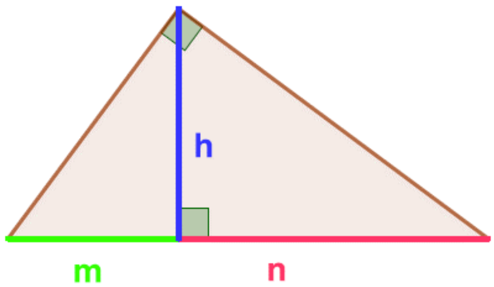
SOLUCIONES SEPTIEMBRE 2021

PROBLEMAS DE GEOMETRÍA DE TWITTER (3º y 4º de E.S.O. y bachillerato). SOLUCIONES DE MIGUEL HERRAIZ HIDALGO. SES de Cabanes. Castelló.

Pequeño compendio de resultados geométricos utilizados.

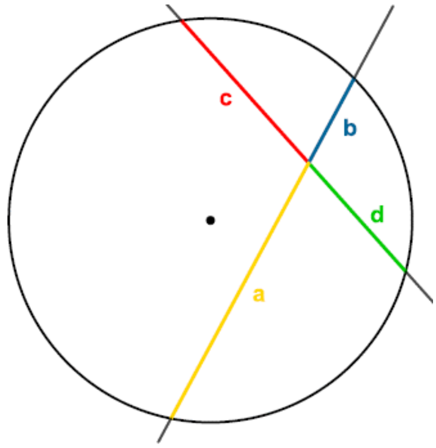
Teorema de la altura:

$$\mathbf{h^2 = m \cdot n}$$



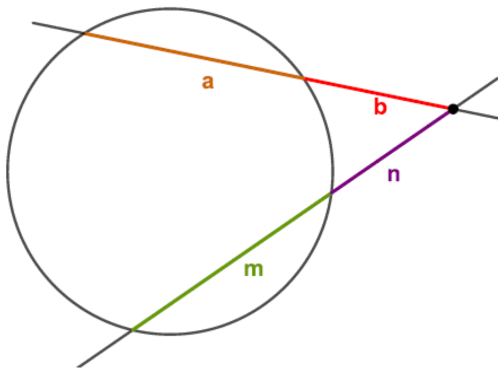
Teorema de las cuerdas (problema del día 29):

$$\mathbf{a \cdot b = c \cdot d}$$



Potencia de un punto respecto a una circunferencia:

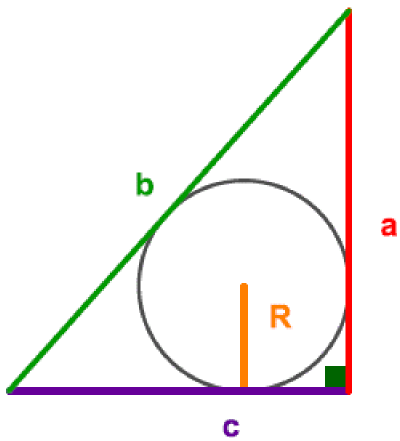
$$\mathbf{(a+b) \cdot b = (m+n) \cdot n}$$



Relación entre área y perímetro de un triángulo rectángulo y el radio de la circunferencia inscrita al triángulo (problema del día 13):

$$\mathbf{c \cdot a = (a+b+c) \cdot R}$$

$$\mathbf{2A = P \cdot R}$$

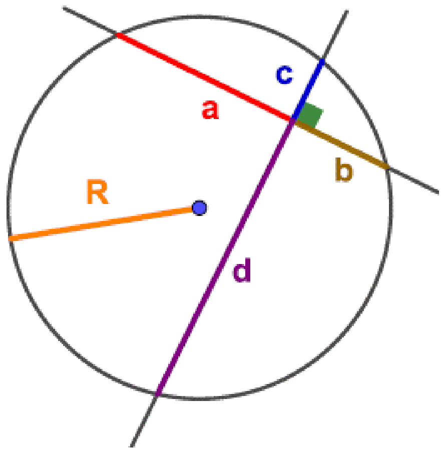


Razones del ángulo doble:

$$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \mathrm{sen}^2\alpha; \quad \mathrm{sen}2\alpha = 2\mathrm{sen}\alpha\cos\alpha; \quad \mathrm{tg}2\alpha = \frac{2\mathrm{tg}\alpha}{1-\mathrm{tg}^2\alpha}$$

Teorema de Faure (problema del día 27):

$$4R^2 = a^2 + b^2 + c^2 + d^2$$



Ángulo central y ángulo inscrito (t es la tangente a la circunferencia en B)

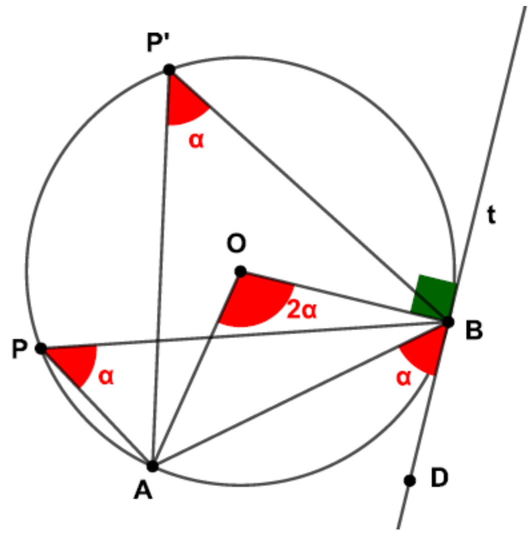
$$2\alpha = \widehat{AB}$$

Ángulo inscrito:

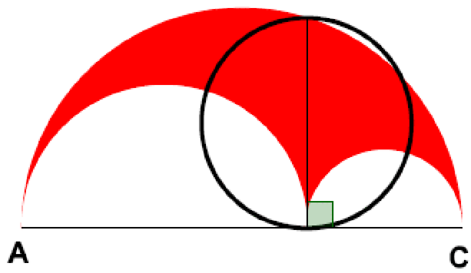
$$\angle APB = \angle AP'B = \angle ABD = \alpha$$

Ángulo central:

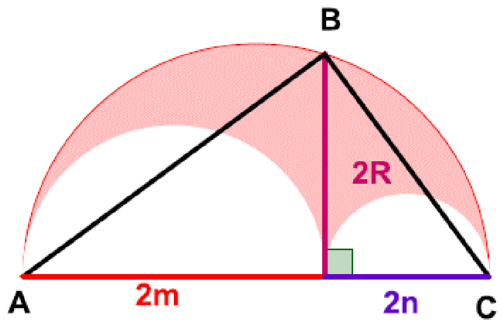
$$\angle AOB = 2\alpha$$



<u>**Septiembre 1:**</u> Tres semicircunferencias con centro en el segmento AC. Relaciona el área de la zona roja y el área del círculo negro



<u>**Solución:**</u>



Consideremos el triángulo ΔABC. Ese triángulo es rectángulo en B (pues AC en un diámetro de la semicircunferencia grande), con hipotenusa 2n + 2m (siendo m y n los radios de las semicircunferencias mediana y pequeña) y con altura desde B de 2R (siendo R el radio del círculo negro).

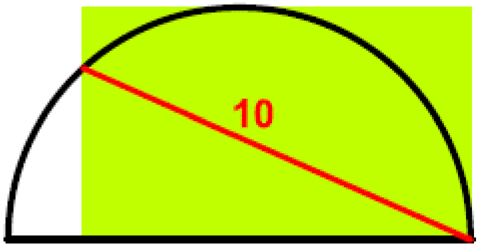
Si aplicamos el teorema de la altura al triángulo ΔABC, tenemos:

$$2m \cdot 2n = (2R)^2 \quad \Rightarrow \quad m \cdot n = R^2$$

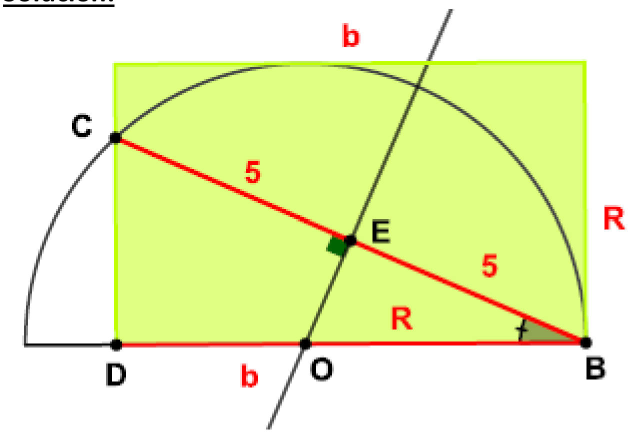
Por lo tanto:

$$\textbf{Área zona roja} = \frac{\pi[(m+n)^2 - m^2 - n^2]}{2} = \frac{2\pi mn}{2} = \pi R^2 = \textbf{área círculo negro}$$

Septiembre 2: Semicírculo, cuerda de longitud 10 y rectángulo. Halla área del rectángulo



Solución:

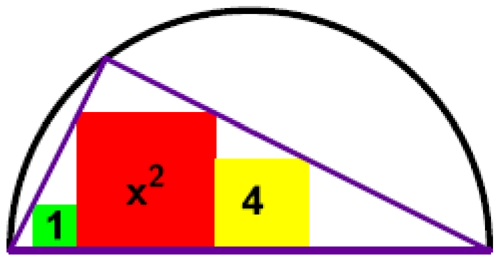


Sea b la base del rectángulo y R su altura.

