SOLUCIONS MAIG 2021

ACTIVITATS PER A 1ESO I 2ESO. 12-14 ANYS. AUTOR: COL·LECTIU "CONCURSO DE PRIMAVERA"

(https://www.concursoprimavera.es/#concurso)

Maig 1: En quantes parts queda dividit un cercle si dibuixem en ell 2021 diàmetres diferents

Solució: Cada diàmetre divideix al cercle en dues parts. En afegir un nou diàmetre, cadascun dels dos radis que el componen divideix a una regió en dues. Per tant, 2021 diàmetres deixaran dividit el cercle en (2·2021 =) 2042 parts.

Maig 3: Com sempre lletres diferents (iguals) representen dígits diferents (iguals)

$$\begin{array}{cccc} & A & B & C \\ & A & B & C \\ + & A & B & C \\ \hline & B & B & B \end{array}$$

Solució: L'exigit és equivalent a:

$$\begin{array}{ccc} A & B & C \\ & \times & 3 \\ \hline B & B & B \end{array}$$

Per prova i error sobre els valors possibles de C $\in\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$. Tenim que C = 0 no és possible, (perquè si C = 0 llavors B = 0 en contra que B i C tinguen valors diferents). Si suposem C = 1, llavors hauríem de tindre

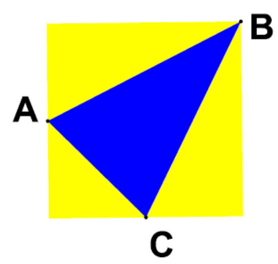
$$\begin{array}{ccc} A & 3 & 1 \\ & \times & 3 \\ \hline 3 & 3 & 3 \end{array}$$

que implica que la multiplicació està mal feta perquè 3 X 3 = 9. Seguint d'aquesta manera arribem a la possibilitat C = 8 i en aquest cas B = 4 i tot quadra (amb A =1)

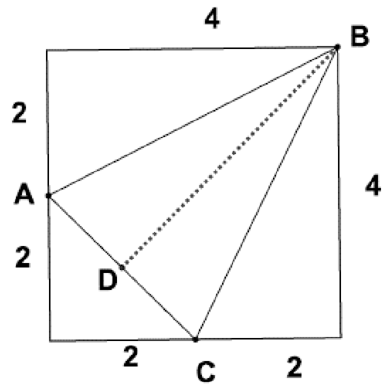
$$\begin{array}{ccc} 1 & 4 & 8 \\ & \times & 3 \\ \hline 4 & 4 & 4 \end{array}$$

Com l'últim valor possible per a C (9) també falla tenim que l'anterior és l'única solució al problema.

Maig 4: Es té un quadrat de costat 4 m. Si A i C són els punts mitjans, trobar l'àrea del triangle ΔABC



Solució: Tindrem



$$\text{base} = \text{AC} = \sqrt{2^2 + 2^2} = 2\sqrt{2}$$

$$\text{AB} = \text{CB} = \sqrt{4^2 + 2^2} = 2\sqrt{5}$$

∆ABC és isòsceles (AB = CD) y per tant, altura = BD sent D el punt mitjà d’AC.

$$\text{BD} = \sqrt{\text{BC}^2 - \text{DC}^2} = \sqrt{\left(2\sqrt{5}\right)^2 - \left(\sqrt{2}\right)^2} = 3\sqrt{2}$$

Per últim:

$$\text{A}_{\Delta\text{ABC}} = \frac{\text{AC}\cdot\text{DB}}{2} = \frac{2\sqrt{2}\cdot 3\sqrt{2}}{2} = 6\ \text{m}^2$$

Maig 5: Si sumem les edats de tres germans per parelles obtenim 26, 34 i 38 anys. Calcular l'edat del mitjà.

Solució: Siguen x, y i z les edats dels tres germans. De l'enunciat, tenim

$$\begin{aligned} x + y &= 26 \quad (1)\\ x + z &= 34 \quad (2)\\ y + z &= 38 \quad (3) \end{aligned}$$

En (1) participen els dos germans més joves, mentre que el (3) participen els dos germans més majors. Per tant, en (2) el germà que no participa és el mitjà.

Sumant les tres equacions tenim:

$$2(x + y + z) = 98; \quad x + y + z = 49 \quad (4)$$

Per últim, (4) – (1) porta a y =15. L'edat del mitjà és 15 anys.

