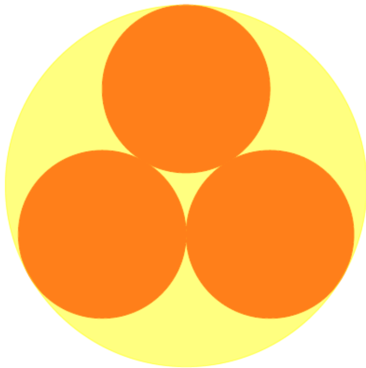
# SOLUCIONS FEBRER 2021

PROBLEMES DE LA CMO 1972 I 1973. (CANADIAN MATHEMATICAL OLYMPIAD). 16-18 ANYS. PREPARACIÓ OME. ORGANITZACIÓ: RAFAEL MARTÍNEZ CALAFAT. Professor jubilat.

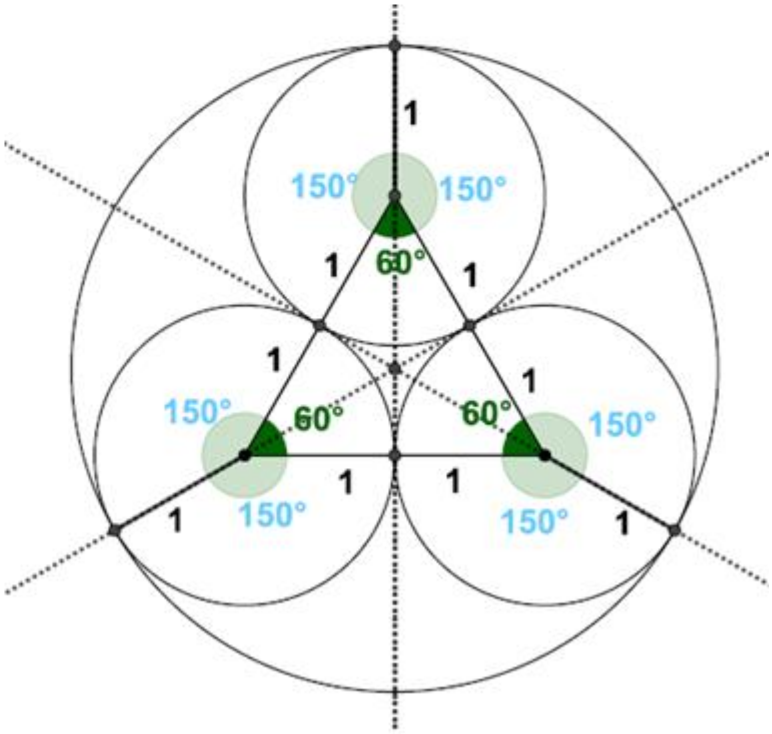
https://cms.math.ca/Competitions/CMO/

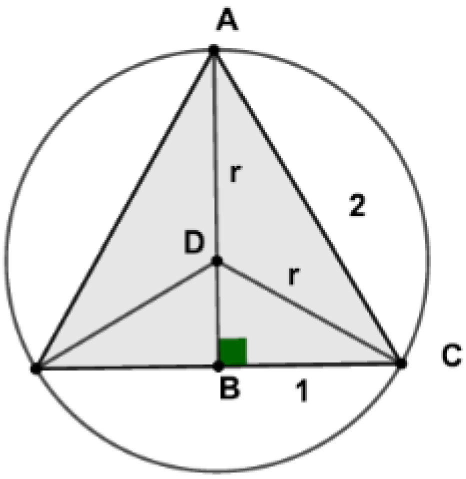
**Febrer 1-2:** Siguen donades tres circumferències de ràdio unitat, cadascuna d'elles tangent exterior a les altres dues. Trobar el radi de la circumferència que circumscriu a les tres circumferències inicials



**Solució:** Els centres dels tres cercles de ràdio unitat formen un triangle amb costats 2, i per tant equilàter. D'ací, que, els angles interiors al triangle siguen de 60° i (per simetria del cercle gran) els angles exteriors són de 150°.

El radi del cercle gran (R) és el radi del cercle format pels tres vèrtexs del triangle (r) més 1




Trobem, doncs, el radi d'aquest cercle intern. En la figura de la dreta tenim que ΔABC és un triangle 30°-60°-90°, per la qual cosa els seus costats estan en la proporció 1:√3:2. A més (bé, per geometria bàsica, bé per la semblança ΔABC ≅ ΔDCB):

$$r = \frac{2}{3}AB = \frac{2}{3}\sqrt{3} \quad \Rightarrow \quad R = 1 + \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}+2}{\sqrt{3}} = \frac{3+2\sqrt{3}}{3}$$

**Febrer 3:** Provar que 10201 és compost en qualsevol base major que 2. Provar que 10101 és compost en qualsevol base.

**Solució:** Per a la primera part, s'exigeix que la base del sistema de numeració siga major que 2 perquè tinga sentit el dígit 2 en l'expressió del número proporcionat. Tindrem:

$$10201_a = 1 \cdot a^4 + 2 \cdot a^2 + 1 = (a^2+1)^2 = (101_a)^2 = 101_a \cdot 101_a$$

D'on, $10201_a$ és compost.

Per a la segona part del problema, haurem de demostrar que $10101_a$ es pot factoritzar. Com:

$$10101_a = a^4 + a^2 + 1$$

podem considerar l'expressió anterior com un polinomi en a de quart grau (amb coeficient principal la unitat), que es factoritza com a producte de polinomis de grau 1 o de grau 2 amb discriminant negatiu. Com no hi ha arrels reals, no hi ha polinomis de grau 1

$$\left(x^4 + x^2 + 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad x = \frac{-1 \pm \sqrt{1-4}}{2} \notin \mathbb{R}\right)$$

Posem :

$$a^4 + a^2 + 1 = (a^2 + Aa + B)\cdot(a^2 + Ca + 1) = a^4 + (C + A)a^3 + (D + AC + B)a^2 + (AD + BC)a + BD$$

Amb el que:

$$\left.\begin{array}{c} C + A = 0 \\ D + AC + B = 1 \\ AD + BC = 0 \\ BD = 1 \end{array}\right\}$$

De la primera C = – A, i substituint en les altres tres equacions, arribem a:

$$\left.\begin{array}{c} D - A^2 + B = 1 \\ AD - AB = 0 \\ BD = 1 \end{array}\right\} \Rightarrow \; A(D - B) = 0$$

Si A = 0, aleshores C = 0 i el sistema esdevé a:

$$\left.\begin{array}{c} D + B = 1 \\ DB = 1 \end{array}\right\} \text{que no té solució en els reals.}$$

Si $A \neq 0$, aleshores D = B i amb aquest supòsit:

$$\left.\begin{array}{c} 2D - A^2 = 1 \\ B^2 = 1 \end{array}\right\}$$

De la segona equació, tenim $B = \pm 1$.