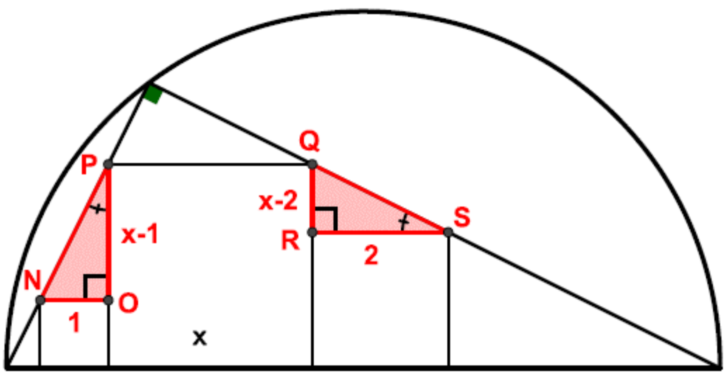
Trazamos por el punto medio de la cuerda (el punto E) una perpendicular a la cuerda. Esa perpendicular pasa por el centro de la semicircunferencia. Quedan generados los triángulos ΔEOB y ΔDBC. Ambos son rectángulos (en E y en D) y tienen en común el ángulo en B. Por tanto son semejantes. De aquí:

$$\frac{R}{5} = \frac{5+5}{b} \quad \Rightarrow \quad Rb = 50$$

Septiembre 3: Semicírculo, tres cuadrados de áreas 1, x^2 y 4 y triángulo. Halla x



Solución:

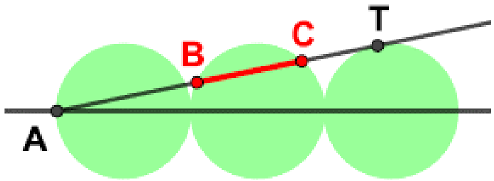


Los triángulos ΔOPN y ΔRSQ son semejantes pues son rectángulos (en O y en R y los ángulos señalados son iguales (por tener lados perpendiculares). Por tanto:

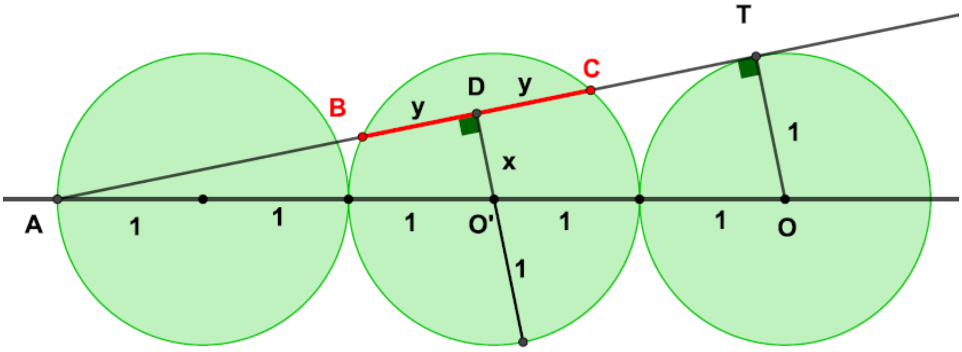
$$\frac{1}{x-1} = \frac{x-2}{2} \quad \Rightarrow \quad x(x-3) = 0$$

Por tanto x = 3, (pues x = 0 carece de sentido)

Septiembre 4: Tres círculos iguales, de radio 1, tangentes entre sí, T punto de tangencia. Halla BC



Solución:



Consideremos D, el punto medio del segmento BC. La perpendicular por D al segmento BC pasa por el centro de la circunferencia intermedia: O'.

Tenemos que ΔATO $\approx$ ΔADO' pues ambos son rectángulos (en T y D) y tienen en común el ángulo en A. Por tanto:

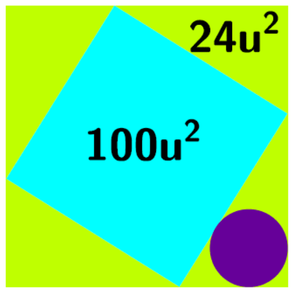
$$\frac{5}{1} = \frac{3}{x} \quad \Rightarrow \quad x = \frac{3}{5}$$

Por el teorema de las cuerdas en la circunferencia intermedia, tendremos:

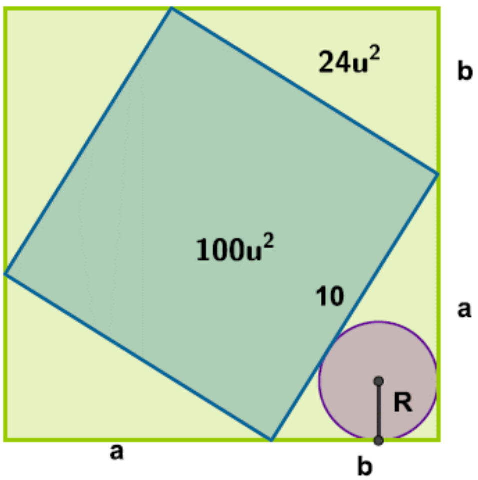
$$y \cdot y = \left(1 - \frac{3}{5}\right) \cdot \left(1 + \frac{3}{5}\right) \quad \Rightarrow \quad y^2 = \frac{16}{25} \quad \Rightarrow \quad y = \frac{4}{5}$$

$$\mathbf{BC} = 2y = \mathbf{\frac{8}{5}}$$

Septiembre 6: Dos cuadrados y un círculo. Halla el área del círculo



Solución:



Los cuatro triángulos de color verde son iguales (al tener los catetos medidas a y b e hipotenusa 10). El área del cuadrado grande es:

$$100 + 4 \cdot 24 = 196 = 14^2 \quad \Rightarrow \quad a + b = 14$$

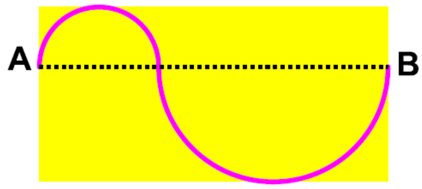
Por la relación entre el área y el perímetro (A y P) de un triángulo rectángulo y el radio del círculo inscrito (R) (problema del día 13), tenemos:

$$2A = P \cdot R \quad \Rightarrow \quad 2 \cdot 24 = (10 + a + b) \cdot R \quad \Rightarrow \quad R = \frac{2 \cdot 24}{(10 + 14)} = 2$$

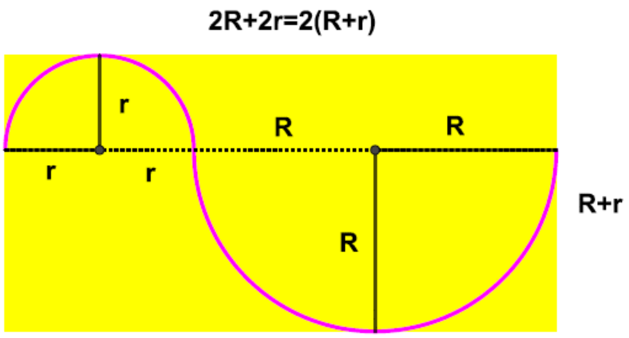
El área del círculo, es, pues:

$$\textbf{Área círculo} = \pi \cdot 2^2 = \mathbf{4\pi}$$

Septiembre 7: Dos semicircunferencias con diámetros en AB||base. Si la línea fucsia mide π, halla el perímetro del rectángulo



Solución:



