}^{9}(x\cdot 1000+y\cdot 100+y\cdot 10+x)$$

$$=\sum_{y=0}^{9}(x\cdot 1001+y\cdot 110)=x\cdot 1001\cdot 10+110\cdot\sum_{y=0}^{9}y=10010\cdot x+110\cdot\frac{0+9}{2}\cdot 10$$

$$=10010x+45\cdot 110$$

$$\sum_{x,y}\overline{xyyx}=\sum_{x=1}^{9}\left(\sum_{y=0}^{9}\overline{xyyx}\right)$$

$$=\sum_{x=1}^{9}(10010x+45\cdot 110)=10010\cdot\sum_{x=1}^{9}x+45\cdot 110\cdot 9=10010\cdot\frac{1+9}{2}\cdot 9+45\cdot 990$$

$$=10010\cdot 45+45\cdot 990=45(10010+990)=45\cdot 11000=49500$$

Per tant, el número que s'ha oblidat sumar Dani és (49500 – 490776 =) 4224

<u>Gener 29:</u> Quantes ternes de naturals diferents de la unitat (a, b, c), hi ha tals que: **$a\cdot b\cdot c = 7^{39}$**?

<u>Solució:</u> Com el 7 és primer, òbviament $a = 7^{\alpha}$, $b = 7^{\beta}$ i $c = 7^{\delta}$. Com a, b y c han de ser diferents de la unitat, els exponents deuen ser positius. Per tant, hi ha tantes ternes (a, b, c) com ternes d'exponents positius (α, β, δ) tals que $\alpha + \beta + \delta = 39$. A més:

$$(7, 7, 7^{37}) \neq (7, 7^{37}, 7)$$

Es a dir, importa el ordre. Procedim a comptabilitzar les ternes

α	β	δ	
1	1	37	
1	2	36	
1	3	35	
.	.	.	
.	.	.	37
.	.	.	
1	36	2	
1	37	1	
2	1	36	
2	2	35	
2	3	34	
.	.	.	
.	.	.	36
.	.	.	
2	35	2	
2	36	1	

3	1	35	
3	2	34	
.	.	.	35
.	.	.	
3	34	2	
3	35	1	
.	.	.	
.	.	.	
.	.	.	
36	1	2	2
36	2	1	
37	1	1	1

En total:

$$1 + 2 + 3 + \cdots + 36 + 37 = \frac{1 + 37}{2} \cdot 37 = 703$$