Si B = 1, aleshores D = 1, que porta (en la primera equació) a $A = \pm 1$ i $C = \mp 1$

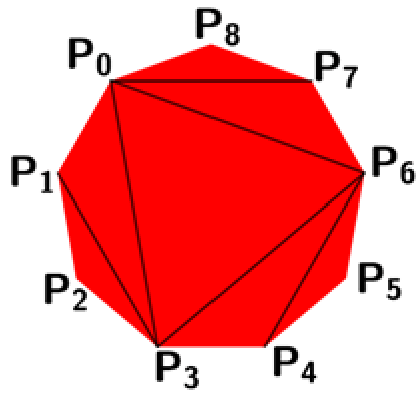
Si B = – 1 = D, aleshores $-2 - 1 = A^2$, que és impossible.

Per tant:

$$\begin{aligned} a^4 + a^2 + 1 = (a^2 - a + 1)\cdot(a^2 + a + 1) \;\Rightarrow\; 10101_a &= \big((a-1)a + 1\big)\cdot(a^2 + a + 1) \\ &= (a-1)1_a \cdot 111_a \end{aligned}$$

(Nota: El número $(a-1)1_a$ és el número que, expressat en base a, té el dígit a – 1 en las potencies de $a^1$ i al dígit 1 en la potencia de $a^0$)

**<u>Febrer 4-5:</u>** La figura mostra un polígon convex amb 9 vèrtexs. Les 6 diagonals dibuixades ho disseccionen en 7 triangles: $P_0, P_1, P_2, \cdots, P_6, P_7, P_8$. De quantes maneres poden aquests triangles ser nomenats amb els símbols $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3, \Delta_4, \Delta_5, \Delta_6, \Delta_7$ de manera que el triangle $\Delta_i$ tinga per vèrtex a $P_i$ $\forall i \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$. Justificar la resposta.




**<u>Solució:</u>** Hem de nomenar els triangles amb les etiquetes $\Delta_i$ de manera que un triangle rep l'etiqueta $\Delta_i$ sii $P_i$ és un vèrtex del triangle. Com només hi ha un triangle amb vèrtex $P_2$ ($P_5$) només eixos triangles poden rebre les etiquetes $\Delta_2$ ($\Delta_5$) (figura 1). Abans d'aquesta assignació, hi havia dos triangles amb vèrtex $P_1$ ($P_4$) dels que queda només un. Aquest triangle rep l'etiqueta $\Delta_1$ ($\Delta_4$) (figura 2). Dels triangles amb vèrtex $P_3$ només queda un, que rep l'etiqueta $\Delta_3$ (figura 3). Queda un triangle amb vèrtex $P_6$ que rep l'etiqueta $\Delta_6$. Finalment només queda un triangle que té a $P_7$ per vèrtex, que rep l'etiqueta $\Delta_7$

Figura 1

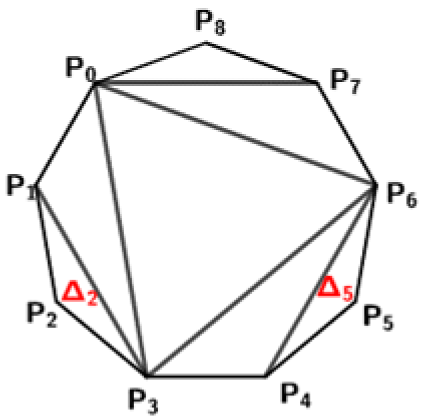
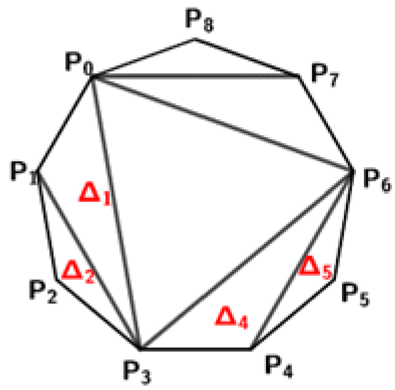



Figura 2




Només hi ha una manera d'etiquetar els triangles de manera que es complisca que el triangle $\Delta_i$ tinga per vèrtex a $P_i$ $\forall i \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$

Figura 3

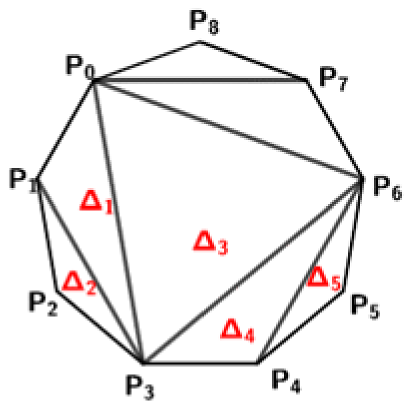
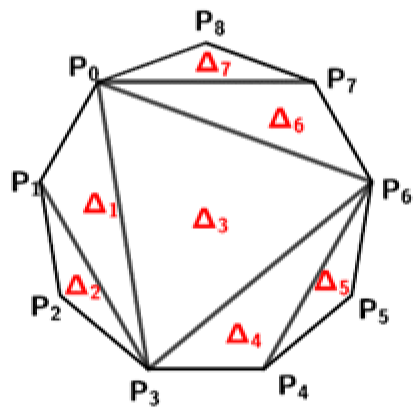



Figura 4




**<u>Febrer 6:</u>** Trobeu el major enter que compleix les dues inequacions:

$$4x + 13 < 0$$

$$x^2 + 3x > 16$$

**<u>Solució:</u>** Per a la inequació lineal tenim:

$$4x + 18 \leq 0 \quad \Leftrightarrow \quad x \leq -\frac{13}{4} \quad \Leftrightarrow \quad x \in \left]-\infty; -\frac{13}{4}\right[$$

Per a la inequació quadràtica, tenim:

$$x^2 + 3x > 16 \quad \Leftrightarrow \quad x^2 + 3x - 16 > 0$$

Siga $y = x^2 + 3x + 16$. La seua gràfica és una paràbola dirigida cap amunt ($a = 1 > 0$) i com:

$$x^2 + 3x - 16 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = \frac{-3 \pm \sqrt{73}}{2}$$

Tindrem:

$$x^2 + 3x > 16 \quad \Leftrightarrow \quad x \in \left]-\infty;\ -\frac{3+\sqrt{73}}{2}\right[ \cup \left]\frac{-3+\sqrt{73}}{2};\ +\infty\right[$$

Es compleixen les dues inequacions en $x \in \left]-\infty;\ -\frac{3+\sqrt{73}}{2}\right[$. Per tant, el major enter que compleix les dues inequacions és – 6

**<u>Febrer 8:</u>** Proveu que la equació:

**$x^3 + 11^3 = y^3$**

no té solucions en els enters positius.