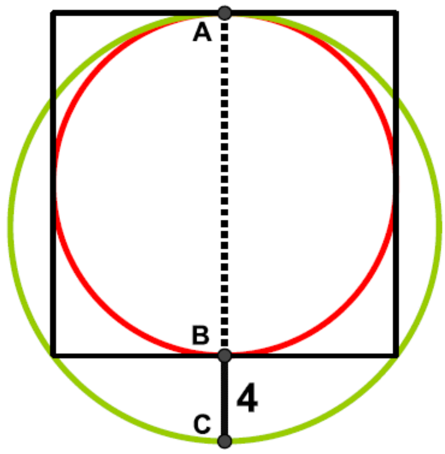
La longitud de las dos semicircunferencias es:

$$\frac{2\pi r}{2}+\frac{2\pi R}{2}=\pi \Rightarrow R+r=1$$

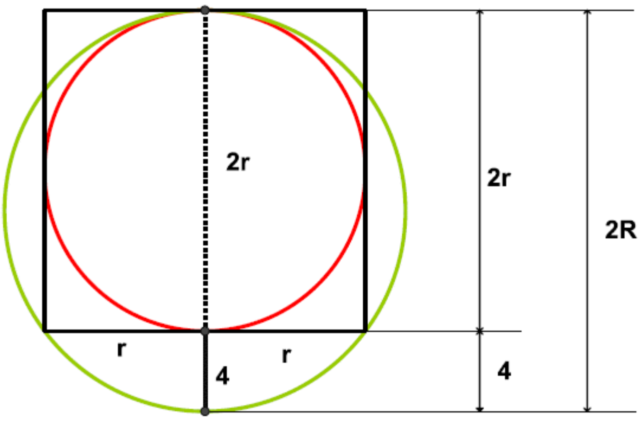
Para el rectángulo color amarillo, tendremos:

$$\left.\begin{array}{r}\text{Altura} = R+r=1\\ \text{base}=2(R+r)=2\end{array}\right\} \Rightarrow P=2\cdot(1+2)=6$$

Septiembre 8: Dos circunferencias con centro en AB. Si BC = 4 cm, halla el área encerrada entre los círculos.



Solución:



Si aplicamos el teorema de las cuerdas a las dos cuerdas del círculo verde tenemos:

$$2r\cdot 4=r\cdot r \Rightarrow r=8$$

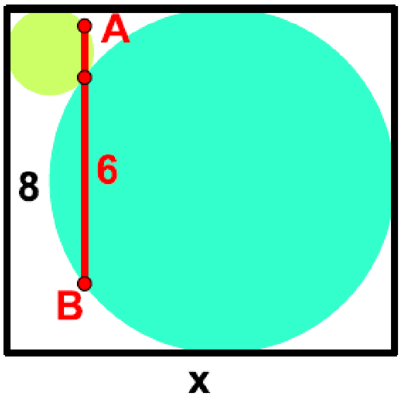
De la figura:

$$2r+4=2R \Rightarrow R=r+2=8+2=10$$

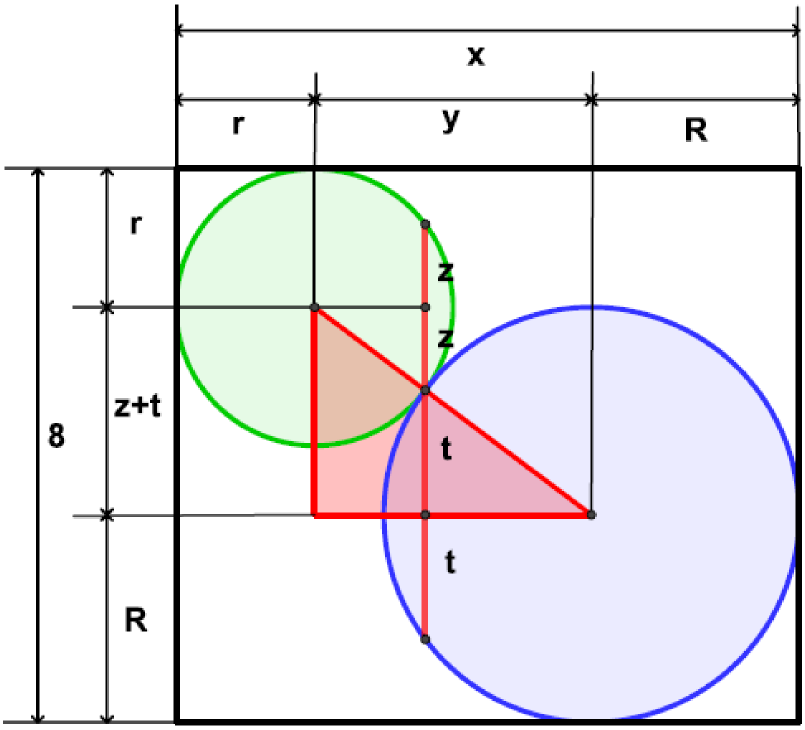
Por lo tanto, el área entre los dos círculos es:

$$\pi R^2-\pi r^2=\pi(10^2-8^2)=36\pi$$

Septiembre 9: Dos círculos tangentes y un rectángulo de base x y altura 8. Si AB = 6, hallar x.



Solución:



De la figura tenemos:

$$x = y + r + R$$

Puesto que el segmento AB mide 6:

$$2t + 2z = 6 \ \Rightarrow t + z = 3$$

Y, además:

$$r + t + z + R = 8 \ \Rightarrow r + R = 8 - 3 = 5$$

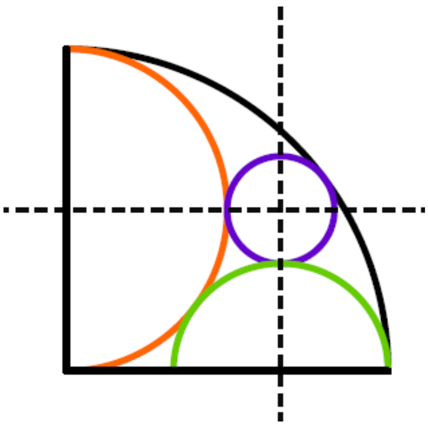
Consideremos el triángulo rojo, que es rectángulo con catetos: t + z = 3 e y, e hipotenusa r + R = 5. Al aplicarle el teorema de Pitágoras, tenemos:

$$y = \sqrt{5^2 - 3^2} = 4$$

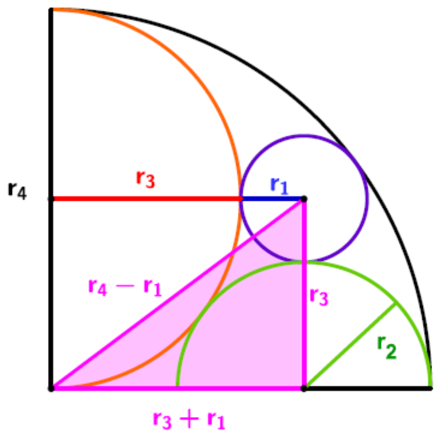
Por tanto:

$$x = y + r + R = 4 + 5 = 9$$

Septiembre 10: Un cuadrante, un círculo y dos semicircunferencias, todas tangentes entre sí. Halla la relación entre radios



Solución:



Sean: r_1 el radio de la circunferencia pequeña, r_2 y r_3 los radios de las semicircunferencia pequeña y grande y r_4 el radio del cuadrante. Obviamente:

$$2r_3 = r_4 \quad ; \quad r_3 = r_1 + r_2 \ (*) \quad ; \quad r_3 + r_1 = r_4 - r_2$$

Consideremos el triángulo rectángulo de color magenta: Al aplicar el teorema de Pitágoras tenemos:

$$(r_4 - r_1)^2 = (2r_3 - r_1)^2 = r_3^2 + (r_1 + r_3)^2 \quad \Rightarrow \quad 2r_3^2 = 6r_3r_1$$

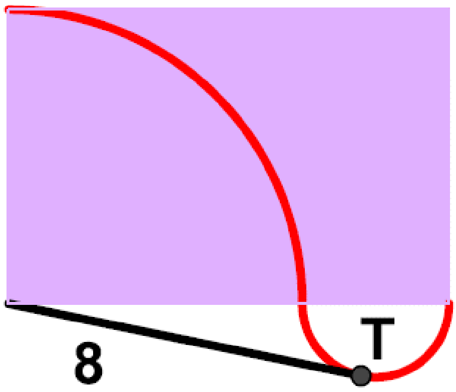
Despreciando $r_3 = 0$, nos queda $\mathbf{r_3 = 3r_1}$. Sustituyendo en (*), tenemos:

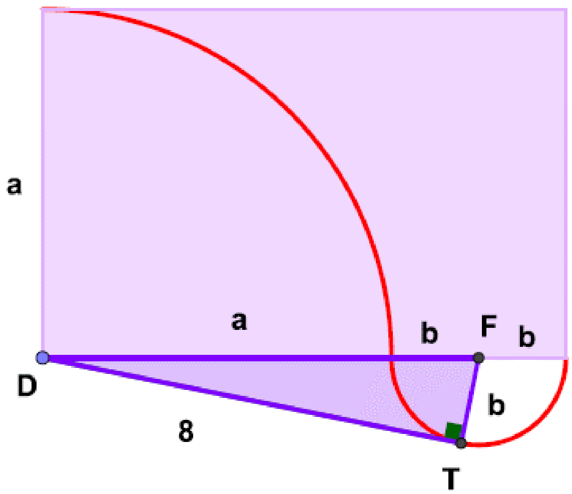
$$r_3 = r_1 + r_2 = \frac{r_3}{3} + r_2 \quad \Rightarrow \quad \mathbf{3r_2 = 2r_3}$$

