SOLUCIONS ABRIL 2021

PROBLEMES PER A BATXILLERAT (16-18 ANYS). ORGANITZACIÓ: RAFAEL MARTÍNEZ CALAFAT. PROFESSOR JUBILAT.

Abril 1-2: És possible col·locar en les cel·les buides signes de suma o de resta de manera que l'expressió resultant siga:

1. 11?
2. imparell?
3. 10, almenys de deu maneres diferents?

5		6		7		8		9		10		11		12		13		14		15

Solució: Per a 1, tenim:

Si designem per A la suma de les cel·les antecedides pel signe + i per B la suma de les cel·les antecedides pel signe –, tindrem que si s'exigeix que la seua suma siga 11:

$$\left.\begin{array}{r}\frac{5+15}{2}\cdot 11 = \mathrm{A}+\mathrm{B}\\ 11 = \mathrm{A}-\mathrm{B}\end{array}\right\} \Leftrightarrow \quad \left.\begin{array}{r}10\cdot 11 = \mathrm{A}+\mathrm{B}\\ 11 = \mathrm{A}-\mathrm{B}\end{array}\right\}$$

Sumant les dues equacions arribem a: 11·11 = 2A que és un absurd perquè el primer membre és imparell i el segon membre és parell. Així, doncs, la contestació a la primera pregunta és no.

Per a 2, tenim:

Si I és l'imparell que pretenem aconseguir, es té:

$$\left.\begin{array}{r}10\cdot 11 = \mathrm{A}+\mathrm{B}\\ \mathrm{I} = \mathrm{A}-\mathrm{B}\end{array}\right\} \Leftrightarrow \quad (\text{suman}) 10\cdot 11 + \mathrm{I} = 2\mathrm{A}$$

El primer membre és (parell + imparell =) imparell mentre que el segon membre és parell, la qual cosa és una contradicció. Per tant, la contestació a la segona pregunta és no.

Per a 3, tenim:

$$\left.\begin{array}{r}10\cdot 11 = \mathrm{A}+\mathrm{B}\\ 10 = \mathrm{A}-\mathrm{B}\end{array}\right\} \Leftrightarrow \quad \begin{array}{lll}(\text{suman}) & 120 = 2\mathrm{A} \Leftrightarrow & \mathrm{A} = 60\\ (\text{restan}) & 100 = 2\mathrm{B} \Leftrightarrow & \mathrm{B} = 50\end{array}$$

És a dir: la suma de números antecedits per signe + ha de ser 60 i la suma dels altres números (els antecedits per signe –), ha de ser 50. Hem d'investigar si hi ha almenys deu formes diferents de triar números de {6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15} per a obtindre suma 55 (doncs al número 5 no podem antecedir-li el signe –). Si triem el 15 (i el 5), per a completar la suma fins a 60, podem triar dues d'entre aquestes tres parelles: 6-14, 7-13, 8-12 i 9-11. Per tant, ja tenim, d'aquesta manera, que hi ha almenys:

$$\mathrm{C}_2^4 = \binom{4}{2} = \frac{4\cdot 3}{20} = 6$$

maneres diferents d'obtindre suma 60. Altres maneres d'aconseguir suma 60, no contemplades anteriorment són:

escollir: 5, 6, 7, 8, 9, 12, 13

escollir: 5, 7, 9, 12, 13, 14

escollir: 5, 6, 9, 12, 13, 15

escollir: 5, 6, 10, 11, 13, 15

que juntament amb les 6 del principi aconsegueixen les deu que es requeria en l'enunciat. Per tant, la contestació a la part 3, és: sí.

Abril 3: Pot un número amb 200 zeros, 100 uns, 100 dosos i 100 tresos ser un quadrat perfecte?

Solució: Un número és un quadrat perfecte si els exponents dels nombres primers que apareixen en la seua descomposició factorial com a producte de nombres primers és parell. Si el número està compost de 200 zeros, 100 uns, 100 dosos i 100 tresos, la suma de les seues xifres és:

$$200\cdot 0 + 100\cdot 1 + 100\cdot 2 + 100\cdot 3 = 600$$

Com 600 és divisible per 3, però no per 9, tindrem que qualsevol dels números de l'enunciat és divisible per 3, però no per 9. És a dir, qualsevol dels números de l'enunciat té al tres en la seua descomposició factorial, però aquesta, no conté a 3^2. Per tant, qualsevol dels números de l'enunciat no és un quadrat perfecte.

Abril 5-6: Dani, utilitzant un full de càlcul ha creat una col·lecció de naturals, de l'1 al 2021. A partir d'ella es trien dos de la col·lecció i els substitueix per la seua suma. Aquest procés es repeteix fins que només queda un número en la col·lecció. Quin número és el que queda?

Solució: El que fa Dani és, a poc a poc, calculant la suma dels números escrits al principi, perquè cada vegada agafa dos i els substitueix per la seua suma i reitera aquest procés fins a quedar-se amb un número. El número final serà:

$$\frac{2021+1}{2}\cdot 2021 = 2043231$$

Abril 7: És possible que sumant un nombre parell de fraccions amb numeradors la unitat i denominadors imparells s'obtinga la unitat?

Solució: Suposem:

$$\frac{1}{2a_1+1}+\frac{1}{2a_2+1}+\cdots+\frac{1}{2a_{2m}+1}=1$$

Aleshores:

$$\frac{\prod_{i\neq 1}(2a_i+1)+\prod_{i\neq 2}(2a_i+1)+\cdots+\prod_{i\neq 2m}(2a_i+1)}{(2a_1+1)\cdot(2a_2+1)\cdot\cdots\cdot(2a_{2m}+1)}=1$$

El denominador és el producte (d'un nombre parell) d'imparells i per tant és imparell.