Maig 6-7: Dani puja l'escala de la sa casa donant camallades de dues en dues i les baixa a camallades de tres en tres. Si per a pujar dona 7 camallades més que per a baixar, quants escalons té l'escala de la sa casa?

Solució: Siga x el nombre de camallades que dona Dani en pujar. Llavors x – 3 és el nombre de camallades per a baixar. Com les camallades per a pujar són de dos escalons i les camallades de baixar són de tres escalons:

$$2x = 3(x - 7); \quad 2x = 3x - 21; \quad 21 = x$$

Per tant, el nombre d'escalons és de (2·21 =) 42 escalons.

Maig 8: Cinc pilotes pesen el mateix que una baldufa i un io-io. Una baldufa pesa el mateix que dues pilotes i un io-io. Quantes pilotes pesen el mateix que dues baldufes?

Solució: Si representem per p el pes d'una pilota, per b el pes d'una baldufa i per i el pes d'un io-io, la informació de l'enunciat la podem representar per:

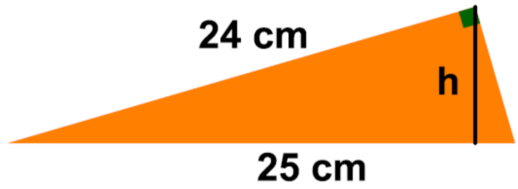
$$\begin{aligned} 5p &= 1b + 1i\\ 1b &= 2p + 1i \end{aligned}$$

Invertint la segona i sumant, tindrem:

$$\left.\begin{aligned} 5p &= 1b + 1i\\ 2p + 1i &= 1b \end{aligned}\right\} \Rightarrow \quad 7p + 1i = 2b + 1i \quad \Rightarrow \quad 7p = 2b$$

És a dir, dues baldufes pesen el mateix que set pilotes.

<u>Maig 10-11:</u> La hipotenusa d'un triangle rectangle mesura 25 cm i un catet seu mesura 24 cm, quant mesura l'altura que cau sobre la hipotenusa?



<u>Solució:</u> L'altre catet del triangle mesurarà:

$$x = \sqrt{25^2 - 24^2} = 7$$

I ara, en calcular la seua àrea:

$$A = \begin{cases} = \dfrac{24 \cdot 7}{2} \\ = \dfrac{25 \cdot h}{2} \end{cases}$$

Per tant:

$$\frac{24 \cdot 7}{2} = \frac{25 \cdot h}{2} \;\Rightarrow\; 24 \cdot 7 = 25 \cdot h \;\Rightarrow\; \frac{24 \cdot 7}{25} = h = \frac{168}{25}\text{ cm} \approx 6{,}72\text{ cm}$$

<u>Maig 12:</u> Aitana rega les plantes de la seua terrassa de la següent manera: cada dia rega els 12 tests o les 8 macetes. Si al final de la setmana ha regat 76 recipients quants dies va regar els 12 tests?

<u>Solució:</u> Siga x el nombre de dies que Aitana va regar els 12 tests. Llavors 7 – x, són els dies que va regar les 8 macetes. A més, s'ha de complir:

$$12x + 8(7 - x) = 76$$

Resolent l'equació, tenim:

$$12x + 56 - 8x = 76; \quad 4x = 20; \quad x = 5$$

Per tant, Aitana va regar aquesta setmana els 12 tests un total de 5 dies.

<u>Maig 13:</u> El número 1a69b (on a i b són dígits) és múltiple de 2, de 9 i de 11. Calcular a i b.

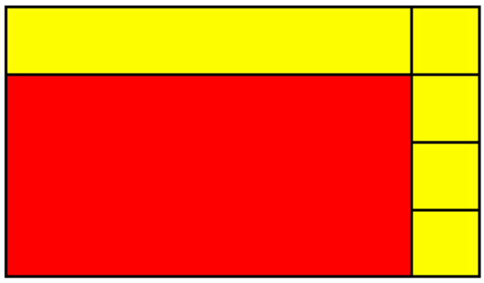
<u>Solució:</u> Recordant els criteris de divisibilitat, tindrem:

$$\begin{aligned} 1a69b = \dot{\hat{2}} \quad &\Leftrightarrow \quad b \in \{0, 2, 4, 6, 8\} \\ 1a69 = \dot{\hat{9}} \quad &\Leftrightarrow \quad 16 + a + b = \dot{\hat{9}} \\ 1a69 = \dot{\widehat{11}} \quad &\Leftrightarrow \quad 2 + a - b = \dot{\widehat{11}} \end{aligned}$$