Con ello:

$$r_4 = 2r_3 = 3r_2 = 6r_1 \quad \Rightarrow \quad \mathbf{r_4 : r_3 : r_2 : r_1 = 6 : 3 : 2 : 1}$$

Septiembre 11: Un cuadrante, un semicírculo, un rectángulo, T es un punto de tangencia. Halla el área del rectángulo





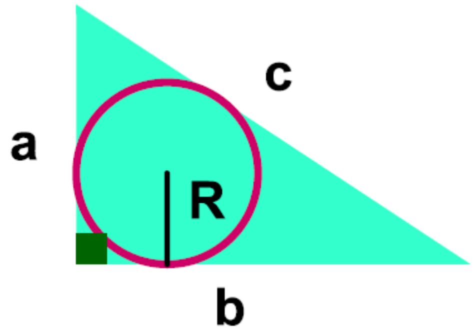
Solución 1: Consideremos el triángulo rectángulo ΔDTF. Al aplicar Pitágoras tendremos:

$$(a + b)^2 = b^2 + 64 \quad \Rightarrow \quad a^2 + 2ab = 64$$
$$\Rightarrow \quad \text{altura} \cdot \text{base} = A_{rec} = 64$$

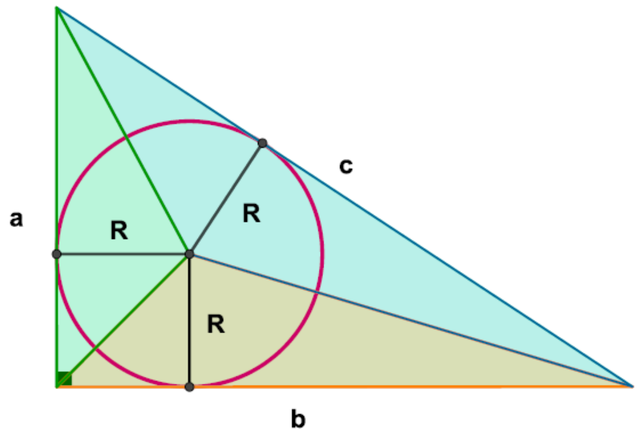
Solución 2: Si calculamos la potencia del punto D respecto a la semicircunferencia, tenemos:

$$8^2 = a \cdot (a + 2b) = A_{rec}$$

<u>Septiembre 13:</u> (Relación entre área y perímetro de un triángulo rectángulo y radio de la circunferencia inscrita) Halla R en función de a, b y c.



<u>Solución:</u>



El centro de la circunferencia circunscrita (de radio R) divide al triángulo inicial en tres triángulos de base los lados del triángulo inicial y altura R. Entonces:

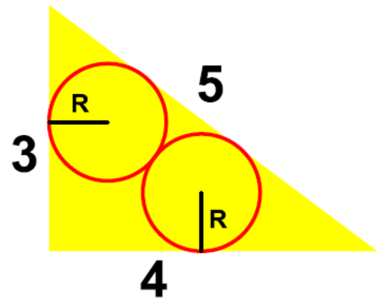
$$\frac{ab}{2} = A = \frac{aR}{2} + \frac{bR}{2} + \frac{cR}{2} = \frac{R(a+b+c))}{2}$$

En otras palabras:

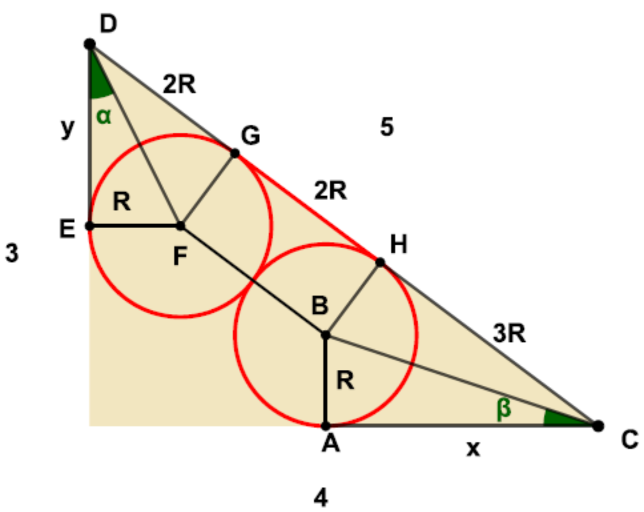
$$2A = R \cdot P$$

donde A es el área y P el perímetro del triángulo inicial y R es el radio de la circunferencia inscrita

<u>Septiembre 14:</u> Halla R



<u>Solución 1:</u>



Sean F y B los centros de las circunferencias. Entonces, puesto que F (B) equidista de las rectas que generan el ángulo en D (C), tendremos que F (B) es de la bisectriz del ángulo en D (C).

De los triángulos ΔDEF y ΔABC tendremos:

$$\mathrm{tg}2\alpha = \frac{2\mathrm{tg}\alpha}{1-\mathrm{tg}^2\alpha} = \frac{4}{3} \Rightarrow 2\mathrm{tg}^2\alpha + 3\mathrm{tg}\alpha - 2 = 0 \Rightarrow \mathrm{tg}\alpha = \frac{1}{2}$$

(despreciando tg $\alpha = -2$)

$$\mathrm{tg}2\beta = \frac{2\mathrm{tg}\beta}{1-\mathrm{tg}^2\beta} = \frac{3}{4} \Rightarrow 3\mathrm{tg}^2\beta + 8\mathrm{tg}\alpha - 3 = 0 \Rightarrow \mathrm{tg}\beta = \frac{1}{3}$$

(despreciando tg β = – 3).

Tendremos en ΔDEF:

$$\frac{1}{2} = \mathrm{tg}\alpha = \frac{\mathrm{R}}{\mathrm{y}} \quad \Rightarrow \quad \mathrm{y} = 2\mathrm{R}$$

Y en ΔABC:

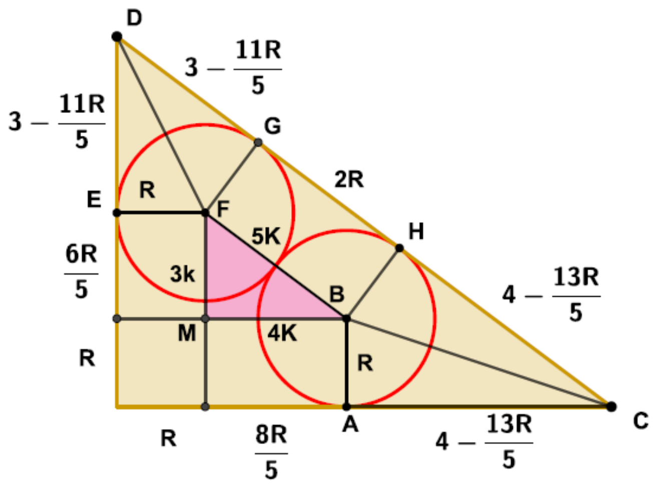
$$\frac{1}{3} = \mathrm{tg}\beta = \frac{\mathrm{R}}{\mathrm{x}} \quad \Rightarrow \quad \mathrm{x} = 3\mathrm{R}$$

Además: ΔDEF = ΔDFG por ser rectángulos y tener los mismos catetos pequeños y la misma hipotenusa. (ΔABC = ΔHBC, por la misma razón). Luego: DG = 2R y HC = 3R.