Cada sumand del numerador és el producte d'imparells i per tant, imparell. Com hi ha un nombre parell de sumands la suma total és parell.

I ja hem arribat a un absurd: el numerador és parell i el denominador és imparell i mai el seu quocient pot donar 1.

Abril 8: Existeix algun natural que siga igual a deu vegades el producte dels seus dígits?

Solució: Siga $Ab = a_1a\ldots a_nb$ el número expressat com a col·lecció ordenada de dígits. L'exigència de l'enunciat és equivalent a:

$$10\cdot A + b = 10\cdot a_1\cdot a_2\cdot\cdots\cdot a_n\cdot b \qquad (1)$$

El membre esquerre de la igualtat (1) té per xifra d'unitats b mentre que el membre dret té per xifra d'unitats a 0. Per tant, b = 0 i d'ací:

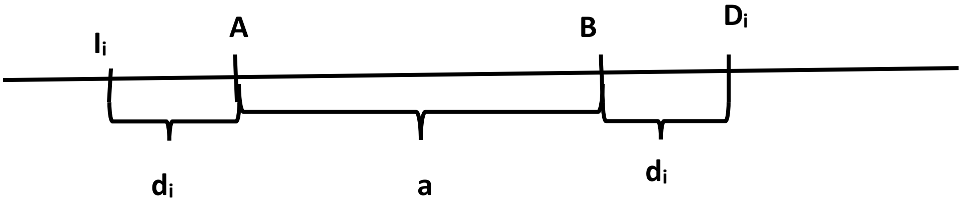
$$10 \cdot A + 0 = 10 \cdot a_1 \cdot a_2 \cdot \cdots \cdot a_n \cdot b = 10 \cdot a_1 \cdot a_2 \cdot \cdots \cdot a_n \cdot 0 = 0 \;\Rightarrow\; 10 \cdot A = 0 \;\Rightarrow\; A = 0$$

I, en definitiva, que el número de partida és 0. Per tant, no hi ha natural tal que el número siga igual a 10 vegades el producte dels dígits del número.

Abril 9-10: Siga donat un segment AB

a) és possible triar un nombre parell de punts fora del segment AB, però en la recta AB de manera que la suma de distàncies d'aquestos punts a A siga igual a la suma de distàncies d'aquestos punts a B?
b) és possible triar un nombre imparell de punts fora del segment AB, però en la recta AB de manera que la suma de distàncies d'aquestos punts a A siga igual a la suma de distàncies d'aquestos punts a B?

Solució: Per a la primera pregunta tenim:



Donat el segment (i la recta AB) i qualsevol nombre parell 2n, triem la meitat dels punts a l'esquerra de A i l'altra meitat dels punts a la dreta de B de manera que:

$$d(I_i, A) = d_i = d(D_i, B) \quad \forall i \in \{1, 2, \cdots, n\}$$

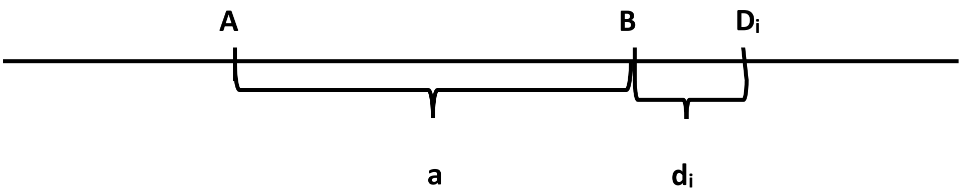
Aleshores:

$$\sum_{i=1}^{n} \big(d(I_i, A) + d(D_i, A)\big) = \sum_{i=1}^{n} \big(d_i + (a + d_i)\big) = na + 2\sum_{i=1}^{n} d_i$$

$$\sum_{i=1}^{n} \big(d(I_i, B) + d(D_i, B)\big) = \sum_{i=1}^{n} \big((a + d_i) + d_i\big) = na + 2\sum_{i=1}^{n} d_i$$

I, per tant, la contestació a a) és afirmativa.

Per a la pregunta b), tenim: Necessàriament els punts no han d'estar tots a l'esquerra de A o a la dreta de B. Si, per exemple, estan tots a la dreta de B tindrem

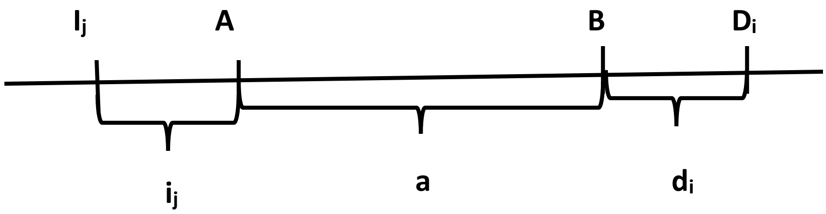


$$\sum_{i=1}^{2n+1} d(A, D_i) = \sum_{i=1}^{2n+1} (a + d_i) = (2n+1)a + \sum_{i=1}^{2n+1} d_i \;; \qquad \sum_{i=1}^{2n+1} d(B, D_i) = \sum_{i=1}^{2n+1} d_i$$

si:

$$\sum_{i=1}^{2n+1} d(A, D_i) = \sum_{i=1}^{2n+1} d(B, D_i) \quad \Rightarrow \quad (2n+1)a = 0 \quad \Rightarrow \quad a = 0 \quad \Rightarrow \quad A = B$$

Per tant, alguns punts han d'estar a la dreta de B i altres a l'esquerra de A. Com cal seleccionar un nombre imparell de punts, a la dreta de B o a l'esquerra de A, ha d'haver-hi un nombre imparell (i en l'altre lloc un nombre parell). Suposem que a l'esquerra de A, hi ha un nombre imparell de punts i a la dreta de B hi ha un nombre parell de punts:



$$\forall j \in J \text{ con } |J| \text{ imparell}, \quad \forall i \in I = \{1, 2, 3, \cdots, 2n+1\} - J \quad \text{amb } |I| \text{parell}$$

