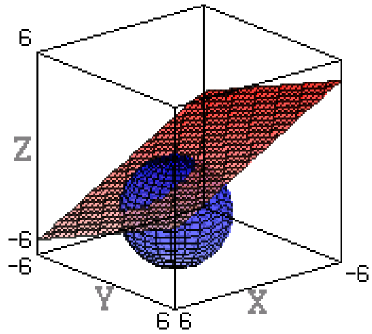
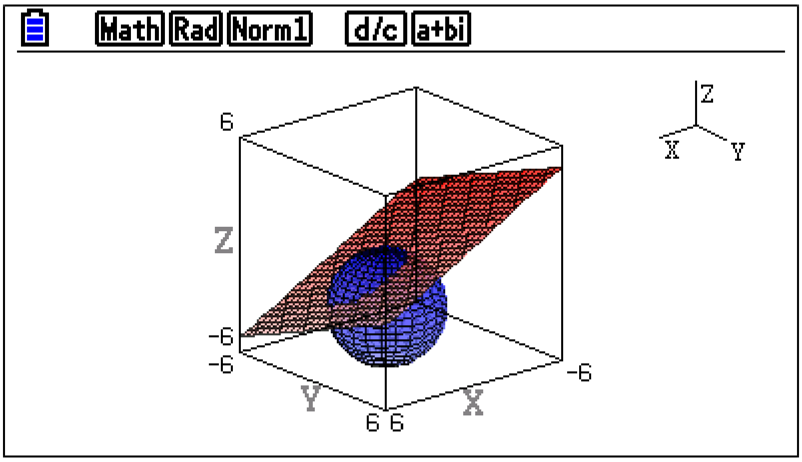
SOLUCIONES ABRIL 2022

PROBLEMAS CON CALCULADORA CASIO fx-CG50. AUTOR: RICARD PEIRÓ I ESTRUCH. IES "Abastos". València



Abril 1-2: Sea la esfera de ecuación $\mathbf{E \equiv x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 6z = 0}$. Determinar las coordenadas del centro y la medida del radio.
Verificar si el plano $\boldsymbol{\Pi \equiv 3x - 2y + 6z + 1 = 0}$ y la esfera son secantes. Determinad el radio de la circunferencia intersección de $\mathbf{E}, \boldsymbol{\Pi}$. Determinad el centro de la circunferencia intersección de $\mathbf{E}, \boldsymbol{\Pi}$

Solución: Abrimos el *Menú Gráfico 3D*. Representemos la esfera y el plano:



Completando cuadrados:

$$E \equiv (x-1)^2 + y^2 + (z+3)^2 = \left(\sqrt{10}\right)^2$$

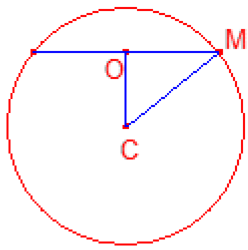
Las coordenadas del centro son $C(1, 0, -3)$ y el radio $R = \sqrt{10}$.

Para estudiar la posición relativa del plano y la esfera, calculemos la distancia del centro de la esfera al plano.

$$d(C, \Pi) = \left| \frac{3 \cdot 1 - 2 \cdot 0 + 6(-3) + 1}{\sqrt{3^2 + (-2)^2 + 6^2}} \right| = 2$$

$$d(C, \Pi) = 2 < R = \sqrt{10}$$

Es decir, el plano y la esfera son secantes.



Consideremos la circunferencia intersección de la esfera y el plano. Sea O el centro de la circunferencia. Sea la sección de la esfera que pasa por el centro C y perpendicular al plano. Sea $r = \overline{OM}$ el radio de la circunferencia intersección.

$$\overline{CO} = 2, \overline{CM} = \sqrt{10}$$

Aplicando el teorema de Pitágoras al triángulo rectángulo $\overset{\Delta}{COM}$

$$r^2 = \left(\sqrt{10}\right)^2 - 2^2 = 6 \quad r = \sqrt{6}$$

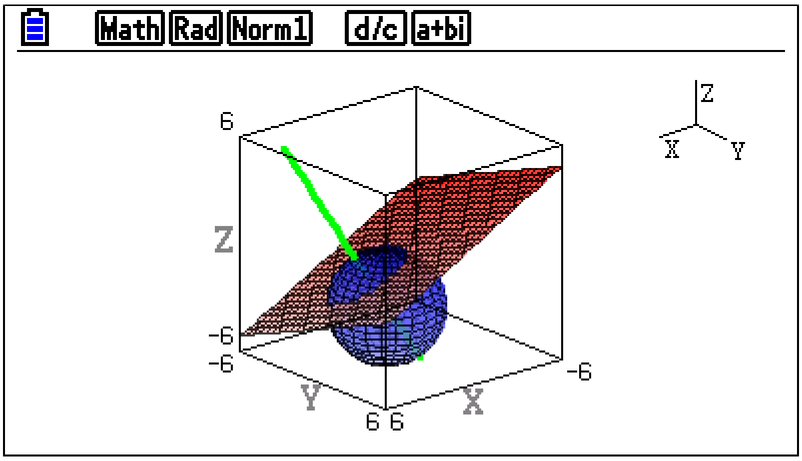
Para calcular el centro de la circunferencia intersección de E, Π, determinemos la intersección de la recta perpendicular a Π que pasa por el centro $C(1, 0, -3)$ de la esfera y el plano Π

El vector director de la recta perpendicular al plano que pasa por C es el vector característico del plano $v = (3, -2, 6)$.