Por último:

$$5 = 2\mathrm{R} + 2\mathrm{R} + 3\mathrm{R} = 7\mathrm{R} \quad \Rightarrow \mathrm{R} = \frac{5}{7}$$

Solución (Toni Gomà):



Sean F y B los centros de las circunferencias. Los triángulos inicial y ΔMFB son semejantes pues ambos tienen los lados paralelos. Por lo tanto, FB = 5k =2R, MB = 4k y MF = 3k. Por lo que:

$$5\mathrm{k} = 2\mathrm{R} \Rightarrow \mathrm{k} = \frac{2\mathrm{R}}{5} \Rightarrow \begin{cases} \mathrm{MB} = \dfrac{8\mathrm{R}}{5} \\ \mathrm{MF} = \dfrac{6\mathrm{R}}{5} \end{cases}$$

De aquí:

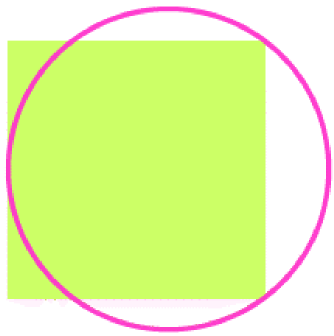
$$\mathrm{AC} = 4 - \left(\mathrm{R} + \frac{8\mathrm{R}}{5}\right) = 4 - \frac{13\mathrm{R}}{5}$$

$$\mathrm{ED} = 3 - \left(\mathrm{R} + \frac{6\mathrm{R}}{5}\right) = 3 - \frac{11\mathrm{R}}{5}$$

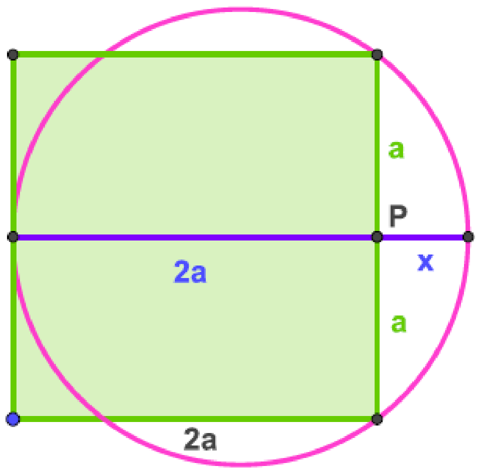
Además: ΔDEF = ΔDFG por ser rectángulos y tener los mismos catetos pequeños y la misma hipotenusa. (ΔABC = ΔHBC, por la misma razón). Luego, al tener en cuenta la hipotenusa del triángulo inicial, tenemos:

$$5 = \mathrm{DG} + \mathrm{GH} + \mathrm{HC} = 3 - \frac{11\mathrm{R}}{5} + 2\mathrm{R} + 4 - \frac{13\mathrm{R}}{5} \quad \Rightarrow \quad \mathrm{R} = \frac{5}{7}$$

Septiembre 15: Un cuadrado y un círculo. ¿Cuál de los dos tiene el perímetro más grande?



Solución:



Sea 2a el lado del cuadrado. Al calcular la potencia del punto P respecto de la circunferencia, tenemos:

$$a \cdot a = a^2 = 2a \cdot x \;\Rightarrow\; x = \frac{a}{2}$$

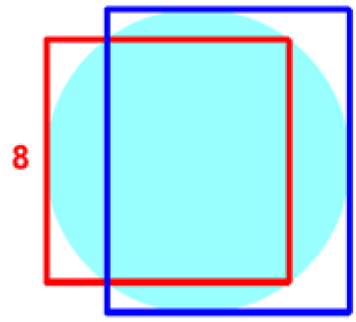
(pues $a \neq 0$). Por tanto, si R es el radio de la circunferencia:

$$2R = 2a + x = 2a + \frac{a}{2} = \frac{5a}{2} \;\Rightarrow\; R = \frac{5a}{4}$$

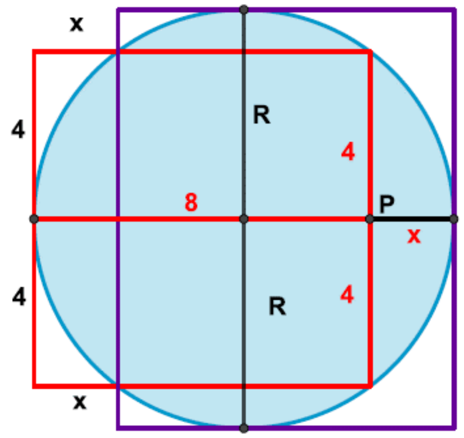
Por último:

$$P_{\text{cuadrado}} = 4 \cdot 2a = 8a > \frac{5a\pi}{2} = 2R\pi = P_{\text{círculo}}$$

Septiembre 16: Un cuadrado de lado 8, un rectángulo y un círculo. Halla el área del círculo y el rectángulo.



Solución:



Calculando la potencia de P respecto de la circunferencia, tenemos:

$$4 \cdot 4 = x \cdot 8 \;\Rightarrow\; x = 2$$

Por lo tanto el diámetro de la circunferencia es:

$$8 + 2 = 10 = 2R \;\Rightarrow\; R = 5$$

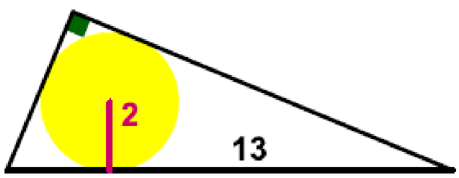
El área del círculo es:

$$\pi R^2 = 25\pi$$

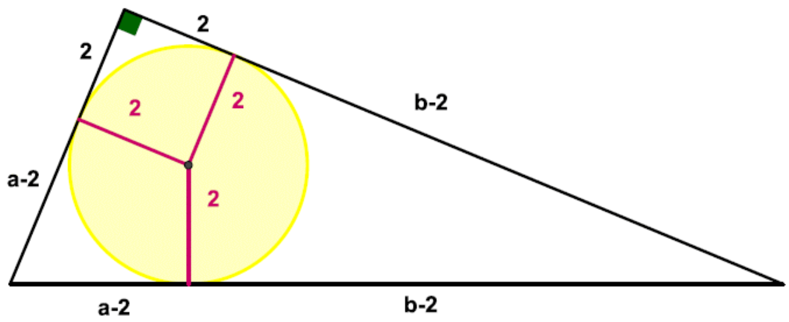
Por último para el rectángulo, tenemos:

$$\left.\begin{array}{l} \text{base} = 8 - x + x = 8 \\ \text{altura} = 2R = 10 \end{array}\right\} \Rightarrow \text{Área} = 8 \cdot 10 = 80$$

Septiembre 17: Un triángulo rectángulo de hipotenusa 13. Círculo inscrito de radio 2. Halla el área del triángulo



Solución:



Recordemos que las dos tangentes a la circunferencia por un punto exterior a ella miden lo mismo. Tendremos, entonces que si a (b) es el cateto pequeño (grande) del triángulo, puesto que la hipotenusa mide 13:

$$a-2+b-2=13 \Rightarrow a+b=17$$

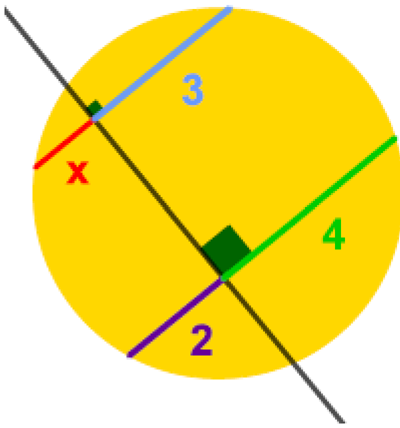
Puesto que en el triángulo se cumple el teorema de Pitágoras, tendremos el sistema:

$$\left.\begin{array}{r} a+b=17 \\ a^2+b^2=13^2 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{r} (a+b)^2=17^2 \\ a^2+b^2=13^2 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{r} a^2+b^2+2ab=17^2 \\ a^2+b^2=13^2 \end{array}\right\} \Rightarrow ab=\frac{17^2-13^2}{2}=60$$

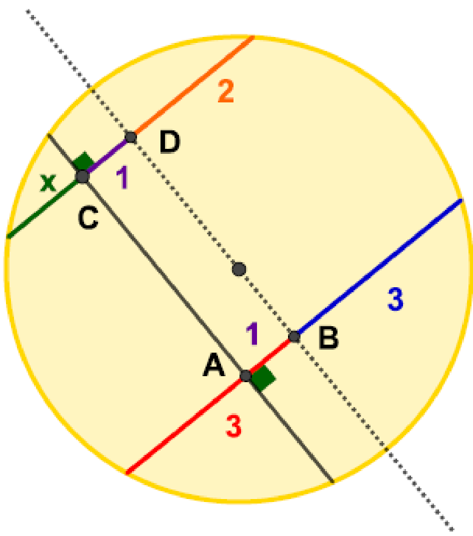
Luego el área del triángulo es:

$$A=\frac{ab}{2}=\frac{60}{2}=30$$

Septiembre 18: Círculo y tres cuerdas, dos de ellas paralelas. Halla x



Solución:

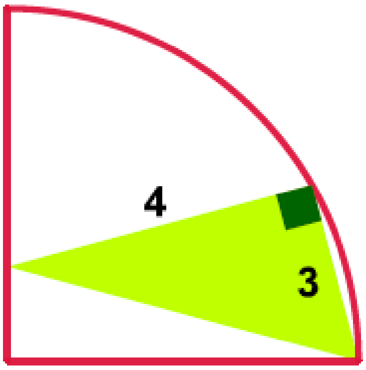


Recordemos que el diámetro es la intersección con el círculo de la perpendicular a una cuerda por su punto medio. Sea la recta que pasa por B y D esa perpendicular. Como:

$$\frac{4+2}{2}=\frac{6}{2}=3 \quad \Rightarrow \quad AB=1=CD$$

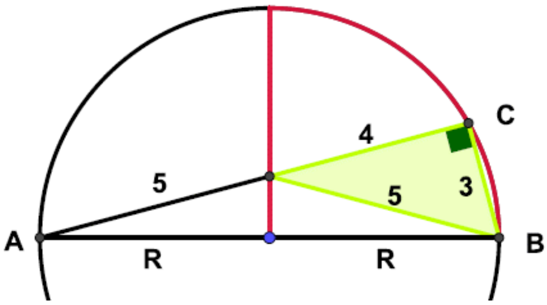
De donde:

$$x+1=3-1=2 \quad \Rightarrow \quad x=1$$



Septiembre 20: Un cuadrante y un triángulo rectángulo de catetos 3 y 4. Halla el área del cuadrante

Solución:



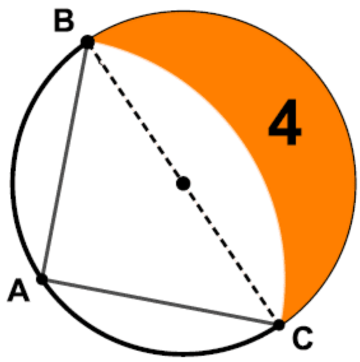
En el triángulo verde tendremos que su hipotenusa vale 5.

Consideremos la circunferencia generada por el cuadrante. Como el ángulo en C es de 90°, AB será el diámetro del círculo. De aquí:

$$2\mathrm{R} = \sqrt{(4+5)^2 + 3^2} = 3\sqrt{10} \;\Rightarrow\; \mathrm{R} = \frac{3\sqrt{10}}{2}$$

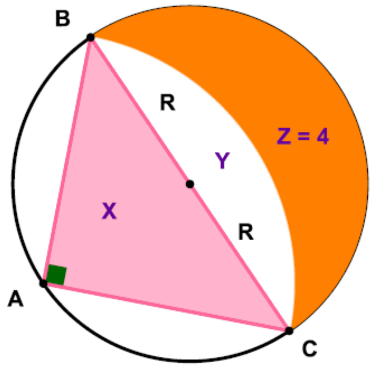
Por lo tanto, el área del cuadrante será:

$$\frac{\pi \mathrm{R}^2}{4} = \frac{\pi \frac{90}{4}}{4} = \frac{45}{8}\pi$$



Septiembre 21: Un círculo de diámetro BC y un cuadrante. Área de la zona sombreada 4. Halla el área del círculo

Solución:



Sea R el radio del círculo, X el área del triángulo ΔABC, Y el área del segmento que genera el cuadrante y Z = 4 el área de la zona color naranja. En ΔABC, al aplicar Pitágoras (pues AB = AC = radio del cuadrante), tendremos:

$$\mathrm{AC} = \mathrm{AB} = \sqrt{2}\cdot \mathrm{R}$$

Por tanto:

$$\left.\begin{array}{l} \mathrm{X} + \mathrm{Y} = \frac{1}{4}\pi\left(\sqrt{2}\,\mathrm{R}\right)^2 = \frac{\pi \mathrm{R}^2}{2} \\ \mathrm{Y} + \mathrm{Z} = \frac{1}{2}\pi \mathrm{R}^2 \end{array}\right\} \Rightarrow \mathrm{X} + \mathrm{Y} = \mathrm{Y} + \mathrm{Z} \Rightarrow \mathrm{X} = \mathrm{Z} = 4$$

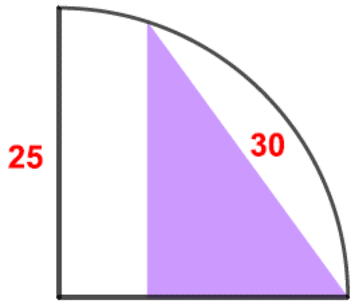
Pero:

$$4 = X = \frac{AB \cdot AC}{2} = R^2$$

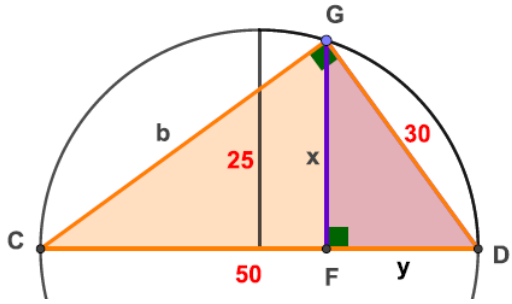
Por lo que R = 2. Y de aquí:

$$A_{círculo} = \pi \cdot 2^2 = 4\pi$$

Septiembre 22: Cuadrante de radio 25 y triángulo rectángulo de hipotenusa 30. Halla los catetos del triángulo



Solución:



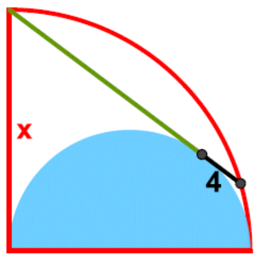
Consideremos la circunferencia generada por el cuadrante. Trazamos el segmento CG. Puesto que CD es un diámetro (de longitud 2·25 = 50), el ángulo en G es de 90°. Al aplicar Pitágoras en el ΔCDG, tendremos:

$$b = \sqrt{50^2 - 30^2} = 40$$

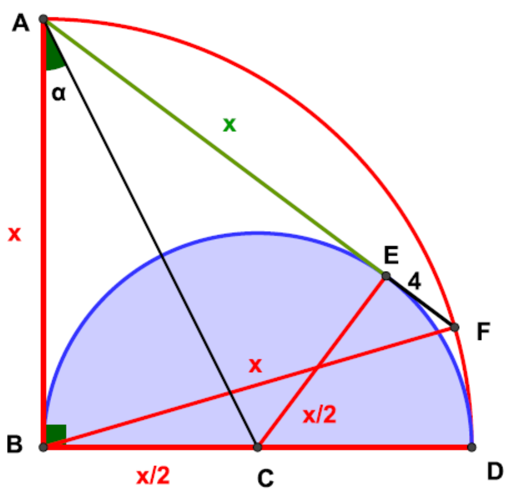
Como ΔCGD ≈ ΔGFD (al ser los dos rectángulos y tener en común el ángulo en D), tendremos:

$$\frac{x}{40} = \frac{30}{50} = \frac{y}{30} \Rightarrow \begin{cases} x = 24 \\ y = 18 \end{cases}$$

Septiembre 23: Un cuadrante, un semicírculo y una cuerda tangente. Halla x



Solución 1:



Consideremos el triángulo ΔABF, de lados x, x y x + 4. Si conociésemos algún ángulo del triángulo podríamos aplicar el teorema del coseno, para hallar x.

Sea C el centro de la semicircunferencia. Consideremos las dos tangentes a la semicircunferencia trazadas por A y la bisectriz del ángulo formado en A. Puesto que la bisectriz equidista de las rectas que generan los lados del ángulo tendremos que C pertenece a la bisectriz y se generan dos triángulos iguales: ΔABC y ΔAEC. En el triángulo ΔABC, tendremos:

$$AB = x;\ BC = \frac{x}{2};\ AC = \frac{\sqrt{5}}{2}x$$

Con lo que:

$$\cos\alpha = \frac{2}{\sqrt{5}};\ \ \operatorname{sen}\alpha = \frac{1}{\sqrt{5}};\ \ \cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \operatorname{sen}^2\alpha = \frac{4}{5} - \frac{1}{5} = \frac{3}{5}$$

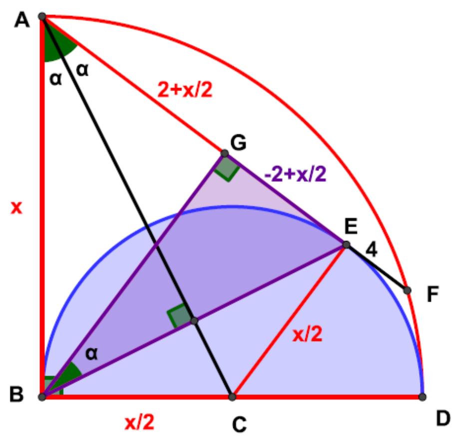
Aplicando el teorema del coseno en ΔABF, tenemos:

$$x^2 = x^2 + (x+4)^2 - 2x(x+4)\frac{3}{5}$$

que lleva a:

$$\left.\begin{array}{r} x+4=0 \ \text{ que se desprecia} \\ x+4=\dfrac{6x}{5} \Rightarrow x=20 \end{array}\right\}$$

Solución 2 (Toni Gomà):



Como las tangentes a una circunferencia por un punto exterior a ella miden lo mismo tendremos que ΔABE es isósceles pues AB = AE = x. Además, la bisectriz por A es la altura (y la mediana y la mediatriz) de ΔABE, luego AC es perpendicular a BE.