Aleshores:

$$D_1 = \sum_{j \in J} d(I_j, A) + \sum_{i \in I} d(D_i, A) = \sum_{j \in J} i_j + \sum_{i \in I} (a + d_i) = |I| \cdot a + \sum_{j \in J} i_j + \sum_{i \in I} d_i$$

$$D_2 = \sum_{j \in J} d(I_j, B) + \sum_{i \in I} d(D_i, B) = \sum_{j \in J} (a + i_j) + \sum_{i \in I} d_i = |J| \cdot a + \sum_{j \in J} i_j + \sum_{i \in I} d_i$$

Si

$$D_1 = D_2 \;\Rightarrow\; (|I| - |J|)a = 0 \;\Rightarrow\; |I| = |J|$$

el que és un absurd, perquè estem suposant que I és de cardinalitat parell i J és de cardinalitat imparell. Per tant, la contestació a b) és negativa.

<u>Abril 12:</u> Si A no és múltiple de 3 i B no és múltiple de 3, pot ser A·B múltiple de 3?

<u>Solució:</u> Òbviament, la contestació és negativa.

$$\left.\begin{array}{l}\text{Si A no és múltiple de 3} \Rightarrow \text{En A no està el factor 3} \\ \text{Si B no és múltiple de 3} \Rightarrow \text{En B no està el factor 3}\end{array}\right\} \Rightarrow \text{en AB no està el factor 3} \Rightarrow \text{AB no és múltiple de 3}$$

O de manera alternativa:

$$\text{Si A no és múltiple de 3} \Rightarrow \begin{cases} A = 1(3) \\ A = 2(3) \end{cases}, \quad \text{Si B no és múltiple de 3} \Rightarrow \begin{cases} B = 1(3) \\ B = 2(3) \end{cases}$$

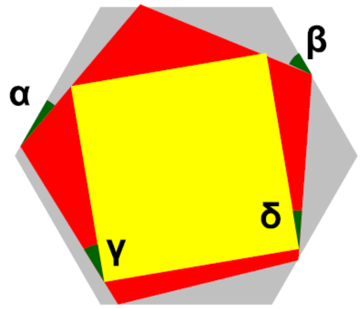
I la taula de multiplicar ens proporciona:

B\A	1(3)	2(3)
1(3)	1(3)	2(3)
2(3)	2(3)	1(3)

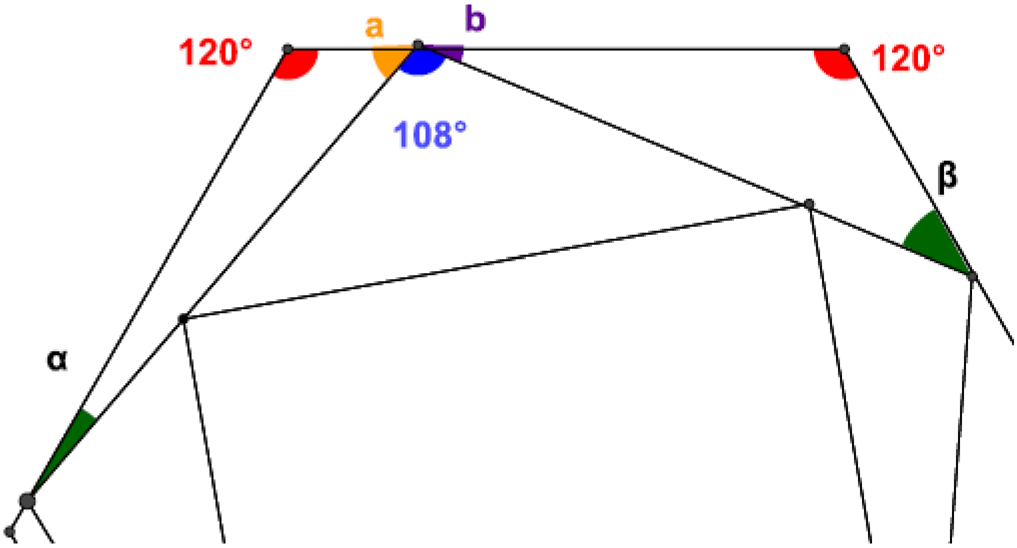
Es dir, AB = 1(3) o AB = 2(3). Per tant, AB no és múltiple de 3.

<u>Abril 13-14:</u> Es té un quadrat els vèrtexs del qual toquen els costats d'un pentàgon regular. Al seu torn, els vèrtexs del pentàgon estan tocant els costats d'un hexàgon regular. Calcular:

(1) $\alpha + \beta$
(2) $\gamma + \delta$



<u>Solució:</u> Per a la primera pregunta tindrem:



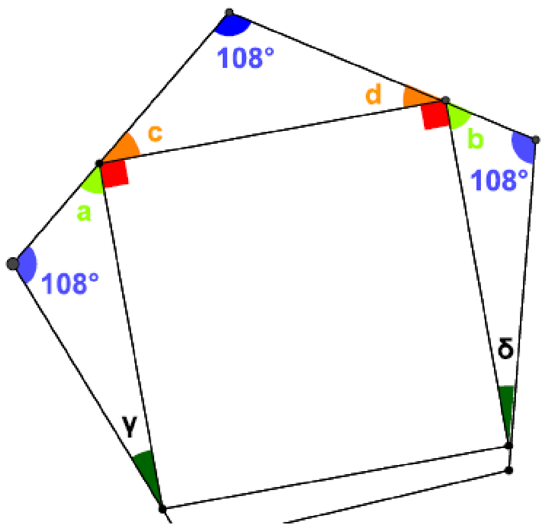
L'angle entre dues arestes consecutives d'un hexàgon és (angle central: 360/6 = 60° $\Rightarrow$ 180° – 60° =) 120°.
L'angle entre dues arestes consecutives d'un pentàgon és (angle central: 360/5 = 72° $\Rightarrow$ 180° – 72° =) 108°.