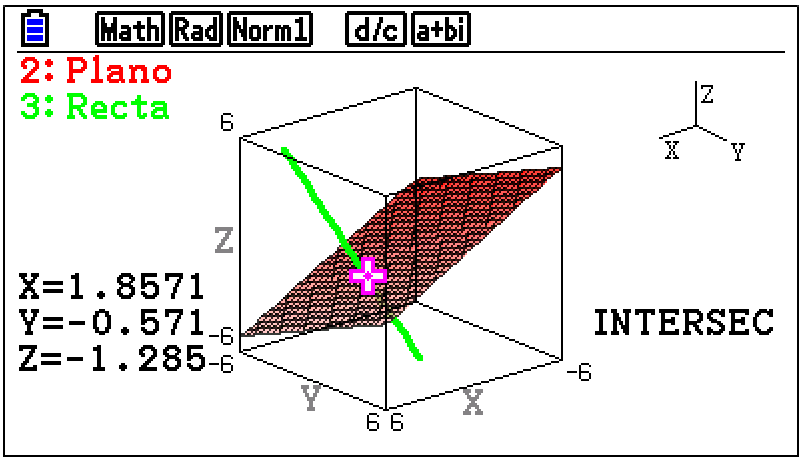
Su ecuación vectorial es:

$$r \equiv (x, y, z) = (1, 0, -3) + (3, -2, 6)\alpha$$

Abrimos el *Menú Gráfico 3D*.
Dibujemos la recta r:



Con la función *G-Solv* determinemos la intersección de la recta r y el plano Π.



El centro de la circunferencia es:

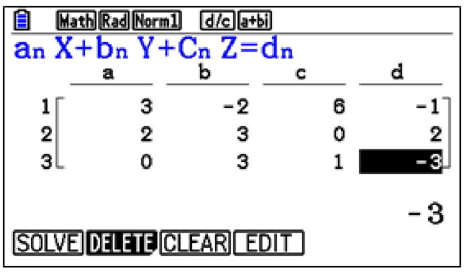
$$P(1.8571, -0.571, -1.285)$$

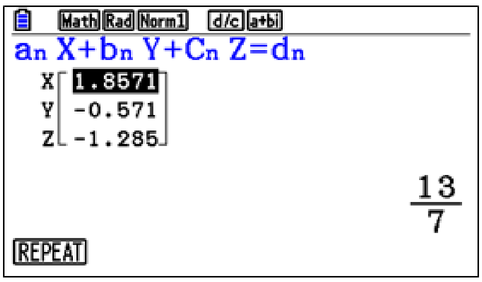
Analíticamente, para calcular el punto intersección, resolveremos el sistema formado por la recta r y el plano Π.

$$r \equiv \begin{cases} 2x + 3y = 2 \\ 3y + z = -3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3x - 2y + 6z = -1 \\ 2x + 3y = 2 \\ 3y + z = -3 \end{cases}.$$

Abrimos el Menú Ecuación: Resolvemos el sistema de ecuaciones lineales formado por la recta r y el plano Π.





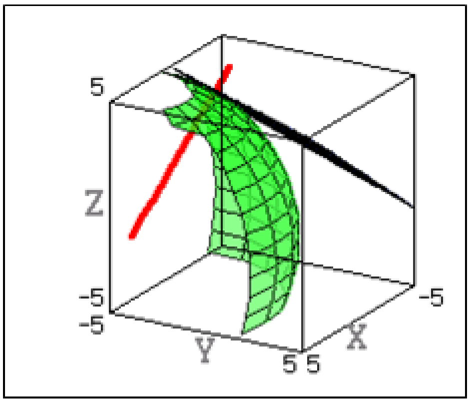
$$\begin{cases} x = \dfrac{13}{7} \\ y = -\dfrac{4}{7} \\ z = -\dfrac{9}{7} \end{cases}$$

Entonces, el centro de la circunferencia es:

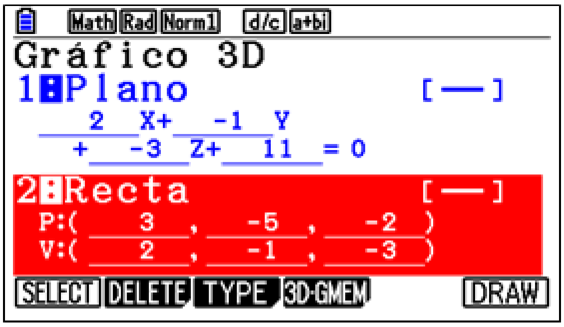
$$P\left(\frac{13}{7},-\frac{4}{7},-\frac{9}{7}\right)$$