**<u>Solució 1:</u>** https://ca.wikipedia.org/wiki/Darrer_teorema_de_Fermat

*L'últim teorema de Fermat, conegut actualment també com a teorema de Wiles-Fermat, afirma que l'equació diofántica*

$$x^n + y^n = z^n$$

*no té cap solució sencera per a n> 2 i sent x, y i z diferents de zero.*

*És un dels teoremes més famosos de la història de les matemàtiques i fins a l'any 1995 no es disposava d'una demostració (i, per tant, en rigor es deia conjectura de Fermat). Fixem-nos que quan n = 2 l'equació equival al teorema de Pitàgores i òbviament té infinites solucions.*

*El matemàtic francès Pierre de Fermat va ser el primer a proposar el teorema, però desgraciadament la demostració que suposadament havia realitzat no s'ha trobat mai. Fermat només va deixar escrit en un marge de la seua còpia de l'Aritmètica de Diofanto el plantejament del teorema i l'afirmació que havia trobat una demostració del teorema. En les seues pròpies paraules:*

*Cubum autem in duos cubs, aut quadrats- quadratum in duos quadrats- quadratos, et generalitat nul·lament in infinitum ultra quadratum potestats in duos eiusdem nominis feixos aquest Divideix cuius rei Demonstration mirabilis sane detexi. Hanc marginat exiguitas senar caperet*

*és a dir,*

*«És impossible que un cub siga la suma de dos cubs, que una potència quarta siga la suma de dues potències quartes i, en general, que qualsevol número que siga una potència superior a dues siga la suma de dues potències del mateix valor. He descobert una demostració veritablement meravellosa d'aquesta proposició, però aquest marge és massa estret perquè càpia.»*

*L'afirmació de Fermat es va convertir immediatament un problema que molts matemàtics van intentar resoldre. A poc a poc van ser sorgint demostracions parcials (per exemple, Sophie Germain va demostrar el teorema en el cas en què n és un nombre primer i 2n + 1 també ho és) o demostracions de teoremes associats a aquest. També es va demostrar el teorema per a valors molt determinats de n: Euler ho va demostrar per a n = 3, el mateix Fermat va deixar constància de la seua demostració per a n = 4, Legendre i Dirichlet per a n = 5 i aquest últim també per a n = 14.*

*En 1993 Andrew Wiles va anunciar la demostració general del teorema, demostració que va resultar errònia, però que ell mateix va corregir cap a finals de 1994. [1] Amb aquesta demostració, que implica l'ús de funcions* *el·líptiques i representacions de Galois, un dels més famosos problemes de la matemàtica quedava tancat. No obstant això, val la pena preguntar-se si realment Fermat va aconseguir una demostració del seu teorema i, en cas afirmatiu, quin mètode va utilitzar, ja que el camí seguit per Wiles utilitza eines matemàtiques inexistents en l'època de Fermat.*

**Solució 2:** Tindrem:

$$x^3 + 11^3 = y^3; \quad y^3 - x^3 = 11^3; \quad (y - x) \cdot (y^2 + yx + x^2) = 11^3$$

I per la unicitat de la descomposició factorial en nombres primers caben els següents casos:

$$\left.\begin{matrix} y - x = 1 \\ y^2 + xy + x^2 = 11^3 \end{matrix}\right\}(1) \quad \left.\begin{matrix} y - x = 11 \\ y^2 + xy + x^2 = 11^2 \end{matrix}\right\}(2) \quad \left.\begin{matrix} y - x = 121 \\ y^2 + xy + x^2 = 11 \end{matrix}\right\}(3) \quad \left.\begin{matrix} y - x = 11^3 \\ y^2 + xy + x^2 = 1 \end{matrix}\right\}(4)$$

Per al cas (1), tenim aïllant y de la primera equació i substituint en la segona:

$$(1 + x)^2 + x(x + 1) + x^2 = 1331; \quad 3x^2 + 3x - 1330 = 0; \quad x = \frac{-3 \pm \sqrt{15969}}{6} \notin \mathbb{Z}$$

Per al cas (2), tenim aïllant y de la primera equació i substituint en la segona:

$$(11 + x)^2 + x(x + 11) + x^2 = 121; \quad 3x^2 + 33x = 3x \cdot (x + 11) = 0; \quad \begin{cases} 3x = 0; \quad x = 0 \notin \mathbb{Z}^+ \\ x = -11 \notin \mathbb{Z}^+ \end{cases}$$

Per al cas (3), tenim aïllant y de la primera equació i substituint en la segona:

$$(121 + x)^2 + x(x + 121) + x^2 = 11; \quad 3x^2 + 363x + 14630 = 0; \quad x = \frac{-363 \pm \sqrt{-43791}}{6} \notin \mathbb{R}$$

Per al cas (4), tenim aïllant y de la primera equació i substituint en la segona:

$$(1331 + x)^2 + x(x + 1331) + x^2 = 1; \quad 3x^2 + 2992x + 1771560 = 0; \quad x = \frac{-2992 \pm \sqrt{-12306656}}{6} \notin \mathbb{R}$$

Amb això, tenim que les úniques solucions en $\mathbb{Z}$ de l'equació proporcionada són x = – 11 i y = 0

**Febrer 9:** Si a i b són reals diferents, proveu que hi ha enters m i n tals que es compleix

**am + bn < 0**

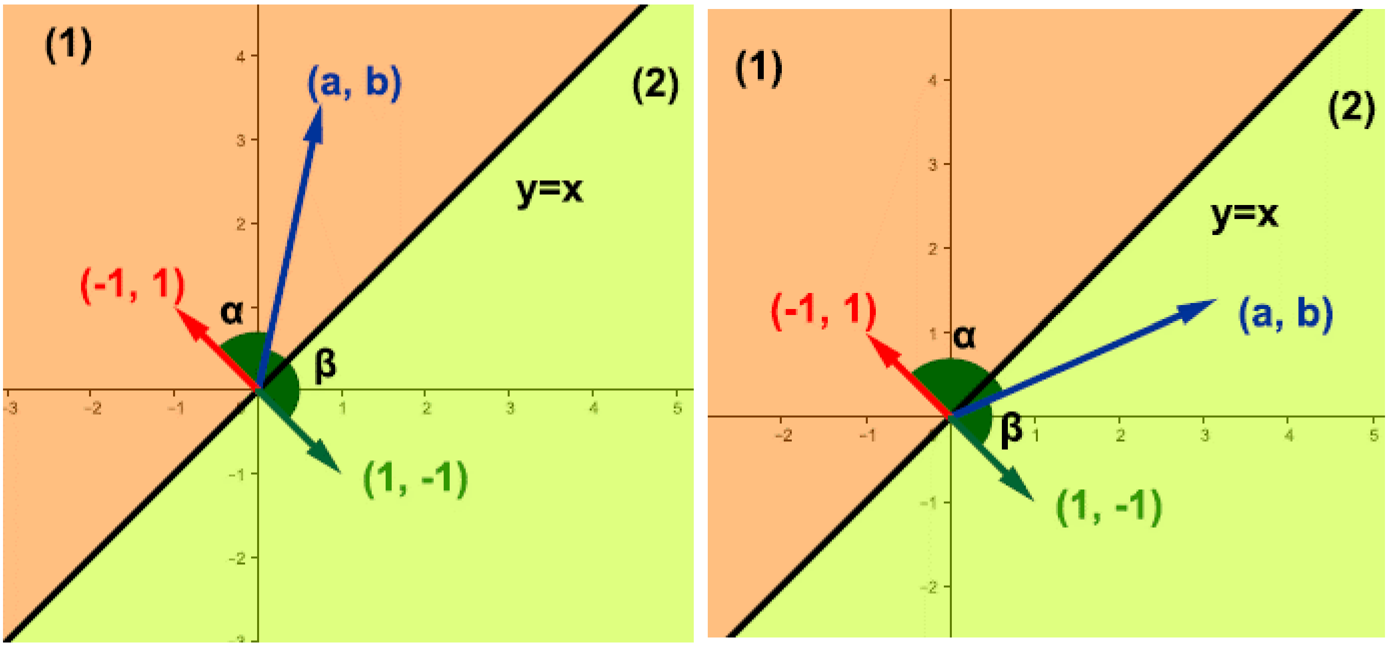
**bm + an > 0**

**Gènesi de la solució:** Recordem que donats dos vectors $\vec{u} = (a, b)$ y $\vec{v} = (n, m)$, es defineix:

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \begin{cases} = \|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\| \cdot \cos\left(\widehat{\vec{u}, \vec{v}}\right) \\ = an + bm \end{cases}$$