En el triangle de l'esquerra: $\alpha + 120° + a = 180° \;\Rightarrow\; a = 180° - (120° + \alpha)$

En el triangle de la dreta: $\beta + 120° + b = 180° \;\Rightarrow\; b = 180° - (120° + \beta)$.

Per últim: $180° = a + b + 108° \Rightarrow 180° - (120° + \alpha) + 180° - (120° + \beta) + 108° = 180° \Rightarrow \alpha + \beta = 48°$

Per a la segona pregunta, tindrem:



L'angle entre dues arestes consecutives d'un pentàgon és (angle central: 360/5 = 72° $\Rightarrow$ 180° – 72° =) 108°.
En el triangle de l'esquerra: $a = 180° - 108° - \gamma$
En el triangle de la dreta: $b = 180° - 108° - \delta$
D'on:

$$c = 180° - 90° - a = 18° + \gamma$$
$$d = 180° - 90° - b = 18° + \delta$$

I, per últim, en el triangle central:

$$108° + c + d = 180° = 108° + 18° + \gamma + 18° + \delta.$$

D'on:

$$\gamma + \delta = 36°$$

<u>Abril 15:</u> Proveu que un natural té un nombre imparell de divisors $\Leftrightarrow$ és un quadrat perfecte.

<u>Solució:</u> Recordem que

$$\text{si } N = \prod_{i=1}^{n} p_i^{\alpha_i} \text{ aleshores el nombre de divisors de N és } \prod_{i=1}^{n} (\alpha_i + 1)$$

$\Leftarrow$ Si N és un quadrat perfecte, cada primer de la seua descomposició factorial com a producte de nombres primers té exponent parell. Per tant cada factor (α_i + 1) es imparell, i aleshores:

$$\prod_{i=1}^{n} (\alpha_i + 1)$$

és producte d'imparells i per tant, imparell.

$\Rightarrow$ Si un número té un nombre imparell de divisors, llavors

$$\prod_{i=1}^{n} (\alpha_i + 1) \text{ és imparell } \Rightarrow (\alpha_i + 1) \text{ és imparell } \forall i \in \{1, 2, \cdots, n\} \Rightarrow \alpha_i \text{ és parell } \forall i \in \{1, 2, \cdots, n\}$$

(ja que si α_j fora imparell, aleshores α_j + 1 seria parell i el producte seria parell). D'El que deduïm:

$$N = \prod_{i=1}^{n} p_i^{\alpha_i} = \left(\prod_{i=1}^{n} p_i^{\alpha_i/2} \right)^2 = (n)^2$$

és dir, N és un quadrat perfecte.

<u>Abril 16:</u> Un equip de carreres disposa d'un cotxe amb el qual recórrer 3500 km per a entrenaments de la temporada. Cada dia poden recórrer 300 o 500 o 700 km, poden realitzar el pla d'entrenament en un nombre parell de dies?

<u>Solució:</u> Siguen x les sessions de 300 km, y les sessions de 500 km i k – (x + y) les sessions de 700 km. Ha de complir-se:

$$300x + 500y + 700 \cdot (k - x - y) = 3500; \quad 3x + 5y + 7 \cdot (k - x - y) = 35; \quad 7k - 35 = 4x + 2y$$

El membre de la dreta és un nombre parell, mentre que el membre de l'esquerra és, si k és parell, (parell – imparell =) imparell. Per tant, no es pot realitzar el pla d'entrenament en un nombre parell de dies.

<u>Abril 17:</u> Trobeu els naturals a tals que **a + 2a + 3a + ··· + 9a** resulta ser un natural amb totes les seues xifres iguals.

<u>Solució:</u>

(1) **a + 2a + 3a + ··· + 9a = 45·a = k·11** $\Rightarrow$ $5 \cdot 3^2 \cdot a = k \cdot 11$ $\Rightarrow$ k a de contindre als factors 5 i 3^2, en contra que siga un dígit.

(2) **a + 2a + 3a + ··· + 9a = 45·a = k·111** $\Rightarrow$ $5 \cdot 3^2 \cdot a = k \cdot 3 \cdot 37$ $\Rightarrow$ $5 \cdot 3 \cdot a = k \cdot 37$ $\Rightarrow$ k a de contindre als factors 5 i 3, en contra que siga un dígit.

(3) **a + 2a + 3a + ··· + 9a = 45·a = k·1111** $\Rightarrow$ $5 \cdot 3^2 \cdot a = k \cdot 11 \cdot 101$ $\Rightarrow$ k a de contindre als factors 5 i 3^2, en contra que siga un dígit..

(4) **a + 2a + 3a + ··· + 9a = 45·a = k·11111** $\Rightarrow$ $5 \cdot 3^2 \cdot a = k \cdot 41 \cdot 271$ $\Rightarrow$ k a de contindre als factors 5 i 3^2, en contra que siga un dígit.

(5) **a + 2a + 3a + ··· + 9a = 45·a = k·111111** $\Rightarrow$ $5 \cdot 3^2 \cdot a = k \cdot 3 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 37$ $\Rightarrow$ $3 \cdot 5 \cdot a = k \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 37$ $\Rightarrow$ k a de contindre als factors 5 i 3, en contra que siga un dígit..