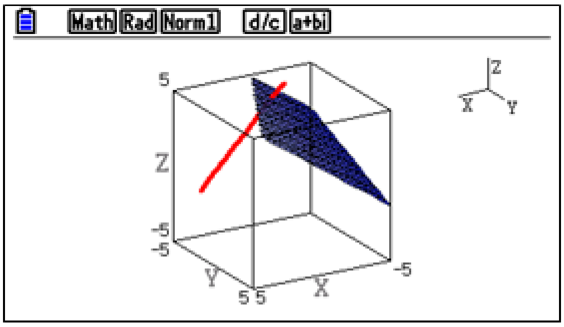
Abril 4: Determinar la ecuación de la esfera de centro $C(3,-5,-2)$ y tangente al plano

$$2x-y-3z+11=0$$

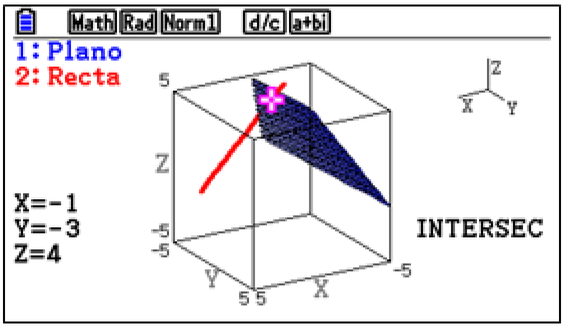


Solución: Abrimos el *Menú Gráfico 3D*. Definimos el plano y la recta que pasa por el punto $C(3,-5,-2)$ y tiene vector director el característico del plano $a=(2,-1,-3)$. Recta perpendicular al plano. La intersección de la recta y el plano nos da el punto de tangencia de la esfera y el plano.





Con la función *G-Solv,* determinamos la intersección de la recta y el plano.



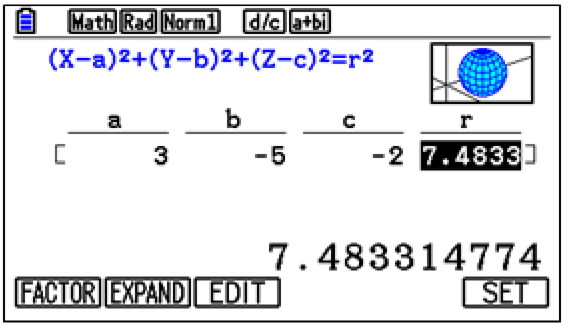
El punto de tangencia es $T(-1,3,4)$. El radio de la esfera es la distancia entre el centro y el punto de tangencia:

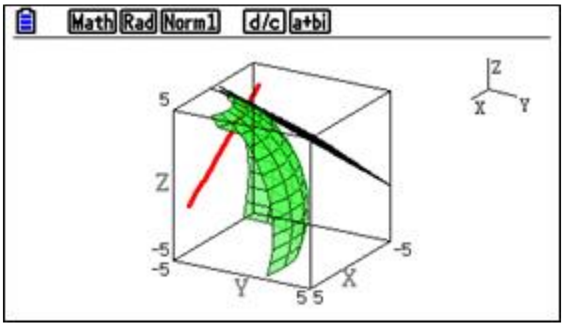
$$r=\sqrt{(-4)^2+2^2+6^2}=2\sqrt{14}$$

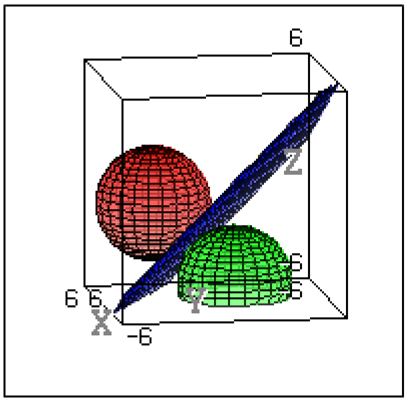
La ecuación de la esfera es:

$$E\equiv(x-3)^2+(y+5)^2+(z+2)^2=\left(2\sqrt{14}\right)^2$$

Definimos la ecuación de la esfera y la representamos gráficamente.







Abril 5: Determinar la ecuación de la esfera de radio $r = 3$, que es tangente al plano

$$x + 2y + 2z + 3 = 0$$

en el punto $A(1, 1, -3)$

Solución: El centro de la esfera pertenece en la recta perpendicular al plano en el punto $A(1, 1, -3)$. La recta tiene por vector director el característico del plano, $a = (1, 2, 2)$. Su ecuación paramétrica es:

$$r \equiv \begin{cases} x = 1 + \alpha \\ y = 1 + 2\alpha \\ z = -3 + 2\alpha \end{cases}$$

Un punto cualquiera de la recta r es:

$$P(1 + \alpha, 1 + 2\alpha, -3 + 2\alpha) \qquad \overrightarrow{AP} = (\alpha, 2\alpha, 2\alpha)$$