Com $\|\vec{u}\|$, $\|\vec{v}\| \geq 0$, el signe de $\vec{u} \cdot \vec{v}$, depen del signe de $\cos\left(\widehat{\vec{u}, \vec{v}}\right)$, que, a la vegada, depèn de $\widehat{\vec{u}, \vec{v}}$. Si $\widehat{\vec{u}, \vec{v}} \in ]0°, 90°[ \Rightarrow \vec{u} \cdot \vec{v} > 0$. Si $\widehat{\vec{u}, \vec{v}} \in ]90°, 180°[ \Rightarrow \vec{u} \cdot \vec{v} < 0$. Amb el que , donat $\vec{u} = (a, b)$, (a ≠ b) hi ha que buscar un vector de components enteres (m, n), de manera que forme menys de 90° amb (a, b) i tal que (n, m) forme més de 90° amb (a, b).

Com a ≠ b, (a, b) està en la regió (1) o en la regió (2) (mirar figura adjunta). Si (a, b) està en la regió (1) aleshores podem agafar (m, n) = (1, – 1 ), ja que en aquest cas, (a, b) i (m, n) formen un angle major de 90° i aleshores (a, b)·(1, – 1) = a – b < 0 i (a, b)·(– 1, 1) = b – a > 0. Els mateixos vectors serveixen per al cas (a, b) està en la regió (2), es a dir, si a > b, perquè en aquest cas (a, b) forma un angle major de 90° amb (– 1, 1) i un angle menor de 90° amb (1, – 1)




**Solució:** Donats a i b. Suposem a > b, aleshores:

0 > am +bn = (a, b)·(m, n) = (a, b)·(– 1, 1) = b – a ⇔ – b + a = (a , b)·(1, – 1) = (a, b) · (n, m) = an + bm > 0

Si a < b, aleshores:

0 < an +bm = (a, b)·(n, m) = (a, b)·(– 1, 1) = b – a ⇔ – b + a = (a , b)·(1, – 1) = (a, b) · (m, n) = am + bn < 0

**Febrer 10:** Quin és el màxim nombre de termes d'una progressió geomètrica de naturals de raó r > 1 que estan entre 100 i 1000 incloent tots dos?

**Solució:** Siga r la raó de la progressió geomètrica. Si considerem $r \in \mathbb{N}$, es a dir $r \in \{2, 3, 4, 5, \cdots\}$, òbviament la progressió ha de contenir al número 100 (si se excedeix el número 100 hi ha menys termes fins 1000 que començant des de 100). El major nombre de termes surt per a $r = 2$

$$a_i = 100;\ \ a_{i+1} = 200;\ \ a_{i+2} = 400;\ \ a_{i+3} = 800;\ \ \text{(quatre termes)}$$

Considerem ara $r = \frac{m}{n} > 1$ (amb n, m $\in \mathbb{N}$). El primer terme de la progressió geomètrica que estiga en el interval considerat deu ser una potència el més propera possible i major que 100 del denominador de r. Com:

$$2^4 = 16;\ \ 2^5 = 32;\ \ 2^6 = 64;\ \ 2^7 = 128$$

escollim a 128 com el primer element de la progressió geomètrica que estiga en el interval considerat. El menor valor possible per a n es 2 i el valor per a m deu ser major que 2: 3, 4, 5, ⋯ . De entre aquestos, degut que volem que haja el major nombre possible de termes dins de [100; 1000], escollim com òptim m = 3. Tindrem, aleshores, $r = \frac{3}{2}$

$$a_i = 128;\ \ a_{i+1} = 192;\ \ a_{i+2} = 288;\ \ a_{i+3} = 432;\ \ a_{i+4} = 648;\ \ a_{i+5} = 972; \text{(seis términos)}$$

Si provem amb el següent denominador: 3 (y degut a que r > 1 i deu ser el més baix possible per a contenir el major nombre de termes dins del rang 100-1000) i amb el numerador 4, es a dir amb $r = \frac{4}{3}$ tindrem:

Altra vegada el primer terme de la progressió geomètrica deu ser major o igual a 100 i una potencia del denominador 3

$$3^4 = 81 \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} 3^5 = 243 \\ 2 \cdot 3^4 = 162 \end{cases}$$

$$r = \frac{4}{3}; \quad a_i = 243; \quad a_{i+1} = 324; \quad a_{i+2} = 432; \quad a_{i+3} = 576; \quad a_{i+4} = 768; \quad \text{(cinc termes)}$$

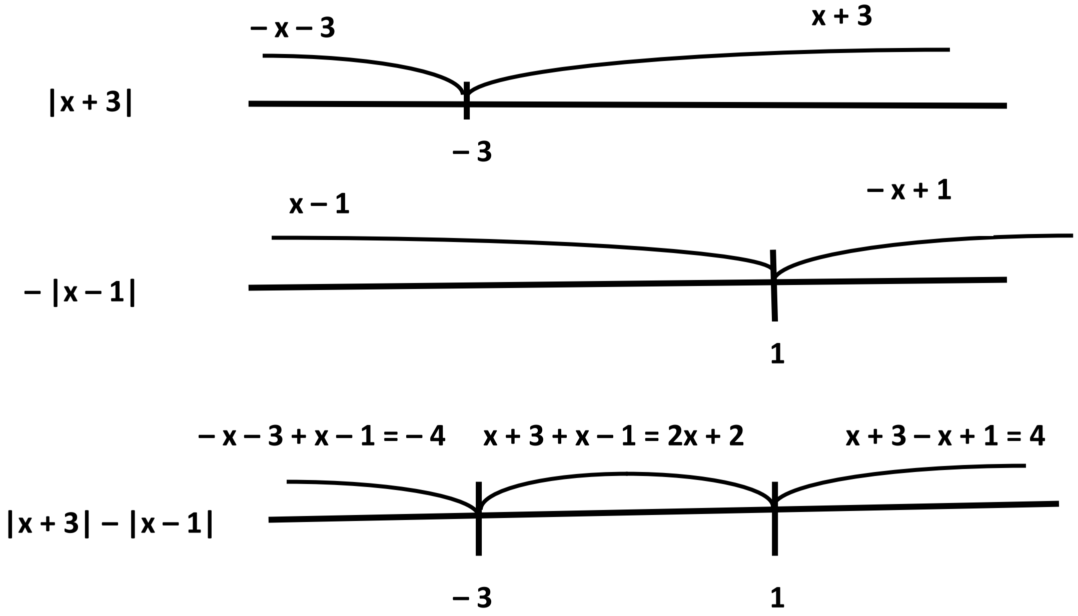
$$r = \frac{4}{3}; \quad a_i = 162; \quad a_{i+1} = 216; \quad a_{i+2} = 288; \quad a_{i+3} = 384; \quad a_{i+4} = 512; \quad a_{i+5} = \frac{2048}{e} = 682,\hat{6} \quad \text{(cinc termes)}$$