(6) **a + 2a + 3a + ⋯ + 9a = 45·a = k·1111111** $\Rightarrow$ $5 \cdot 3^2 \cdot a = k \cdot 239 \cdot 4649$ $\Rightarrow$ k a de contindre als factors 5 i 3^2, en contra que siga un dígit.
(7) **a + 2a + 3a + ⋯ + 9a = 45·a = k·11111111** $\Rightarrow$ $5 \cdot 3^2 \cdot a = k \cdot 11 \cdot 73 \cdot 101 \cdot 137$ $\Rightarrow$ k a de contindre als factors 5 i 3^2, en contra que siga un dígit.
(8) **a + 2a + 3a + ⋯ + 9a = 45·a = k·111111111** $\Rightarrow$ $5 \cdot 3^2 \cdot a = k \cdot 3^2 \cdot 37 \cdot 333667$ $\Rightarrow$ $5 \cdot a = k \cdot 37 \cdot 333667$

La igualtat es compleix si k = 5 i a = 37·333667 = 12345679.

Una vegada hem vist com funciona la exigència per a els casos més senzills, tornem a l'equació originada.

$$45 \cdot a = k \cdot \overbrace{1111 \cdots 11}^{m} \;\Leftrightarrow\; 3^2 \cdot 5 \cdot a = k \cdot \overbrace{111 \cdots\cdot 11}^{m}$$

Com k té una única xifra, k sols pot agafar els valors 5, 3 o 9.

Si k = 3 o k = 9, tindrem:

$$3 \cdot 5 \cdot a = \overbrace{111 \cdots 11}^{m} \;\Rightarrow\; \overbrace{111 \cdots\cdot 11}^{m} = \dot{\hat{5}} \;\text{ Absurd}$$
$$5 \cdot a = \overbrace{111 \cdots 11}^{m} \;\Rightarrow\; \overbrace{111 \cdots\cdot 11}^{m} = \dot{\hat{5}} \;\text{ Absurd}$$

Si k = 5, aleshores:

$$9 \cdot a = \overbrace{111 \cdots 11}^{m} \;\Rightarrow\; \overbrace{111 \cdots\cdot 11}^{m} = \dot{\hat{9}} \;\Rightarrow \text{el nombre d'uns és } m = 9n \; (9, 18, 27, 36, \ldots\ldots)$$

Ja tenim una solució trobada per a 9 uns: a_1 = 12345679. Per a 18 uns tindrem:

$$5 \cdot \overbrace{111 \cdots 11}^{18} = 5 \cdot \left(\overbrace{111 \cdots 11}^{9} \cdot 10^9 + \overbrace{111 \cdots 11}^{9}\right) = 45 \cdot a_1 \cdot 10^9 + 45 \cdot a_1 = 45 \cdot (a_1 \cdot 10^9 + a_1)$$
$$= 45 \cdot a_2$$

És dir: a_2 = 12345679012345679.

Per inducció, les solucions són:

$$a_{n+1} = a_n + 10^{9n} \cdot a_1$$
$$a_1 = 12345679$$

(A la solució per a 9n uns se li antecedeix un zero i totes les xifres ordenades de la primera solució). Per a n = 1 i n = 2 ja ho tenim demostrat. Suponga'm-ho cert per a n i vegem-ho per a n + 1

$$45(a_n + 10^{9n} \cdot a_1) = 45a_n + 45a_1 \cdot 10^{9n} = 5 \cdot \overbrace{111 \cdots 11}^{9n} + 5 \cdot \overbrace{111 \cdots 11}^{9} \cdot 10^{9n}$$
$$= 5 \cdot \left(\overbrace{111 \cdots 11}^{9n} + \overbrace{111 \cdots 11}^{9} \cdot 10^{9n}\right) = 5 \cdot \overbrace{111 \cdots 11}^{9(n+1)}$$

Abril 19: Trobeu el menor natural tal que el número és igual a 5 vegades el producte dels seus dígits.

Solució: Òbviament els números buscats no poden tindre una única xifra. Suposem que els números té dues xifres: N = 10a + b. L'exigència de l'enunciat es transforma en:

$$10a + b = 5ab \;\Rightarrow\; b = 5a(b-2) \quad (*)$$

Com 5a(b – 2) és múltiple de 5, b deu de ser-ho. Per tant, b = 0 o b = 5. Aleshores

$$\text{si } b = 0 \;\Rightarrow\; 10a = 10a + b = 5ab = 0 \;\Rightarrow\; a = 0 \;\Rightarrow\; 10a + b = 0 \notin \mathbb{N}$$
$$\text{si } b = 5 \text{ en } (*) \text{ tenim: } 5 = 5a(5-2) \;\Rightarrow\; 5 = 3 \cdot 5a \;\Rightarrow 1 = 3a \;\text{ absurd!}$$

Per tant, tampoc hi ha un número amb dues xifres que complisca l'exigit.

Vegem què ocorre si el número té tres xifres: N = 100a + 10b + c. Tindrem:

$$\mathrm{N} = 100\mathrm{a} + 10\mathrm{b} + \mathrm{c} = 5 \cdot \mathrm{a} \cdot \mathrm{b} \cdot \mathrm{c} \;\Rightarrow\; 100\mathrm{a} + \mathrm{c} = 5 \cdot \mathrm{a} \cdot \mathrm{b} \cdot \mathrm{c} - 10 \cdot \mathrm{b} = 5\mathrm{b}(\mathrm{a} \cdot \mathrm{c} - 2)$$

Com 5b(ac – 2) és múltiple de 5, 100a + c deu de ser-ho. Per tant, c = 0 o c = 5.