El radio de la esfera es:

$$r = \left\|\overrightarrow{AP}\right\| = 3 \qquad \sqrt{\alpha^2 + 4\alpha^2 + 4\alpha^2} = 3$$

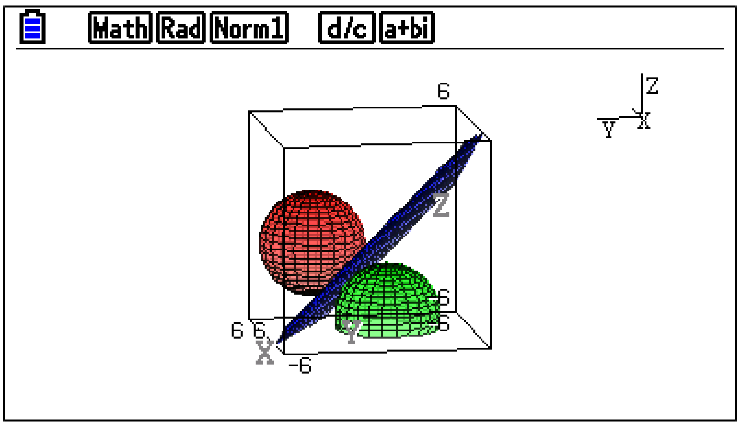
Resolviendo la ecuación: $\alpha = 1, -1$. El problema tiene dos soluciones.

Si $\alpha = 1$. La esfera de centre $O_1(2, 3, -1)$. Su ecuación es:

$$C_1 \equiv (x - 2)^2 + (y - 3)^2 + (z + 1)^2 = 3^2$$

Si $\alpha = -1$. La esfera de centre $O_1(0, -1, -5)$. Su ecuación es:

$$C_2 \equiv x^2 + (y + 1)^2 + (z + 5)^2 = 3^2$$



Abrimos el Menú Gráfico 3D. Definimos el plano $x + 2y + 2z + 3 = 0$ y las esferas

$$C_1 \equiv (x - 2)^2 + (y - 3)^2 + (z + 1)^2 = 3^2$$
$$C_2 \equiv x^2 + (y + 1)^2 + (z + 5)^2 = 3^2$$

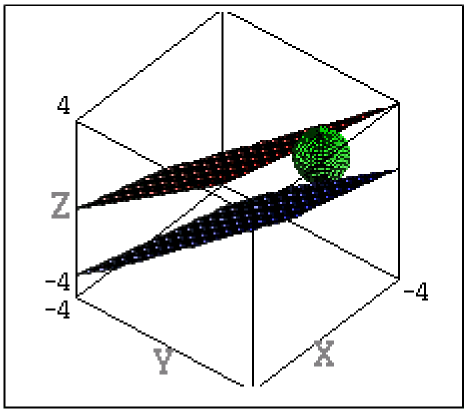
Abril 6-13: Una esfera tiene el centro en la recta

$$r \equiv \begin{cases} 2x + 4y - z - 7 = 0 \\ 4x + 5y + z - 14 = 0 \end{cases}$$

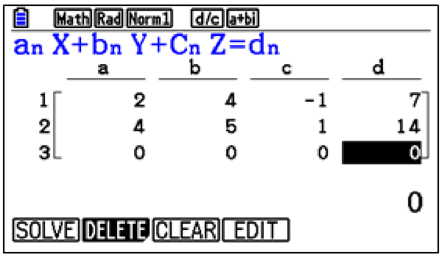
y es tangente a los planos

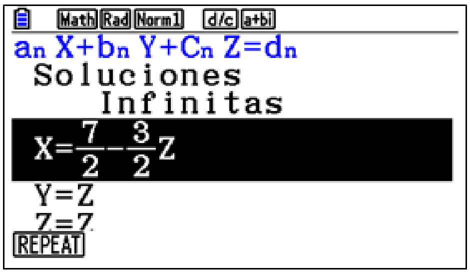
$$\Pi \equiv x + 2y - 2z - 2 = 0, \quad \Omega \equiv x + 2y - 2z + 4 = 0.$$

Determinad su ecuación.



Solución: Determinamos la ecuación paramétrica de la recta r. Abrimos el *Menú Ecuación*



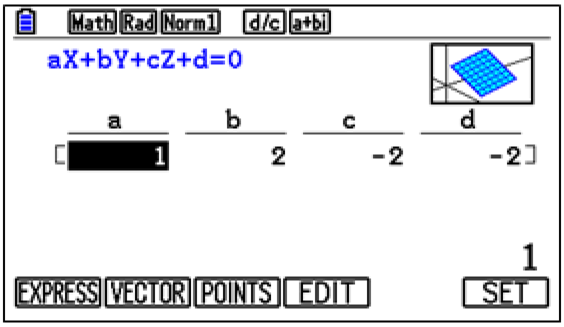


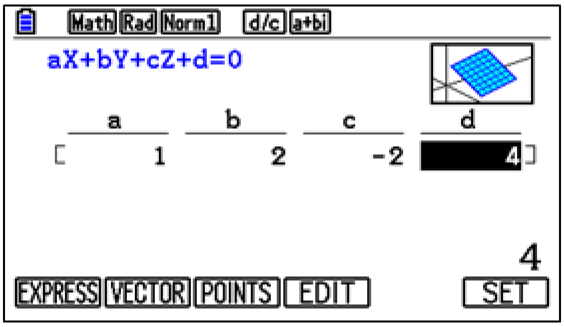
La ecuación paramétrica de la recta r es:

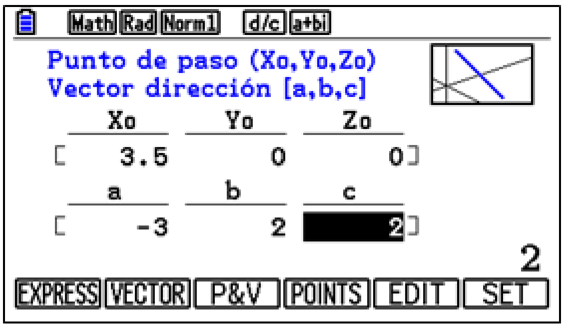
$$r \equiv \begin{cases} x = \dfrac{7}{2} - 3\alpha \\ y = 2\alpha \\ z = 2\alpha \end{cases}$$

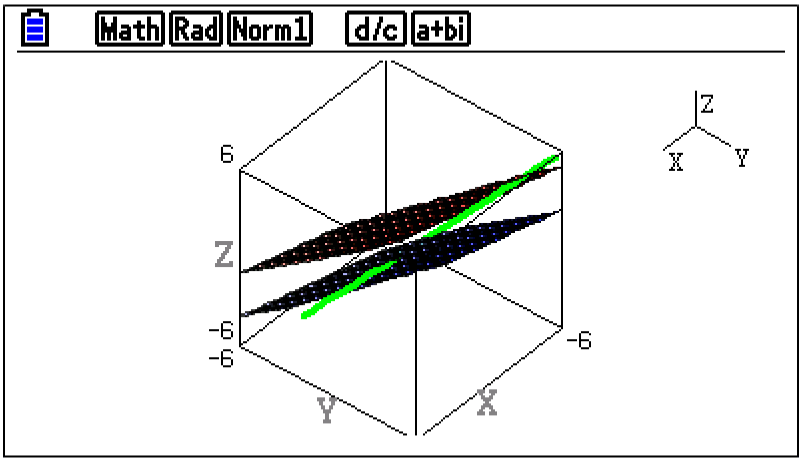
Los dos planos son paralelos puesto que $\frac{1}{1} = \frac{2}{2} = \frac{-2}{-2} \neq \frac{-2}{4}$

Abrimos el *Menú Gráfico 3D*. Definimos los dos planos y la recta

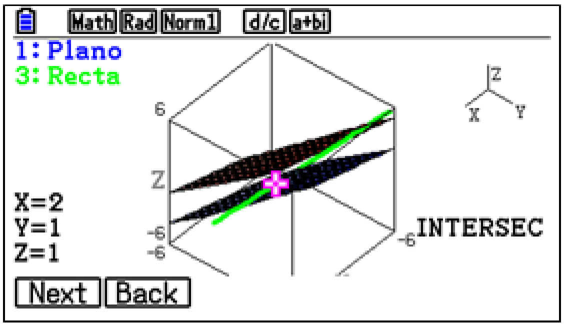


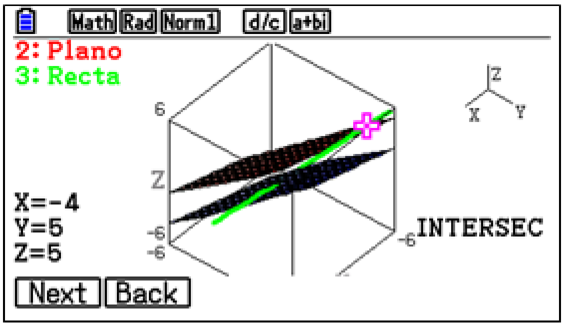






Con la función *G-Solv,* determinemos la intersección de la recta y cada uno de los planos.





Las coordenadas del punto intersección del plano $\Pi \equiv x + 2y - 2z - 2 = 0$ y la recta

$r \equiv \begin{cases} 2x + 4y - z - 7 = 0 \\ 4x + 5y + z - 14 = 0 \end{cases}$ es: $P(2, 1, 1)$

Las coordenadas del punto intersección del plano $\Omega \equiv x + 2y - 2z + 4 = 0$ y la recta

$r \equiv \begin{cases} 2x + 4y - z - 7 = 0 \\ 4x + 5y + z - 14 = 0 \end{cases}$ es: $Q(-4, 5, 5)$

El centro de la esfera es el punto medio del segmento $\overline{PQ}$. Sus coordenadas son: $O(-1, 3.3)$