Tracemos por B la perpendicular a AF, generando el punto G. Como AF es una cuerda del cuadrante, G divide a AF en dos partes iguales. Luego:

$$AG = GF = \frac{x+4}{2} = \frac{x}{2} + 2 \ \Rightarrow\ GE = \frac{x}{2} - 2$$

Además, α = ∠EBG pues tiene los lados perpendiculares a ∠CAG = α. Por tanto: ΔABC ≈ ΔBGE (pues son rectángulos y ambos tienen un ángulo α)

Como en ΔABC un cateto es doble que el otro tendremos que

$$BG = 2\left(\frac{x}{2} - 2\right) = x - 4$$

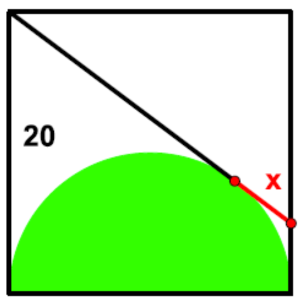
Por último, en el triángulo ΔAGB se cumple el teorema de Pitágoras (pues es rectángulo)

$$x^2 = \left(\frac{x}{2} + 2\right)^2 + (x-4)^2 \ \Rightarrow\ x^2 - 24x + 80 = 0 \ \Rightarrow\ x = \begin{cases} 4 \\ 20 \end{cases}$$

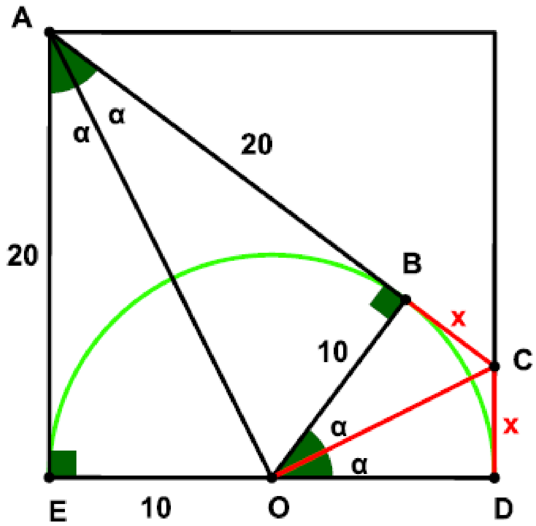
La solución x = 4 se desprecia, pues con ella:

$$GE = \frac{x}{2} - 2 = 0$$

Septiembre 24: Cuadrado de lado 20, semicírculo y cuerda tangente. Halla x



Solución:



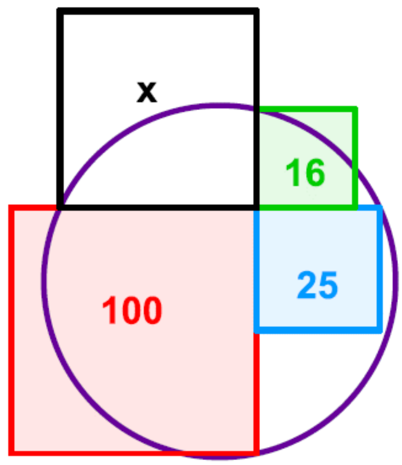
Recordemos que las tangentes por un punto exterior a una circunferencia miden lo mismo. Por tanto:

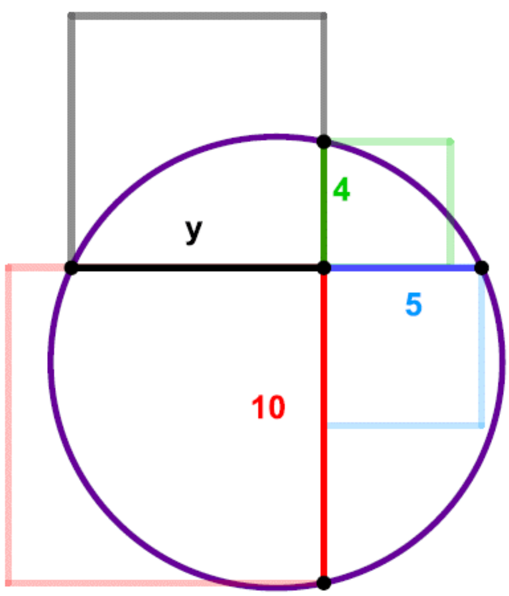
$$AE = 20 = AB; \quad BC = x = CD$$

Por otra parte, el centro de la semicircunferencia equidista de las tangentes, luego pertenece a la bisectriz del ángulo en A y en O. Además, el ángulo en A y el ángulo en O miden lo mismo por tener lados perpendiculares. Tendremos entonces que $\Delta AEO \approx \Delta OBC$ (pues ambos son rectángulos y tiene un ángulo de α). Por tanto:

$$\frac{20}{10} = \frac{10}{x} \quad \Rightarrow \quad x = 5$$

Septiembre 25: Cuatro cuadrados de áreas 100, 25, 16 y x. Halla x y el área del círculo.





Solución 1: Aplicando el teorema de las cuerdas:

$$5y = 4 \cdot 10 \quad \Rightarrow \quad y = 8 \quad \Rightarrow \quad y^2 = x = 64$$

Aplicando el teorema de Faure (pues las cuerdas son perpendiculares)

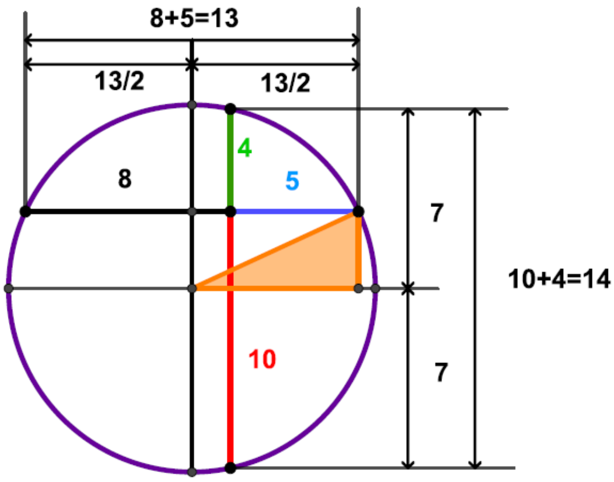
$$8^2 + 4^2 + 5^2 + 10^2 = 4r^2 \Rightarrow r = \frac{\sqrt{205}}{2} \Rightarrow \pi r^2 = \frac{205\pi}{4}$$

Solución 2 (sin recurrir al teorema de Faure): Aplicando el teorema de las cuerdas:

$$5y = 4 \cdot 10 \quad \Rightarrow \quad y = 8 \quad \Rightarrow \quad y^2 = x = 64$$

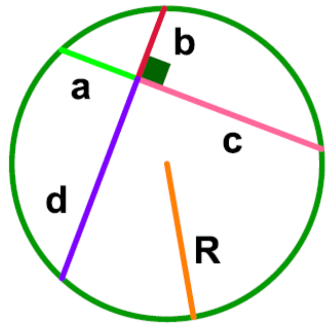
Consideremos las perpendiculares a las dos cuerdas por sus puntos medios. Estas dos perpendiculares se intersectarán en el centro del círculo. Quedará así formado el triángulo rectángulo de color naranja, con catetos 13/2 y (7 – 4 =) 3 e hipotenusa, el radio del círculo. Al aplicar el teorema de Pitágoras tendremos:

$$r = \sqrt{3^2 + \left(\frac{13}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{205}}{2} \Rightarrow \pi r^2 = \frac{205\pi}{4}$$