I ara, calculant a per a cadascun dels casos possibles de b i comprovant la condició de divisibilitat per 11

b	$16+a+b=\dot{\hat{9}}$	$¿\,2+a-b=\dot{\widehat{11}}?$	
0	a = 2	no	
2	a = 0	si	10692
	a = 9	no	
4	a = 7	no	
6	a = 5	no	
8	a = 3	no	

<u>Maig 14-15:</u> A un rectangle roig de 54 cm de perímetre i amb base doble que la seua altura, se li han afegit quatre quadrats i un rectangle grocs. Quina és l'àrea del rectangle format per les sis figures?



<u>Solució:</u> De la figura adjunta tindrem:

Respecte del rectangle roig:

$$6x = 54 \quad \Rightarrow \quad x = 9 \text{ cm}$$

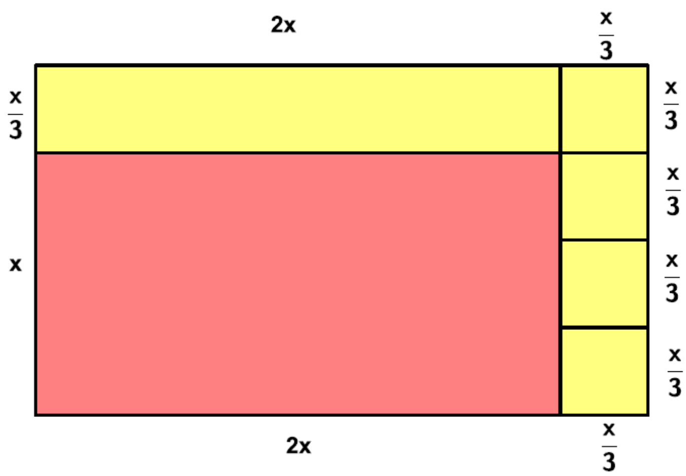
Respecte del nou rectangle:

$$\text{base} = 2x + \frac{x}{3} = \frac{7x}{3}$$

$$\text{altura} = x + \frac{x}{3} = \frac{4x}{3}$$

Per últim:

$$A = \frac{7x}{3} \cdot \frac{4x}{3} = \frac{28 \cdot x^2}{9} = \frac{28 \cdot 9^2}{9} = 252 \text{ cm}^2$$



<u>Maig 17:</u> Les longituds dels costats d'un rectangle són naturals, la base mesura 7 cm més que l'altura i la suma de les longituds de tres costats és 70 cm. Trobar el perímetre.

<u>Solució:</u> Suposem que el rectangle té base b i altura h. De l'enunciat, tenim: b = h +7. Com que la suma de les longituds de tres costats és 70, tindrem:

$$\begin{cases} 2h + b = 2h + h + 7 = 70 \ \Rightarrow \ h = 21 \ \Rightarrow \ b = 21 + 7 = 28 \\ h + 2b = h + 2(h+7) = 70 \ \Rightarrow \ 3h = 56 \ \Rightarrow \ h = \dfrac{56}{3} \notin \mathbb{N} \end{cases}$$

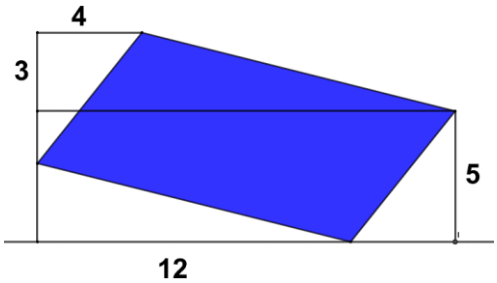
Per tant, únicament és possible h = 21 i b = 28, i en aquest cas el perímetre val (2·(21 + 28) =) 98 cm.

<u>Maig 18-19:</u> Aitana observa en el laboratori com es reprodueixen uns bacteris. El primer dia hi havia 1000, el segon el doble que el primer, el tercer el triple que el segon, el quart hi havia quatre vegades el que hi havia el tercer. Quants bacteris diries que hi haurà el desé dia?