Si c = 0, aleshores:

$$\mathrm{N} = 100\mathrm{a} + 10\mathrm{b} + 0 = 5 \cdot \mathrm{a} \cdot \mathrm{b} \cdot 0 = 0 \;\notin \mathbb{N}$$

Si c = 5, aleshores:

$$100\mathrm{a} + 5 = 5\mathrm{b}(5\mathrm{a} - 2) \;\Rightarrow\; 20\mathrm{a} + 1 = \mathrm{b}(5\mathrm{a} - 2) \xRightarrow{5\mathrm{a}-2\neq 0} \mathrm{b} = \frac{20\mathrm{a} + 1}{5\mathrm{a} - 2} = 4 + \frac{9}{5\mathrm{a} - 2}$$

Per tant, 5a – 2 és un divisor de 9, es dir 5a – 2 deu ser ±1, ±3 o ±9.

$$\text{si } 5\mathrm{a} - 2 = \pm 1 \;\Rightarrow\; \mathrm{a} \notin \mathbb{N}$$
$$\text{si } 5\mathrm{a} - 2 = \pm 9 \;\Rightarrow\; \mathrm{a} \notin \mathbb{N}$$
$$\text{si } 5\mathrm{a} - 2 = -3 \;\Rightarrow\; \mathrm{a} \notin \mathbb{N}$$
$$\text{si } 5\mathrm{a} - 2 = 3 \;\Rightarrow\; \mathrm{a} = 1, \mathrm{b} = 4 + \frac{9}{3} = 7$$

I com, c = 5, tenim que un número que compleix l’exigit en l’enunciat és el 175.

Abril 20: Quin és el major enter m tal que m sempre divideix:

$$\mathbf{n^2 \cdot (n^2 - 1) \cdot (n^2 - 4)}$$

per a qualsevol enter n > 2?

Solució: Investiguem valors possibles per a m, vegem els divisors de $n^2 \cdot (n^2 - 1) \cdot (n^2 - 4) = (n - 2) \cdot (n - 1) \cdot n^2 \cdot (n + 1) \cdot (n + 2)$ per als primers valors de n

	n – 2	n – 1	n^2	n + 1	n+ 2		
n = 3	1	2	3^2	4	5	→	$1 \cdot 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5$
n = 4	2	3	2^4	5	6	→	$2^4 \cdot 3^2 \cdot 5$
n = 5	3	4	5^2	6	7	→	$2^3 \cdot 3^2 \cdot 5^2 \cdot 7$
n = 6	4	5	6^2	7	8	→	$2^7 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7$
n = 7	5	6	7^2	8	9	→	$2^4 \cdot 3^3 \cdot 5 \cdot 7^2$
:	:	:	:	:	:	:	:

Sembla que $m = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5$ (un valor més gran de m faria que m no divideixi a $n^2 \cdot (n^2 - 1) \cdot (n^2 - 4)$ per exemple per a n = 3). Faltarà demostrar que m divideix a $n^2 \cdot (n^2 - 1) \cdot (n^2 - 4)$ per a tots els valors de n posteriors a n = 7. Tindrem:

$$n^2 \cdot (n^2 - 1) \cdot (n^2 - 4) = (n - 2) \cdot (n - 1) \cdot n^2 \cdot (n + 1) \cdot (n + 2) \quad (*)$$

Com entre dos naturals consecutius hi ha un que és múltiple de dos, en l'expressió (*) hi ha almenys dos múltiples de 2, com a més, aquestos múltiples de dos són consecutius, un és múltiple de quatre. Per tant, en l'expressió (*) hi ha, almenys, el factor 2^3. Com entre tres naturals consecutius hi ha un que és múltiple de tres, en l'expressió (*) hi ha, almenys, dos múltiples de tres:

$$\text{si } n-2=\dot{\dot{3}} \ \Rightarrow\ n+1=\dot{\dot{3}} \ \Rightarrow\ \text{en } (*) \text{ hi ha dos factors } 3$$
$$\text{si } n-1=\dot{\dot{3}} \ \Rightarrow\ n+2=\dot{\dot{3}} \ \Rightarrow\ \text{en } (*) \text{ hi ha dos factors } 3$$
$$\text{si } n=\dot{\dot{3}} \ \Rightarrow\ \text{en } (*) \text{ hi ha dos factors } 3$$

Per tant, l'expressió (*) és divisible per 3^2. Com entre cinc naturals consecutius hi ha, almenys, un que és múltiple de cinc, tindrem que en l'expressió (*) hi ha, almenys, un factor cinc.

En definitiva, en l'expressió (*) hi ha, almenys, tres factors 2, dos factors 3 i un factor 5. Per tant, l'expressió (*) és divisible per ($2^3 \cdot 3^2 \cdot 5$ =) 360, qualsevol que siga n > 2.

Abril 21: Quin és el número més gran (xicotet) de huit dígits diferents que siga divisible per 11?

Solució: El major nombre de huit xifres diferents és: 98765432. Com 2 – 3 + 4 – 5 + 6 – 7 + 8 – 9 = – 4, 98765432 –(– 4) = 98765436 és múltiple de 11. I, restant successivament 11 a aquest número (fins aconseguir un número amb totes les seues xifres diferents) aconseguim múltiples de 11:

$$98765436 \underset{-11}{\longrightarrow} 98765425 \underset{-11}{\longrightarrow} 98765414 \underset{-11}{\longrightarrow} 98765403$$

El major nombre de huit xifres diferents múltiple d'11 és 98765403.