D'entre els possibles r amb denominador 4 escolliríem la de numerador 5. Com busquem que haja el major nombre possible de termes naturals i dins del rang 100-1000 el primer terme deu contenir el factor 4 al menys cinc o sis vegades. Com $4^5$ = 1024 ja no cap considerar més casos. En definitiva, **la progressió geomètrica que té més termes naturals dins del rang 100-1000 surt amb r = 3/2 i $a_1$ = 128 que conté sis termes naturals en el rang 100-1000**

**Febrer 11:** Trobeu els reals que compleixen la equació:

**|x + 3| - |x – 1| = x + 1**

**Solució:** Tenim:




Per tant:

$$\text{Si } x \le -3 \;\Rightarrow\; |x+3| - |x-1| = x+1 \;\Rightarrow\; -4 = x+1 \;\Rightarrow\; \mathbf{x = -5}$$

$$\text{Si } x \in \,]-3; 1[ \;\Rightarrow\; |x+3| - |x-1| = x+1 \;\Rightarrow\; 2x+2 = x+1 \;\Rightarrow\; \mathbf{x = -1}$$

$$\text{Si } x \ge 1 \;\Rightarrow\; |x+3| - |x-1| = x+1 \;\Rightarrow\; 4 = x+1 \;\Rightarrow\; \mathbf{x = 3}$$

**Febrer 12-13:** Per a qualsevol natural siga:

$$\mathbf{h(n) = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}}$$

Proveu que per a n = 2, 3, 4, ···· es compleix:

$$\mathbf{n}+\sum_{\mathbf{i=1}}^{\mathbf{n-1}}\mathbf{h(i)}=\mathbf{n}\cdot\mathbf{h(n)}\qquad(*)$$

**Solució:** Expressem el primer membre de (*) com files:

Com la suma és associativa podem alterar l'ordre dels sumands sense alterar el valor de la suma.

Sumem per columnes:

$$n\left\{\begin{array}{lcccccccc}
 & \multicolumn{8}{c}{\overbrace{\hspace{12cm}}^{n}} \\
n = & 1+ & 1+ & 1+ & \ldots & \ldots & +1 & +1 & +1 \\
h(1) = & 1 & & & & & & & \\
h(2) = & 1+ & \frac{1}{2} & & & & & & \\
h(3) = & 1+ & \frac{1}{2}+ & \frac{1}{3} & & & & & \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & & & & \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & & & & \\
h(n-2) & 1+ & \frac{1}{2}+ & \frac{1}{3}+ & \ldots & \ldots & +\frac{1}{n-2} & & \\
h(n-1) = & 1+ & \frac{1}{2}+ & \frac{1}{3}+ & \ldots & \ldots & +\frac{1}{n-2} & +\frac{1}{n-1} &
\end{array}\right.$$

$$n+\sum_{i=1}^{n-1}h(i)= \; n\cdot 1+ \quad n\cdot\frac{1}{2}+ \quad n\cdot\frac{1}{3}+ \quad \ldots \quad \ldots \quad +n\cdot\frac{1}{n-2} \quad +n\cdot\frac{1}{n-1} \quad +n\cdot\frac{1}{n}$$

Es a dir:

$$\mathbf{n}+\sum_{\mathbf{i=1}}^{\mathbf{n-1}}\mathbf{h(i)}=n\cdot 1+n\cdot\frac{1}{2}+n\cdot\frac{1}{3}+\cdots+n\cdot\frac{1}{n-2}+n\cdot\frac{1}{n-1}+n\cdot\frac{1}{n}$$
$$=n\cdot\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n-2}+\frac{1}{n-1}+\frac{1}{n}\right)=\mathbf{n}\cdot\mathbf{h(n)}$$

**Febrer 15:** Expressar 100000 com a producte dos enters cap dels quals siga múltiple de 10.

**Solució:** Tindrem:

$$100000=10^5=(2\cdot 5)^5=2^5\cdot 5^5=32\cdot 3125=(-32)\cdot(-3125)$$

Qualsevol altra agrupació dels factors primers de $10^5$ porta a expressar $10^5$ com a producte d'enters, un dels quals és múltiple de 10.

**Febrer 16-17:** Durant una certa campanya política, p promeses diferents es realitzen entre els partits polítics participants. Si:

1.- Diversos partits poden fer la mateixa promesa.

2.- Qualssevol dos partits tenen almenys una promesa en comú.

3.- No hi ha dos partits amb exactament les mateixes promeses.

Proveu que no hi ha més de $2^{p-1}$ partits participants.

**Solució:** Si hi ha dues promeses: 1 i 2, llavors, el sistema de partits que compleix les tres condicions de l'enunciat són: $\{p_1, p_{12}\}$ (els subíndexs fan referència a les promeses publicitades per cada partit). Si afegim un altre partit: $p_2$, llavors no es compleix la segona condició. És a dir, per a dues promeses, hi ha com a molt, $2^{2-1} = 2^1 = 2$ partits participants que compleixen les tres condicions de l'enunciat.

Suposem 3 promeses: 1, 2 i 3, llavors al sistema màxim de dues promeses: $\{p_1, p_{12}\}$ li afegim en cada subíndex la promesa afegida i aconseguim $\{p_1, p_{12}, p_{13}, p_{123}\}$. Tal sistema de partits compleix els tres requisits i és el màxim perquè si per exemple afegim un altre partit, per exemple, $p_{23}$ no es compleix la segona condició. És a dir, per a tres promeses, hi ha com a molt, $2^{3-1} = 2^2 = 4$ partits participants que compleixen les tres condicions de l'enunciat.

Suposem quatre promeses. Llavors al sistema maximal per a tres promeses $\{p_1, p_{12}, p_{13}, p_{123}\}$, li afegim en cada subíndex la promesa afegida i aconseguim $\{p_1, p_{12}, p_{13}, p_{123}, p_{14}, p_{124}, p_{134}, p_{1234}\}$. Tal sistema de partits compleix els tres requisits i és el màxim perquè si per exemple afegim un altre partit, per exemple, $p_{23}$ no es compleix la segona condició. És a dir, per a quatre promeses, hi ha com a molt, $2^{4-1} = 2^3 = 8$ (multipliquem per dues el sistema maximal anterior) partits participants que compleixen les tres condicions de l'enunciat.

Una vegada vist el mecanisme de generació del sistema de partits, passem a la demostració del problema. Per inducció.