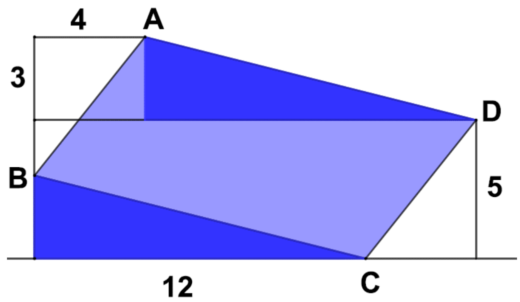
Solució: Si b_i indica el nombre de bacteris del dia i, tindrem:

$$\begin{aligned} b_{10} &= 10 \cdot b_9 = 10 \cdot 9 \cdot b_8 = 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot b_7 = 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot b_6 = 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot b_5 \\ &= 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot b_4 = 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot b_3 = 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot b_2 \\ &= 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot b_1 = 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1000 = 3{,}628{,}800 \end{aligned}$$

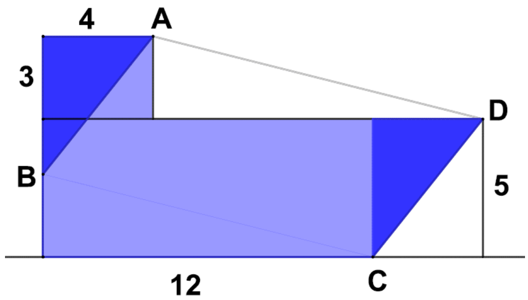
Maig 20: Trobeu l'àrea del paral·lelogram blau



Solució: Llisquem, el triangle ressaltat, del paral·lelogram blau per les arestes AB i DC

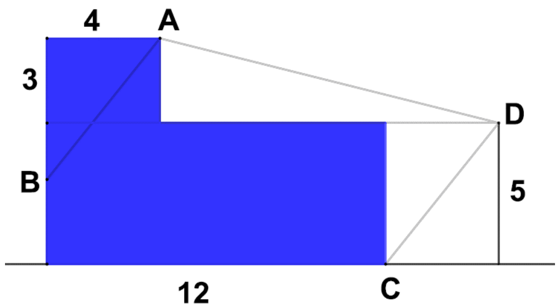


De la mateixa forma traslladem el triangle ressaltat, del paral·lelogram blau per les arestes DA i CB

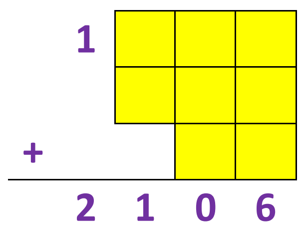


Ens queda per calcular l'àrea de la zona de color blau. Però aquest càlcul és senzill: Es tracta de dos rectangles, un de base 12 i altura 5 i un altre de base 4 i altura 3.

$$A = 3 \cdot 4 + 12 \cdot 5 = 72$$



Maig 21: Completa, amb les xifres des de 2 fins a 9, sense repetir cap, les cel·les grogues perquè la suma estiga bé



Solució: El valor més xicotet possible (per a les unitats i les desenes) és (2 + 3 + 4 =) 9 i el valor més gran és (9 + 8 + 7 =) 24. Per tant, necessàriament, la suma de les unitats ha de ser 16 i la suma de les desenes ha de ser 19 (perquè amb la qual portem obtinguem 20) i la suma de les centenes ha de ser 9 (perquè amb les dues que portem de les desenes obtinguem 11) i així estarà ben efectuada la suma. Així doncs, deurem particionar el conjunt {2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9} en tres subconjunts, dos subconjunts de tres elements amb sumes d'elements 19 i 16 i l'altre subconjunt de dos elements amb suma d'elements 9.

Les úniques possibilitats per a les centenes són:

(1) $9 = 7 + 2$ | (2) $9 = 6 + 3$ | (3) $9 = 5 + 4$

Per al cas (1), tenim:

$19 = 9 + 6 + 4$	$19 = 8 + 6 + 5$
$16 = 8 + 5 + 3$	$16 = 9 + 4 + 3$

Per al caso (2), tenim:

$19 = 9 + 8 + 2$	$19 = 8 + 7 + 4$
$16 = 7 + 5 + 4$	$16 = 9 + 5 + 2$

Per al cas (3), tenim:

$19 = 9 + 8 + 2$	$19 = 9 + 7 + 3$
$16 = 7 + 6 + 3$	$16 = 8 + 6 + 2$

Les solucions són:

$$\begin{array}{rcccc} & 1 & 7 & 9 & 8 \\ & & 2 & 6 & 5 \\ + & & & 4 & 3 \\ \hline & 2 & 1 & 0 & 6 \end{array} \qquad \begin{array}{rcccc} & 1 & 7 & 8 & 9 \\ & & 2 & 6 & 4 \\ + & & & 5 & 3 \\ \hline & 2 & 1 & 0 & 6 \end{array} \qquad \begin{array}{rcccc} & 1 & 6 & 9 & 7 \\ & & 3 & 8 & 5 \\ + & & & 2 & 4 \\ \hline & 2 & 1 & 0 & 6 \end{array}$$

$$\begin{array}{rcccc} & 1 & 6 & 8 & 9 \\ & & 3 & 7 & 5 \\ + & & & 4 & 2 \\ \hline & 2 & 1 & 0 & 6 \end{array} \qquad \begin{array}{rcccc} & 1 & 5 & 9 & 7 \\ & & 4 & 8 & 6 \\ + & & & 2 & 3 \\ \hline & 2 & 1 & 0 & 6 \end{array} \qquad \begin{array}{rcccc} & 1 & 5 & 9 & 8 \\ & & 4 & 7 & 6 \\ + & & & 3 & 2 \\ \hline & 2 & 1 & 0 & 6 \end{array}$$

Cadascuna d'aquestes solucions pot intercanviar les xifres situades en cada columna. Per tant, cadascuna d'aquestes solucions veritablement porta ($3!\cdot3!\cdot2!$ =) 72 solucions

Maig 22: Fa una setmana el 10% de la classe de Laia tenia grip. Hui, el 10% dels malalts va sanar i el 10% dels sans va emmalaltir. Quin percentatge de la classe té la grip?

Solució: Siga x la grandària de la classe. Fa una setmana teníem:

$$10\% \text{ de x tenia grip } \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{10x}{100} = \dfrac{x}{10} \text{ tenia grip} \\ \qquad \dfrac{9x}{10} \text{ no tenia grip} \end{cases}$$

Aquesta setmana tindrem:

$$90\% \text{ dels que tenia grip segueix amb grip} \Rightarrow \text{amb grip les dues setmanes} = \frac{90}{100} \cdot \frac{x}{10} = \frac{9x}{100}$$

$$10\% \text{ dels que no tenia grip té grip} \Rightarrow \text{amb grip sols aquesta setmana} = \frac{10}{100} \cdot \frac{9x}{10} = \frac{9x}{100}$$

Per tant:

$$\text{amb grip la segona setmana} = \frac{9x}{100} + \frac{9x}{100} = \frac{18x}{100} = 18\% \text{ d'x}$$

Maig 24/31-25: Completa el diagrama adjunt, sabent que és una taula de sumar (és a dir, a + b = 8, i així totes les altres caselles), que el major número que apareix és 21, i que tots els 15 naturals són diferents

+	b		
a	8	12	
	10		
	13		

Solució: Com entre 8 i 10 hi ha una diferència de 2, també l'ha d'haver-hi entre la segona i tercera entrada de la primera columna. Com entre 8 i 13 hi ha una diferència de 5, també l'ha d'haver-hi entre les entrades de segona i quarta de la primera columna. De manera anàloga entre 12 i 8 hi ha una diferència de 4 que també s'ha de mantindre entre 10 i la tercera entrada de la columna tercera i entre 13 i la quarta entrada la tercera columna i entre b i la primera entrada de la tercera columna

+	b	b+4	
a	8	12	
a+2	10	14	
a+5	13	17	

Com el major número que apareix en la taula és 21, aquest valor ha d'estar en la quarta entrada de la quarta columna. I com entre 17 i 21 hi ha una diferència de 4, aquesta diferència s'ha de mantindre entre les entrades de la quarta columna i la tercera

+	b	b+4	b+8
a	8	12	16
a+2	10	14	18
a+5	13	17	21

Queda per emplenar la primera fila i columna amb l'exigència que hi ha 15 naturals diferents. És a dir, a i b han de triar-se de {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 9, 11, 15, 16, 19, 20} de manera que es complisca a + b = 8 i a més a ≠ b. És a dir: a = 1 i b= 7 o a = 2 i b = 6 o a = 3 i b = 5. En definitiva les solucions possibles són: (i les seues transposades entre primera fila i columna)

+	7	11	15
1	8	12	16
3	10	14	18
6	13	17	21

+	6	10	14
2	8	12	16
4	10	14	18
7	13	17	21

+	5	9	13
3	8	12	16
5	10	14	18
8	13	17	21

Maig 26: Els convidats a unes noces van ocupar diverses taules de 7 comensals. Com estaven molt atapeïts es va preparar 3 taules més i llavors van ocupar totes les taules, però amb 6 comensals per taula. Quants convidats hi havia?