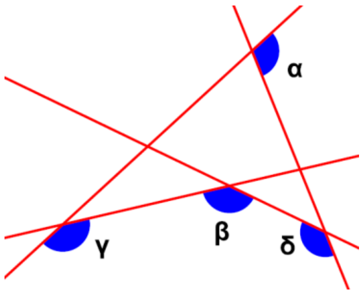
Per al menor natural de huit xifres diferents múltiple d'11 tenim:

El menor nombre de huit xifres diferents és: 10234567. Com 7 – 6 + 5 – 4 + 3 – 2 + 0 – 1 = 2, 10234567 – 2 = 10234565 és múltiple d'11. I, sumant successivament 11 a aquest número (fins traure un número amb totes les xifres diferents) aconseguim múltiples d'11:

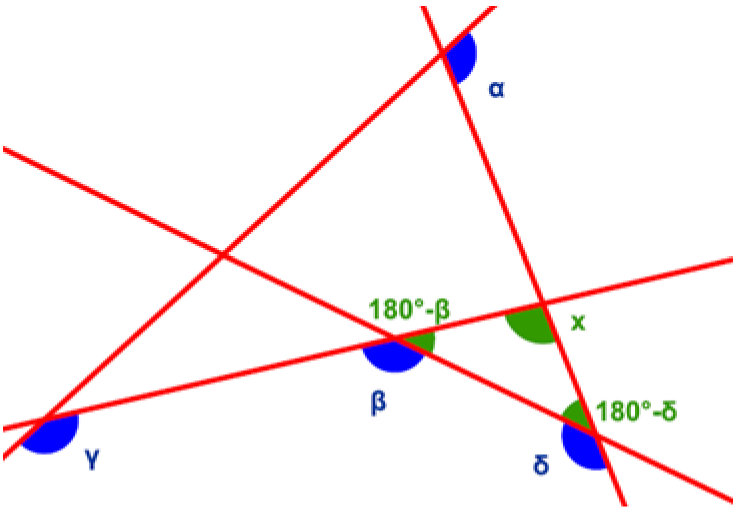
$$10234565 \underset{+11}{\longrightarrow} 10234576$$

El menor número de huit xifres diferents múltiple d'11 és 10234576

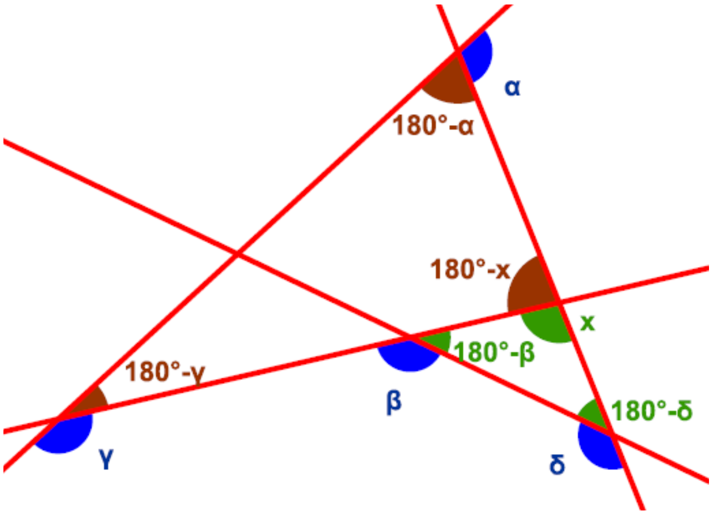
Abril 22: Calculeu: $\alpha+\beta+\gamma+\delta$



Solució:



$$x + 180° - \beta + 180° - \delta = 180°$$
$$\Rightarrow \quad 180° + x = \beta + \delta \ \ (*)$$



$$180° - \alpha + 180° - x + 180° - \gamma = 180°$$
$$360° = \alpha + \gamma + x \qquad (**)$$

Sumant (*) i (**), tenim:

$$180° + x + 360° = \beta + \delta + \alpha + \gamma + x \quad \Rightarrow \quad 540° = \beta + \delta + \alpha + \gamma$$

Abril 23-24: En una investigació demoscòpica, un grup humà es classifica d'acord amb uns certs criteris: sexe (M, F) edat (jove, madura, jubilada) tendència política (extrema esquerra, esquerra, dreta, extrema dreta) i opinió d'un líder polític (0-2, 3-4, 5-6, 7-8, 9-10). En cada classe generada hi ha 10 persones, és a dir, per exemple, hi ha 10 dones, jubilades, de dretes que classifiquen al líder polític amb 7-8 i així successivament. Quantes persones hi ha en el grup? Si una persona és dona, jove, d'esquerres i amb puntuació 3-4, quantes persones hi ha en el grup que diferisquen exactament en dos criteris? I quantes que diferisquen en almenys dos criteris?

Solució: Per a la primera pregunta, vegem quants criteris existeixen

sexe	edat	tendència política	opinió líder	total
2	3	4	5	(2·3·4·5 =) 120

Si en cadascun d'ells hi ha 10 persones, el nombre total de persones és (120·10 =) 1200.

Per a la segona pregunta tindrem:

sexe	edat	tendència	opinió	nombre persones	total
dona	jove	esquerres	3-4	1	1
dona	jove	3	4	10	(3·4·10 =) 120
dona	2	esquerres	4	10	(2·4·10 =) 80
dona	2	3	3-4	10	(2·3·10 =) 60
1	jove	esquerres	4	10	(1·4·10 =) 40
1	jove	3	3-4	10	(1·3·10 =) 30
1	2	esquerres	3-4	10	(1·2·10 =) 20

Per exemple, la tercera fila seria el total de persones que coincideixen amb la donada en el sexe (dona) i edat (jove) i difereixen d'ella en la tendència i l'opinió així successivament.

En total hi ha (120 + 80 + 60 + 40 + 30 + 20 =) 350 persones que difereixen de la considerada exactament en dos criteris.