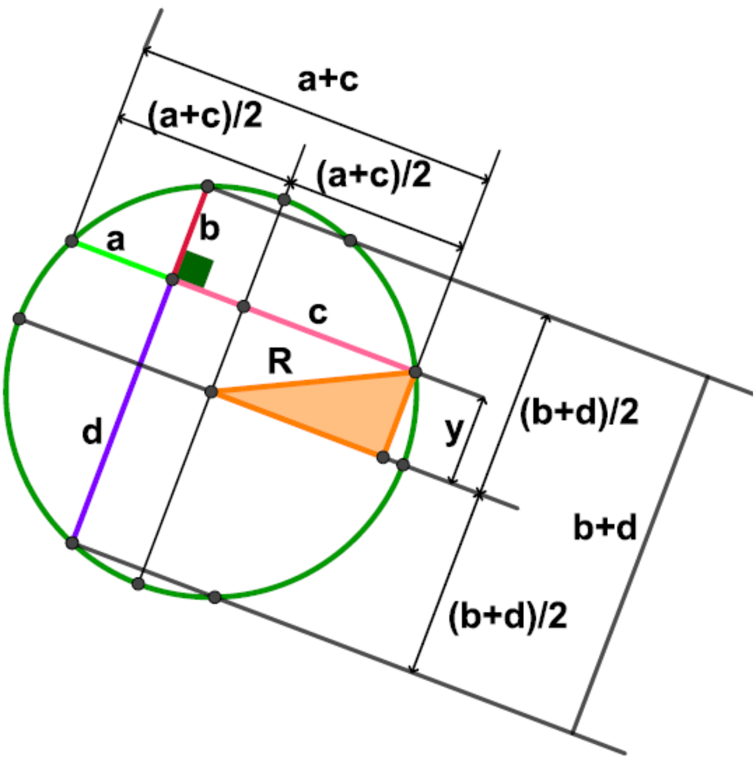


Septiembre 27: (Teorema de Faure) En una circunferencia de radio R y dos cuerdas perpendiculares:

$$\mathbf{a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 4R^2}$$



Solución:



Trazamos las perpendiculares a las dos cuerda por sus puntos medios. La intersección de estas perpendiculares es el centro del círculo. Quedará generado el triangulo naranja con catetos:

$$\frac{a+c}{2}$$

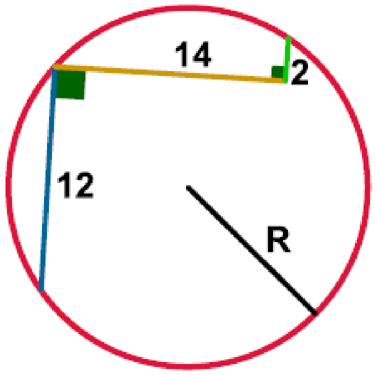
$$y = \frac{b+d}{2} - b = \frac{d-b}{2}$$

e hipotenusa R. Como las cuerdas son perpendiculares, el triángulo es rectángulo y al aplicar el teorema de Pitágoras:

$$R^2 = \frac{(a+c)^2}{4} + \frac{(d-b)^2}{4} = \frac{a^2+b^2+c^2+d^2}{4} - 2(ac-bd) = \frac{a^2+b^2+c^2+d^2}{4} - 2\cdot 0$$

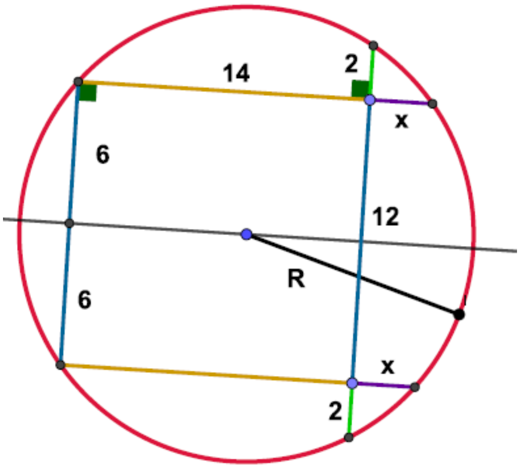
(pues a·c = b·d, por el teorema de las cuerdas). De donde:

$$4R^2 = a^2 + b^2 + c^2 + d^2$$



Septiembre 28: Halla el radio de la circunferencia

Solución:



Consideremos la recta perpendicular a la cuerda que mide 12 por su punto medio, que pasará por el centro del círculo. Hallamos los simétricos de los extremos de los segmentos dados respecto a esta perpendicular y tendremos entonces la figura adjunta.

Aplicamos el teorema de las cuerdas y obtenemos:

$$14x = (12 + 2) \cdot x \;\Rightarrow\; x = 2$$

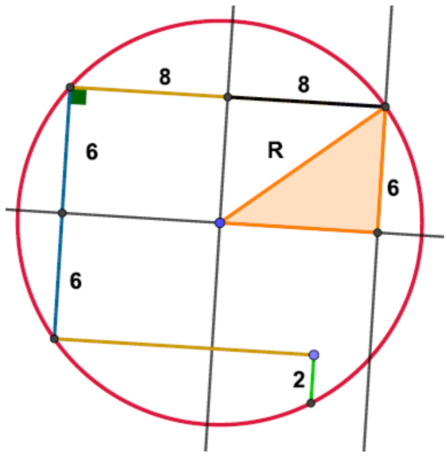
Y, ahora para finalizar:

1.- o bien aplicamos el teorema de Faure (aprovechando que las cuerdas son perpendiculares):

$$4R^2 = 2^2 + 2^2 + 14^2 + (12 + 2)^2 \;\Rightarrow\; R = 10$$

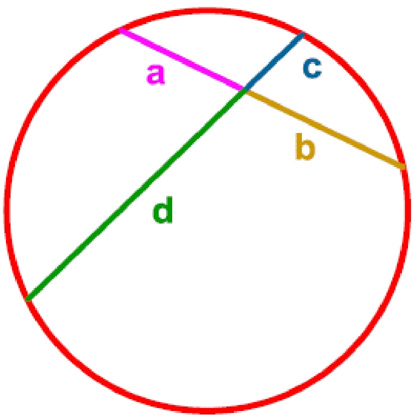
2.- o bien, volvemos a trazar la perpendicular a la cuerda que mide (14 + 2 =) 16 por su punto medio que se intersectará con la otra perpendicular en el centro del círculo. Aparece entonces el triángulo color naranja que es rectángulo (al ser los segmentos proporcionados al principio perpendiculares). Aplicando a este triángulo naranja el teorema de Pitágoras, tenemos:

$$R = \sqrt{8^2 + 6^2} = 10$$

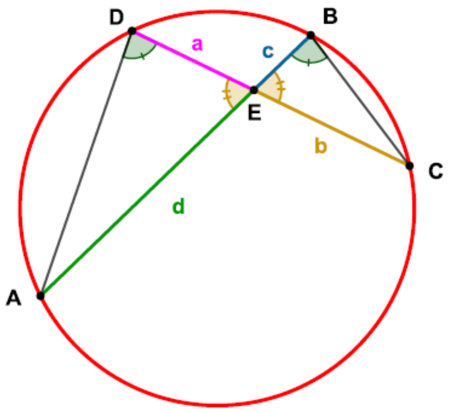


Septiembre 29: TEOREMA DE LAS CUERDAS:

a·b = c·d



Solución:

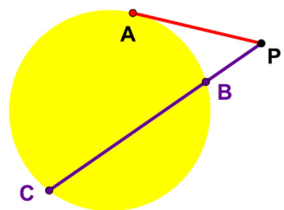


Los triángulos ΔADE y ΔCBE son semejantes, pues los ángulos en E son opuestos por el vértice y los ángulos en D y en B subtienden el mismo arco (el arco AC). Por tanto:

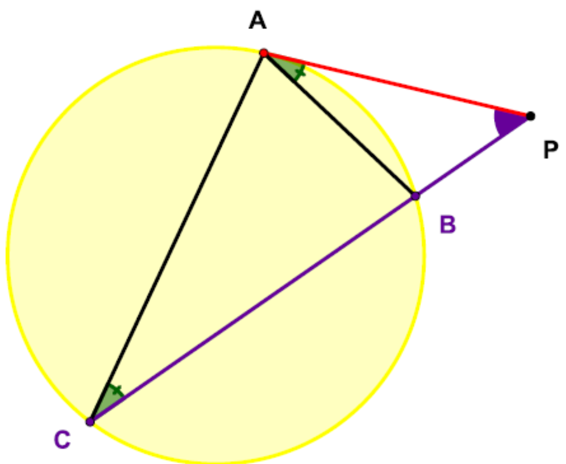
$$\frac{a}{c} = \frac{d}{b} \quad \Leftrightarrow \quad ab = cd$$

Septiembre 30: POTENCIA DE UN PUNTO: Círculo, secante y tangente. Prueba que:

$$PA^2 = PB \cdot PC$$



Solución:



Consideremos los triángulos ΔCAP y ΔABP. Estos dos triángulos son semejantes pues tienen en común el ángulo en P y el ángulo en A y el ángulo en C (que subtiende al arco AB) son iguales (Si C se aproxima a A por la circunferencia las rectas que pasan por C y A tienden a la tangente AP y el segmento CB tiende al segmento AB). Luego, tendremos:

$$\frac{AP}{PC} = \frac{PB}{AP} \quad \Leftrightarrow \quad AP^2 = PC \cdot PB$$