Per a 2, 3 i 4 promeses, ja ho tenim demostrat. Suposem la hipòtesi demostrada per a $\{1, 2, \cdots, i\}$ promeses. És a dir, suposem que per a i promeses tenim que el sistema anterior genera un conjunt de $2^{i-1}$ partits que compleix els tres requisits i que aquest sistema és maximal. Suposem que afegim la $i + 1$ promesa i generem el sistema de doble nombre de partits per a i promeses afegint als partits originals els partits afegint a cadascun d'ells la $i + 1$ promesa com a subíndex. Aquest nou sistema de partits compleix els tres requisits de l'enunciat:

1. És òbvia.
2. Donats dos partits, eliminem d'ells la promesa $i + 1$ (si algun ho tinguera) i llavors tenim dos partits del sistema anterior que han de complir la segona condició.
3. És òbvia.

A més, el nou sistema és maximal perquè en afegir un nou partit es deixa de complir alguna de les tres condicions de l'enunciat.

**Febrer 18-19:** Proveu que $\forall$n natural

$$\mathbf{\frac{1}{n} = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n \cdot (n+1)}}$$

Proveu que $\forall$n natural major que 1, $\exists$i, j naturals tals que:

$$\mathbf{\frac{1}{n} = \frac{1}{i \cdot (i+1)} + \frac{1}{(i+1) \cdot (i+2)} + \cdots + \frac{1}{j \cdot (j+1)}}$$

**Solució:** La primera part és òbvia:

$$\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n \cdot (n+1)} = \frac{n}{(n+1) \cdot n} + \frac{1}{n \cdot (n+1)} = \frac{n+1}{n \cdot (n+1)} = \frac{1}{n}$$

La segona part no és excessivament complicada. Per a n = 2

$$\frac{1}{2}=\frac{1}{1\cdot 2}=\frac{1}{(1+1)\cdot 1}\qquad (\mathbf{i}=\mathbf{j}=\mathbf{1})$$

I per a n > 2:

$$\frac{1}{n}=\frac{1}{n\cdot(n+1)}+\frac{1}{n+1}=\left\{\frac{1}{n+1}=\frac{1}{(n+1)\cdot(n+2)}+\frac{1}{n+2}\right\}=\frac{1}{n\cdot(n+1)}+\frac{1}{(n+1)\cdot(n+2)}+\frac{1}{n+2}$$

$$=\left\{\frac{1}{n+2}=\frac{1}{(n+2)\cdot(n+3)}+\frac{1}{n+3}\right\}$$

$$=\frac{1}{n\cdot(n+1)}+\frac{1}{(n+1)\cdot(n+2)}+\frac{1}{(n+2)\cdot(n+3)}+\frac{1}{n+3}=\cdots\cdots$$

$$=\left\{\begin{array}{c}\text{apliquem la primera}\\ \text{part } n^2-2n \text{ vegades}\\ (n>2\ \Rightarrow\ n^2-2n>0)\end{array}\right\}$$

$$=\frac{1}{n\cdot(n+1)}+\frac{1}{(n+1)\cdot(n+2)}+\frac{1}{(n+2)\cdot(n+3)}+\cdots+\frac{1}{(n^2-n-1)\cdot(n^2-n)}$$

$$+\frac{1}{n^2-n}=\left\{\frac{1}{n^2-n}=\frac{1}{n\cdot(n-1)}\right\}$$

$$=\frac{1}{n\cdot(n-1)}+\frac{1}{n\cdot(n+1)}+\frac{1}{(n+1)\cdot(n+2)}+\cdots+\frac{1}{(n^2-n-1)\cdot(n^2-n)}$$

$$=\left\{\begin{array}{c}\mathbf{i}=\mathbf{n}-\mathbf{1}\\ \mathbf{j}=\mathbf{n}^{\mathbf{2}}-\mathbf{n}-\mathbf{1}\end{array}\right\}=\frac{1}{i\cdot(i+1)}+\frac{1}{(i+1)\cdot(i+2)}+\cdots+\frac{1}{j\cdot(j+1)}$$

Per exemple:

$$\frac{1}{3}=\left\{\begin{array}{c}i=n-1=3-1=2\\ j=n^2-n-1=9-4=5\end{array}\right\}=\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\frac{1}{4\cdot 5}+\frac{1}{5\cdot 6}=\frac{1}{6}+\frac{1}{12}+\frac{1}{20}+\frac{1}{30}$$

**<u>Febrer 20:</u>** Avaluar l'expressió:

$$\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{\log_2 36}}+\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{\log_3 36}}$$

**<u>Solució:</u>** Tenim:

$$\frac{1}{\log_2 36}+\frac{1}{\log_3 36}=\frac{\log_2 2}{\log_2 36}+\frac{\log_3 3}{\log_3 36}=\left\{\begin{array}{c}\text{canvi de base}\\ \log_a x=\dfrac{\log_b x}{\log_b a}\end{array}\right\}=\log_{36} 2+\log_{36} 3=\log_{36}(2\cdot 3)$$

$$\log_{36} 6=z\iff 36^z=6\iff z=\frac{1}{2}$$

Per tant:

$$\frac{1}{\log_2 36}+\frac{1}{\log_3 36}=\log_{36}(2\cdot 3)=\frac{1}{2}$$

**<u>Demostració errònia:</u>**

$$\left.\begin{array}{l}\log_2 36=x\Leftrightarrow 2^x=36\\ \log_3 36=y\Leftrightarrow 3^y=36\end{array}\right\}\Rightarrow\ 2^x\cdot 3^y=36^2=(2^2\cdot 3^2)^2$$

$$=2^4\cdot 3^4\underset{(*)}{\Rightarrow}\left\{\begin{array}{l}x=4\\ y=4\end{array}\right.\Rightarrow\ \frac{1}{\log_2 36}+\frac{1}{\log_3 36}=\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{1}{4}+\frac{1}{4}=\frac{1}{2}$$

La demostració en errònia en el pas (*). Aquest pas només és correcte si per endavant x, y $\in\mathbb{N}$. Cosa que no es compleix quan, amb anterioritat, hem escrit: $2^x = 36 = 2^2\cdot 3^2$

**<u>Febrer 22-23:</u>** Siguen $a_1$, $a_2$ ,..., $a_n$ reals no negatius. Definim M com la suma de tots els productes de parells $a_i \cdot a_j$ (i < j) es a dir:

$$M = a_1 \cdot (a_2 + a_3 + \cdots + a_n) + a_2 \cdot (a_3 + \cdots + a_n) + \cdots + a_{n-1} \cdot a_n$$

Proveu que el quadrat d'algun dels números $a_1$, $a_2$, ..., $a_n$ no excedeix a $\frac{\mathbf{2M}}{\mathbf{n \cdot (n-1)}}$

**<u>Solució:</u>** Per reducció a l'absurd. Suposem que:

$$\forall i,\ \ a_i^2 > \frac{2M}{n \cdot (n-1)}$$

Traient arrels quadrades positives (ja que els $a_i$ són no negatius)

$$a_i > \sqrt{\frac{2M}{n \cdot (n-1)}}$$

Per tant:

$$\forall i, j\ \ (1 \le i < j \le n)\ \ a_i \cdot a_j > \frac{2M}{n \cdot (n-1)}$$