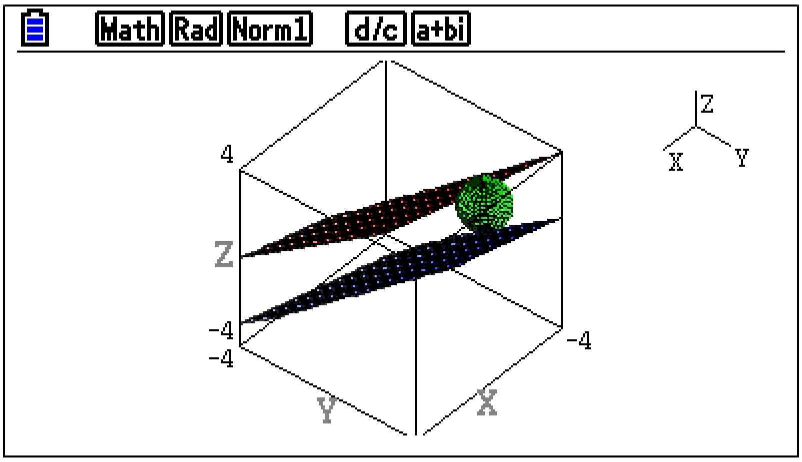
El radio es igual a la distancia del centro $O(-1, 3.3)$ al plano $\Pi \equiv x + 2y - 2z - 2 = 0$

$$r = \left| \frac{-1 + 2 \cdot 3 - 2 \cdot 3 - 2}{\sqrt{1^2 + 2^2 + (-2)^2}} \right| = 1$$

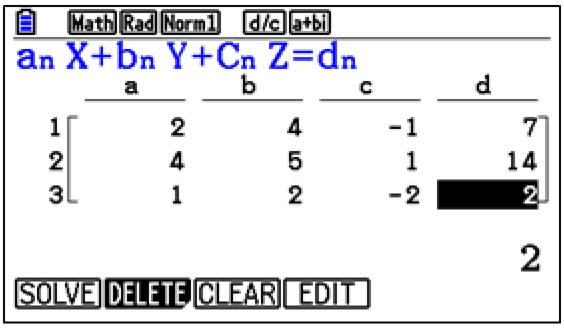
La ecuación de la esfera es:

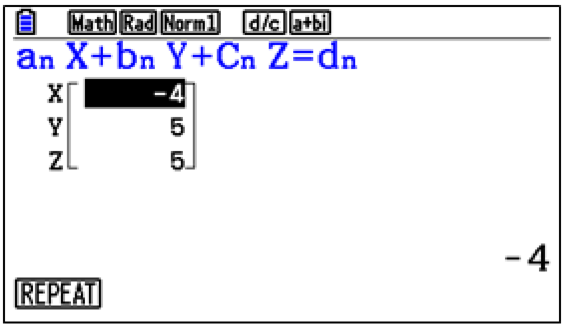
$$(x + 1)^2 + (y - 3)^2 + (z - 3)^2 = 1^2$$

Definimos y representamos la esfera:



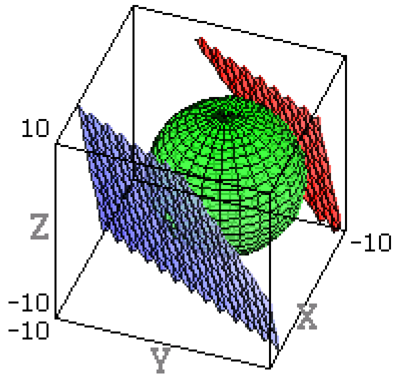
Para calcular los puntos intersección de la recta r y cada uno de los planos se pueden resolver los sistemas formado por la recta y cada uno de los planos: Abramos lo *Menú Ecuación*:





Las coordenadas del punto intersección del plano $\Omega \equiv x + 2y - 2z + 4 = 0$ y la recta

$r \equiv \begin{cases} 2x + 4y - z - 7 = 0 \\ 4x + 5y + z - 14 = 0 \end{cases}$ es: $Q(-4, 5, 5)$



<u>Abril 7-8:</u> Determinad la ecuación de la esfera que es tangente a los planos

$\boldsymbol{\Pi \equiv 6x - 3y - 2z - 35 = 0}$, $\boldsymbol{\Omega \equiv 6x - 3y - 2z + 63 = 0}$, sabiendo que el punto M (5,-1,-1) es un punto de tangencia en uno de los planos.

<u>Solución:</u> Los dos planos son paralelos puesto que $\frac{6}{6} = \frac{-2}{-2} = \frac{-2}{-2} \neq \frac{-35}{63}$. Notemos que $M(5, -1, -1)$ pertenece al plano $\Pi \equiv 6x - 3y - 2z - 35 = 0$ puesto que satisface su ecuación:

$$6 \cdot 5 - 3 \cdot (-1) - 2 \cdot (-1) - 35 = 0$$

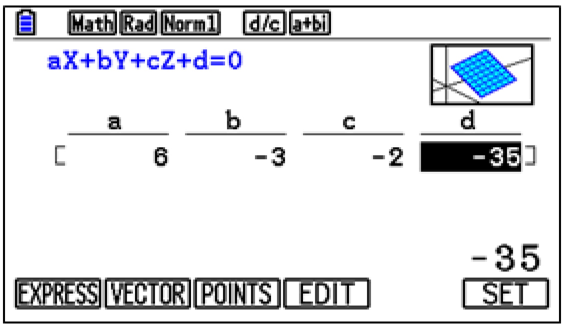
El diámetro de la esfera es la distancia del punto $M(5, -1, -1)$ al plano $\Omega \equiv 6x - 3y - 2z + 63 = 0$