Solució: Si x és el nombre de taules amb 7 comensals, x + 3 és el nombre de taules de 6 comensals. Per tant:

$$7x = 6(x+3) \quad \Rightarrow \quad x = 18$$

Per tant, en les noces hi havia (7·18 =) 126 convidats.

Maig 27: Com sempre lletres diferents (iguals) representen dígits diferents (iguals)

$(LEE)^2$ = PEDAL

Solució: Com el major (menor) valor possible per a PEDAL és 98765 (10234) tindrem:

$$101 < \sqrt{10234} \le \mathrm{LEE} = \sqrt{\mathrm{PEDAL}} \le \sqrt{98765} < 315$$

Per tant, L només pot prendre els valors 1, 2 o 3.

Si suposem L = 1, com $(1\mathrm{EE})^2 = \mathrm{PEDA1}$, acaba en 1 (= L), busquem una xifra E tal que

$$\mathrm{E}^2 = 10\mathrm{x} + 1$$

L'única possibilitat (excloent L = 1 = E, por anar contra l'enunciat) és E = 9 (mirar taula adjunta). En aquest cas:

$$(\mathrm{LEE})^2 = (199)^2 = 30601 = \mathrm{PEDAL}$$

I, per tant, es compleixen totes les exigències de l'enunciat. Ja tenim una solució.

Si suposem L = 2, com $(2\mathrm{EE})^2 = \mathrm{PEDA2}$, acaba en 2 (= L), busquem una xifra E tal que

$$\mathrm{E}^2 = 10\mathrm{x} + 2$$

Però, segons la taula adjunta per a cap valor possible d'E el seu quadrat acaba en 2. Es dir L = 2, no aporta cap solució.

Si suposem L = 3, com $(3\mathrm{EE})^2 = \mathrm{PEDA3}$, acaba en 3 (= L), busquem una xifra E tal que

$$\mathrm{E}^2 = 10\mathrm{x} + 3$$

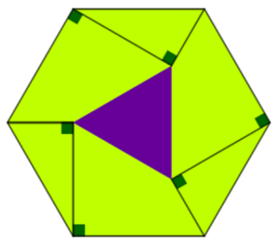
Però, segons la taula adjunta per a cap valor possible d'E el seu quadrat acaba en 3. Es dir L = 3, no aporta cap solució.

E	E^2
0	0
1	1
2	4
3	9
4	16
5	25
6	36
7	49
8	64
9	81

L'única solució al problema plantejat és:

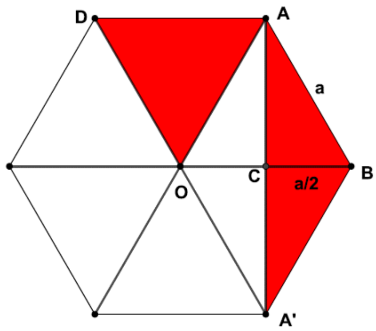
$$(\mathrm{LEE})^2 = (199)^2 = 30601 = \mathrm{PEDAL}$$

Maig 28-29: Ajudant-nos d'algunes perpendiculars hem dibuixat un triangle morat a l'interior de l'hexàgon regular verd. Si l'àrea de l'hexàgon regular és 120 cm², quina és l'àrea, en cm², del triangle morat?



Solució: Recordem que un hexàgon regular de costat a, podem considerar-lo compost per sis triangles equilàters de costat a. Per tant, tindrem:

$$A_{\Delta OAD} = A_{\Delta OAB} = 2 \cdot A_{\Delta ACB} = A_{\Delta ACB} + A_{\Delta CBA'} = A_{\Delta AA'B}$$



Segons l'anterior, en la il·lustració adjunta, l'àrea dels triangles blaus equival a la meitat de l'àrea de l'hexàgon. D'ací:

$$A_{\Delta PTQ} = \frac{120}{2} = 60$$

Com el triangle ΔXYZ divideix en quatre triangles iguals al triangle ΔTPQ, tindrem:

$$60 = A_{\Delta TPQ} = 4 \cdot A_{\Delta XYZ} \ \Rightarrow \ \frac{60}{4} = A_{\Delta XYZ} = 15\ \text{cm}^2$$