I aleshores:

$$\begin{aligned}\mathbf{M} = a_1 \left(\overbrace{a_2 + a_3 + \cdot\cdot\ + a_n}^{n-1}\right) + a_2 \left(\overbrace{a_3 + a_4 + \cdot\cdot\ + a_n}^{n-2}\right) + \cdots + a_{n-1} \cdot a_n \\ > \frac{2M}{n \cdot (n-1)}(n-1) + \frac{2M}{n \cdot (n-1)}(n-2) + \cdot\cdot\ + \frac{2M}{n \cdot (n-1)} \cdot 1 \\ = \frac{2M}{n \cdot (n-1)}\big((n-1) + (n-2) + \cdots + 1\big) = \frac{2M}{n \cdot (n-1)} \frac{n-1+1}{2}(n-1) = \mathbf{M}\end{aligned}$$

És a dir, M > M, que és un absurd. Per tant:

$$\exists i \in \{1, 2, \cdots, n\}\ |\ \ a_i^2 \le \frac{2M}{n \cdot (n-1)}$$

**<u>Febrer 24:</u>** Una reixeta 3x3 s'emplena amb números positius de manera que el producte dels números de cada fila i cada columna és 2 i el producte dels 4 números de cadascuna de les 4 reixetes 2x2 és 4. quin és el número que hi ha en la casella central de la reixeta?

**<u>Solució:</u>** Tenim:

| | | | |
|---|---|---|---|
| A | B | C | 2 |
| D | E | F | 2 |
| G | H | I | 2 |
| 2 | 2 | 2 | |

Multiplicant els quatre números de totes les quatre reixetes 2x2 tenim:

$$(2^2)^4 = (\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} \cdot \mathbf{D} \cdot \mathbf{E}) \cdot (\mathbf{B} \cdot \mathbf{C} \cdot \mathbf{E} \cdot \mathbf{F}) \cdot (\mathbf{D} \cdot \mathbf{E} \cdot \mathbf{G} \cdot \mathbf{H}) \cdot (\mathbf{E} \cdot \mathbf{F} \cdot \mathbf{H} \cdot \mathbf{I})$$

Reagrupant els factors perquè apareguen els productes de files i columnes:

$$\begin{aligned}2^8 = (\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} \cdot \mathbf{D} \cdot \mathbf{E}) \cdot (\mathbf{B} \cdot \mathbf{C} \cdot \mathbf{E} \cdot \mathbf{F}) \cdot (\mathbf{D} \cdot \mathbf{E} \cdot \mathbf{G} \cdot \mathbf{H}) \cdot (\mathbf{E} \cdot \mathbf{F} \cdot \mathbf{H} \cdot \mathbf{I}) \\ = (\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} \cdot \mathbf{C}) \cdot (\mathbf{D} \cdot \mathbf{E} \cdot \mathbf{F}) \cdot (\mathbf{B} \cdot \mathbf{E} \cdot \mathbf{H}) \cdot (\mathbf{D} \cdot \mathbf{E} \cdot \mathbf{F}) \cdot (\mathbf{G} \cdot \mathbf{H} \cdot \mathbf{I}) \cdot \mathbf{E} = \mathbf{2} \cdot \mathbf{2} \cdot \mathbf{2} \cdot \mathbf{2} \cdot \mathbf{2} \cdot \mathbf{E} \\ = \mathbf{2^5} \cdot \mathbf{E}\ \ \Rightarrow\ \ \ \mathbf{2^3} = \mathbf{E} = \mathbf{8}\end{aligned}$$

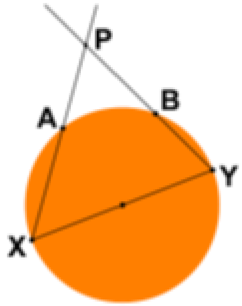
**Febrer 25:** Proveu que si p i p + 2 són tots dos nombres primers majors que 3, llavors 6 és un factor de p + 1.

**Solució:** Tenim tres enters positius, consecutius, majors que tres, sent p i p + 2 primers (primers bessons). Hem de provar que p + 1 és múltiple de 6, és a dir, de 2 i de 3.

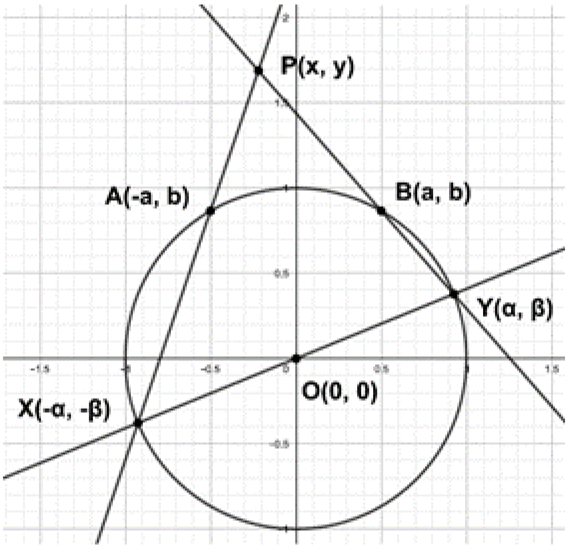
Com a p és primer major que 3 no és parell. I com, entre dos enters consecutius un és múltiple de 2, tindrem que p + 1 és múltiple de 2.

Com a p és major que 3 i primer, p tampoc és múltiple de 3. És a dir, ha de complir-se que p = 1(3) o p = 2(3). Però si p = 1(3) llavors hauria de ser p + 2 = 0(3) (diferent de 3) en contra que p + 2 siga primer. Per tant, l'única possibilitat que queda és p = 2(3). I llavors p + 1 = 0(3), que conclou la demostració.

**Febrer 26-27:** Siguen A i B dos punts fixos no diametralment oposats d'una circumferència. Sean X i Y els extrems d'un diàmetre. Trobeu el lloc geomètric dels punts P que són la intersecció de les rectes que passen per A i X i per B i Y.




**Solució:** Triem un sistema d'eixos coordinats de manera que el centre de la circumferència donada siga l'origen de coordenades i que l'eix Y siga perpendicular al segment AB pel seu punt mitjà. Amb aquesta elecció fem a més que el radi de la circumferència siga la unitat. Llavors:




$$0(0,0);\quad A(-a,b);\quad B(a,b);\quad X(-\alpha,-\beta);\quad Y(\alpha,\beta)$$

$$a^2+b^2=1=\alpha^2+\beta^2$$

**Recta que passa per A(– a, b) i X(– α, – β):**

$$\frac{y-b}{x+a}=\frac{-\beta-b}{-\alpha+a};\quad (y-b)\cdot(\alpha-a)=(x+a)\cdot(\beta+b)$$

$$y(\alpha-a)=(x+a)\cdot(\beta+b)+b(\alpha-a)$$

i com $\alpha - a \neq 0$

$$y=\frac{\beta+b}{\alpha-a}\cdot(x+a)+b$$

**Recta que passa per B(a, b) i Y(α, β):**

$$\frac{y-b}{x-a}=\frac{\beta-b}{\alpha-a};\quad (y-b)\cdot(\alpha-a)=(x-a)\cdot(\beta-b)$$