Per a la tercera pregunta, calculem quantes persones difereixen amb la considerada únicament en un criteri

sexe	edat	tendència	opinió	número persones	total
dona	jove	esquerres	3-4	1	1
dona	jove	esquerres	4	10	(4·10 =) 40
dona	jove	3	3-4	10	(3·10 =) 30
dona	2	esquerres	3-4	10	(2·10 =) 20
1	jove	esquerres	3-4	10	(1·10 =) 10

Hi ha (40 + 30 + 20 + 10 =) 100 persones que difereixen de la considerada en exactament un criteri.

Per últim: El número de persones que difereixen de la considerada en al menys dos criteris es igual al número de persones que difereixen de la considerada menys el número de persones que difereixen de la considerada en un únic criteri. Es dir, hi ha ((1199 – 9) – 100 = 1190 – 100 =) 1090 persones que difereixen de la considerada en al menys dos criteris.

Abril 26-27: Considerem les successions d'enters positius en les quals, a partir del tercer terme, el terme n-èsim és la mitjana aritmètica dels n-1 termes anteriors. Quantes d'aquestes successions compleixen que $a_{100} = 1$?

Solució: Siga $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una de eixess successions. Aleshores tenim:

$$a_1$$

$$a_2$$

$$a_3 = \frac{a_1 + a_2}{2}$$

$$a_4 = \frac{a_1 + a_2 + a_3}{3} = \frac{a_1 + a_2 + \frac{a_1 + a_2}{2}}{3} = \frac{a_1 + a_2}{2}$$

$$a_5 = \frac{a_1 + a_2 + a_3 + a_4}{4} = \frac{a_1 + a_2 + \frac{a_1 + a_2}{2} + \frac{a_1 + a_2}{2}}{4} = \frac{a_1 + a_2}{2}$$

$$a_6 = \frac{a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5}{5} = \frac{a_1 + a_2 + \frac{a_1 + a_2}{2} + \frac{a_1 + a_2}{2} + \frac{a_1 + a_2}{2}}{5} = \frac{a_1 + a_2}{2}$$

Pareix ser que les successions de les quals parlem compleixen:

$$a_n = \frac{a_1 + a_2}{2} \quad \forall n \geq 3$$

Demostrem-ho per inducció completa. Per a n = 3 ja ho tenim provat. Suposem que tots els termes fins al n – 1 i posteriors al segon terme, coincideixen amb la semisuma dels dos primers i vegem que també el compleix el terme n-èsim.

$$a_n = \frac{a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + \cdots + a_{n-2} + a_{n-1}}{n-1} = \begin{Bmatrix} a_3 = \dfrac{a_1 + a_2}{2} \\ a_4 = \dfrac{a_1 + a_2}{2} \\ \vdots \\ a_{n-2} = \dfrac{a_1 + a_2}{2} \\ a_{n-1} = \dfrac{a_1 + a_2}{2} \end{Bmatrix}$$

$$= \frac{(a_1 + a_2) + \overbrace{\frac{a_1 + a_2}{2} + \frac{a_1 + a_2}{2} + \cdots + \frac{a_1 + a_2}{2}}^{n-3}}{n-1} = \frac{\frac{n-1}{2}(a_1 + a_2)}{n-1} = \frac{a_1 + a_2}{2}$$

Per tant, les successions de les quals parlem són aquelles en les quals a_1 i a_2 són naturals qualssevol i els termes posteriors són la mitjana aritmètica dels dos inicials. Com $a_{100} = 1$

$$a_{100} = \frac{a_1 + a_2}{2} = 1 \quad (a_1, a_2 \in \mathbb{N} \Rightarrow) \ a_1 = a_2 = 1$$

Per tant, l'única successió de les considerades que compleix $a_{100} = 1$ és la successió idènticament igual a 1

Abril 28: Si $\mathbf{a^2 + b^2 = 3 \cdot a \cdot b}$ calculeu

$$\left(\frac{\mathbf{a+b}}{\mathbf{a-b}}\right)^{\mathbf{6}}$$

Solució:

$$\left(\frac{a+b}{a-b}\right)^6 = \left(\left(\frac{a+b}{a-b}\right)^2\right)^3 = \left(\frac{(a+b)^2}{(a-b)^2}\right)^3 = \left(\frac{a^2 + b^2 + 2ab}{a^2 + b^2 - 2ab}\right)^3 = \left(\frac{3ab + 2ab}{3ab - 2ab}\right)^3 = \left(\frac{5ab}{ab}\right)^3 = 5^3 = 125$$

Abril 29: És cert que, si un natural és divisible per 28 i és divisible per 8, és també divisible per (28·8 =) 224?

Solució 1: La contestació a la pregunta oferida és no: Si N és divisible per 28 (= $7 \cdot 2^2$) el que es pot afirmar és que en la descomposició factorial de N apareix el factor 7 i el factor 2^2. Si a més N és divisible per 8 (= 2^3) en la descomposició factorial de N apareix el factor 2^3. Per tant, en la descomposició factorial de N apareix el factor 7 i el factor 2^3 i no necessàriament ha d'aparèixer el factor 7 i el factor 2^5 ($2^5 \cdot 7 = 28 \cdot 8 = 224$)

Solució 2: Amb un contraexemple, suficient.

$$\left.\begin{matrix} \text{56 és divisible per 28} \\ \text{56 és divisible per 8} \end{matrix}\right\} \text{ 56 no és divisible per 224 } (= 28 \cdot 8)$$

Abril 30: Resolgueu l'equació:

1716·6!·7! = n!

Solució: Tenim:

$$1716 = 2^2 \cdot 3 \cdot 11 \cdot 13 = 11 \cdot 12 \cdot 13$$

$$\left.\begin{matrix} 6! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 = 8 \cdot 9 \cdot 10 \\ 7! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \quad 6! \cdot 7! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 10 = 10!$$

$$1716 \cdot 6! \cdot 7! = 10! \cdot 11 \cdot 12 \cdot 13 = 13!$$

Per tant, n = 13