$$y(\alpha-a)=(x-a)\cdot(\beta-b)+b(\alpha-a)$$

i com $\alpha - a \neq 0$

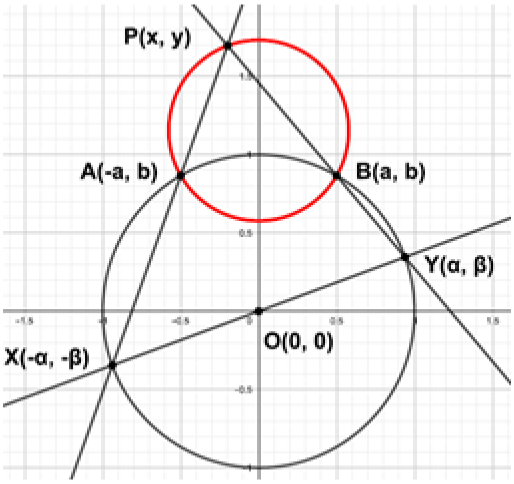
$$y=\frac{\beta-b}{\alpha-a}\cdot(x-a)+b$$

**Coordenades del punt de tall P(x , y):**

$$\left.\begin{aligned} y&=\frac{\beta+b}{\alpha-a}\cdot(x+a)+b\\ y&=\frac{\beta+b}{\alpha-a}\cdot(x+a)+b\end{aligned}\right\}\;\Rightarrow\;\frac{\beta+b}{\alpha-a}\cdot(x+a)+b=\frac{\beta+b}{\alpha-a}\cdot(x+a)+b\;\Rightarrow\; x=-\frac{\beta a}{b}\quad(1)$$

$$y=\frac{\beta+b}{\alpha-a}\cdot\frac{ab-\beta a}{b}+b=\frac{a\cdot(b^2-\beta^2)}{(\alpha-a)\cdot b}+b=\frac{b^2\alpha-a\beta^2}{b\cdot(\alpha-a)}\quad(2)$$

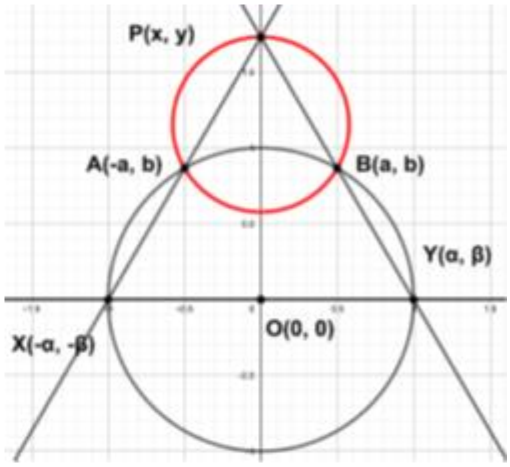
Les coordenades del punt P no semblen suggerir l'equació del lloc geomètric. No obstant això, si mentalment traslladem el punt Y cap a l'esquerra el punt P sembla descriure el mateix tipus d'equació que el punt Y, és a dir, el punt P (en traslladar el punt Y per la circumferència) sembla descriure una altra circumferència amb centre en l'eix Y. Aquest fet, també està avalat per l'obtingut mitjançant el programa geogebra

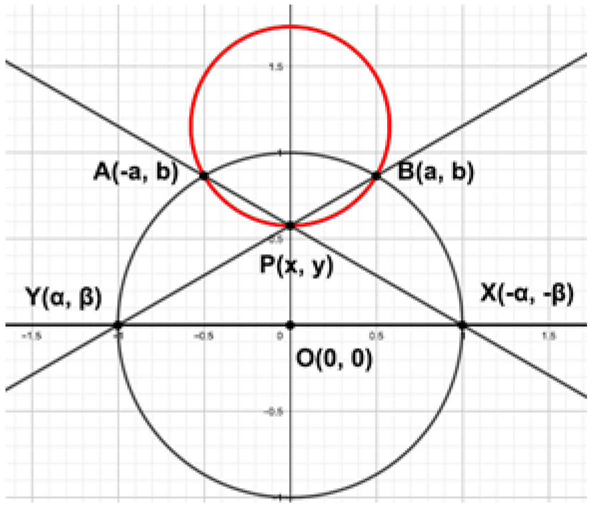



Calculem el presumible centre trobant el punt mitjà dels punts corresponents $(\alpha, \beta) = (1, 0)$ i a $(\alpha, \beta) = (-1, 0)$, és a dir quan el punt $Y(\alpha, \beta)$ està en el costat positiu de l'eix X i quan el punt $Y(\alpha, \beta)$ està en el costat negatiu de l'eix X. A més, el presumible radi serà la meitat de la longitud dels punts P(x, y) obtinguts per a aquests valors del punt Y

Si fem en (1) i (2) $\alpha = 1$ y $\beta = 0$ obtenim que les coordenades del punto de tall són

$$P\left(0, \frac{b}{1-a}\right)$$




Si fem en (1) i (2) $\alpha = -1$ y $\beta = 0$ obtenim que les coordenades del punto de tall són

$$P\left(0, \frac{b}{1+a}\right)$$

Amb el que, el presumible centre (0, A) i radi del lloc deurien ser:

$$(0, A) = PM\left(\left(0, \frac{b}{1-a}\right);\ \left(0, \frac{b}{1+a}\right)\right) = \left(\frac{0+0}{2}, \frac{\frac{b}{1-a} + \frac{b}{1+a}}{2}\right) = \left(0, \frac{1}{b}\right)$$

$$2r = \frac{b}{1-a} - \frac{b}{1+a} = \frac{2ab}{b^2} \quad \Rightarrow \quad r = \frac{a}{b}$$

Per a concloure que el lloc geomètric és una circumferència de centre i radi els obtinguts com a presumibles, hem de comprovar que les coordenades dels punts de tall P(x, y) compleixen l'equació de la circumferència. Tenim:

$$\begin{aligned} x^2 + \left(y - \frac{1}{b}\right)^2 &= \frac{\beta^2 a^2}{b^2} + \left(\frac{b^2\alpha - a\beta^2}{b(\alpha - a)} - \frac{1}{b}\right)^2 = \frac{\beta^2 a^2}{b^2} + \left(\frac{b^2\alpha - a\beta^2 - \alpha + a}{b(\alpha - a)}\right)^2 \\ &= \frac{\beta^2 a^2}{b^2} + \left(\frac{(1-a^2)\alpha - a(1-\alpha^2) - \alpha + a}{b(\alpha - a)}\right)^2 = \frac{\beta^2 a^2}{b^2} + \left(\frac{a\alpha(\alpha - a)}{b(\alpha - a)}\right)^2 = \frac{\beta^2 a^2}{b^2} + \frac{\alpha^2 a^2}{b^2} \\ &= \frac{a^2(\beta^2 + \alpha^2)}{b^2} = \frac{a^2}{b^2} \end{aligned}$$

Amb el que tenim que el lloc geomètric dels punts P(x, y) és la circumferència de centre $\left(0, \frac{1}{b}\right)$ i de radi $r = \frac{a}{b}$