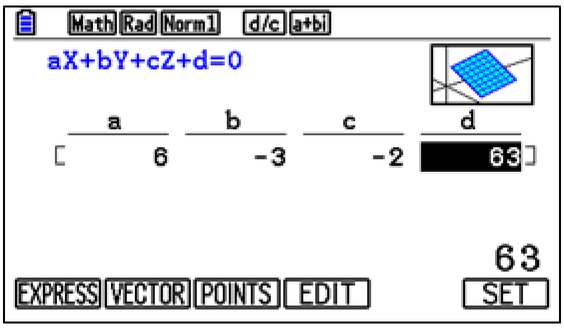
$$2r = \left| \frac{6 \cdot 5 - 3 \cdot (-1) - 2 \cdot (-1) + 63}{\sqrt{6^2 + (-3)^2 + (-2)^2}} \right| = 14$$

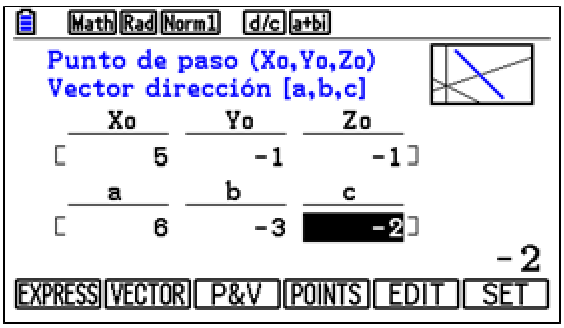
Entonces, el radio de la esfera es $r = 7$. El centro de la esfera es el punto medio del segmento formado por el punto M y la proyección de M sobre el plano $\Omega \equiv 6x - 3y - 2z + 63 = 0$. Calculamos la ecuación de la recta perpendicular al plano $\Omega \equiv 6x - 3y - 2z + 63 = 0$ que pasa per M que té vector director el característic del plànol $a = (6, -3, -2)$. Su ecuación es:

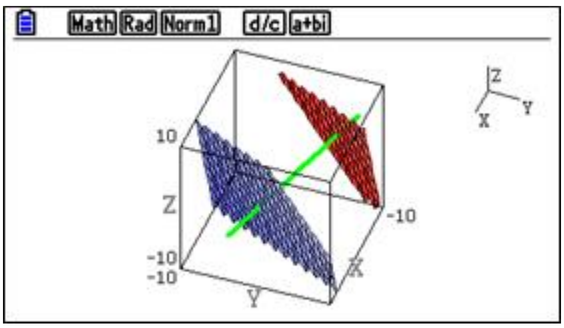
$$r \equiv (x, y, z) = (5, -1, -1) + \alpha(6, -3, -2)$$

Abrimos el *Menú Gráfico 3D*. Definimos y representamos los dos planos y la recta.

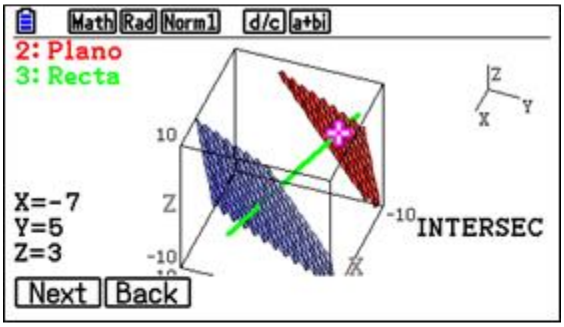








Para determinar la intersección del plano $\Omega \equiv 6x - 3y - 2z + 63 = 0$ y la recta $r \equiv (x, y, z) = (5, -1, -1) + \alpha(6, -3, -2)$ se utiliza la función *G-Solv*:



Las coordenadas del punto proyección son:

$$M'(-7, 5, 3)$$

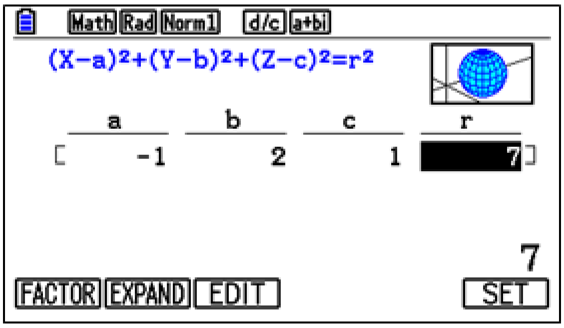
El centro de la esfera es el punto medio del segmento $\overline{MM'}$. Sus coordenadas son:

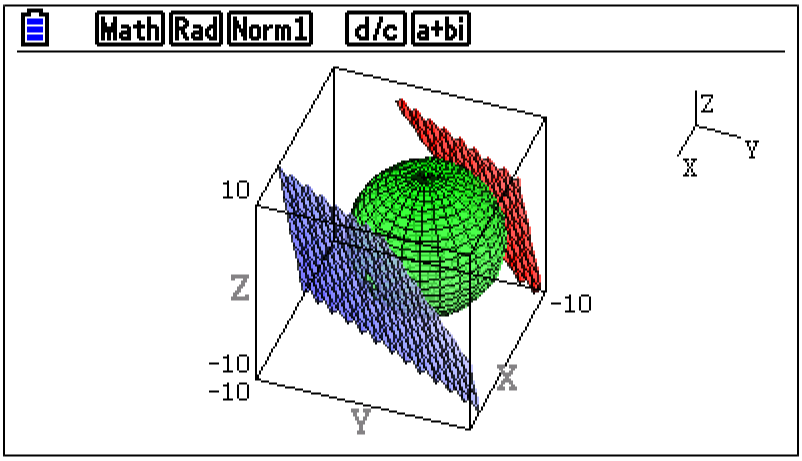
$$O(-1, 2, 1)$$

La ecuación de la esfera es:

$$(x+1)^2 + (y-2)^2 + (z-1)^2 = 7^2$$

Abrimos el *Menú Gráfico 3D*. Definimos la ecuación de la esfera y la representamos

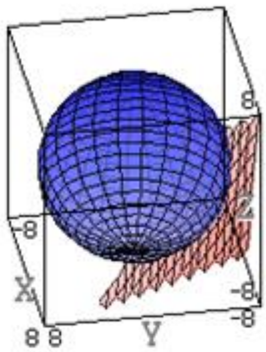




Abril 9: Determinad la ecuación del plano tangente a la esfera

$$x^2 + y^2 + z^2 = 49$$

en el punto M (6,-3,-2)



Solución: La esfera tiene centro el punto $O(0, 0, 0)$ y radio $r = 7$. El punto $M(6, -3, -2)$ pertenece a la esfera ya que $6^2 + (-3)^2 + (-2)^2 = 49$. El vector característico del plano tangente a la esfera en el punto M es:

$$\overrightarrow{OM} = (6, -3, -2)$$

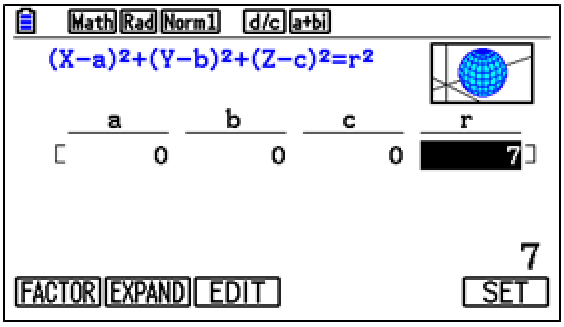
La ecuación del plano es:

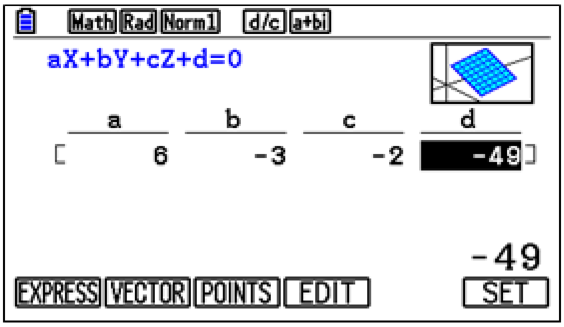
$$6(x-6) - 3(y+3) - 2(z+2) = 0$$

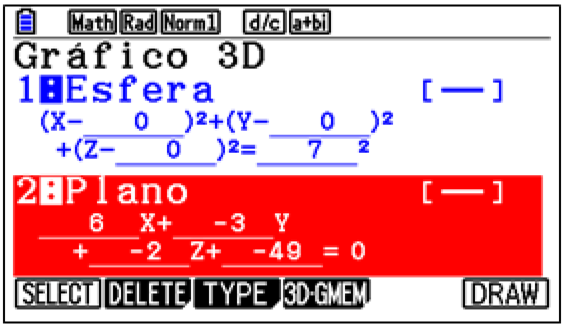
Simplificando:

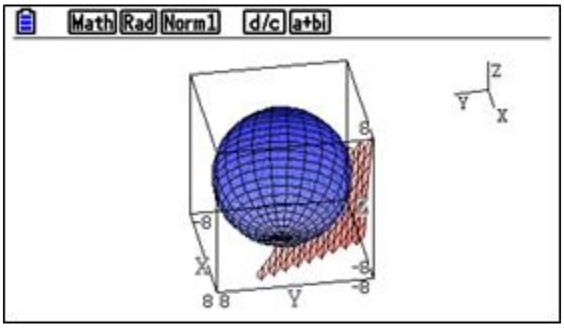
$$6x - 3y - 2z - 49 = 0$$

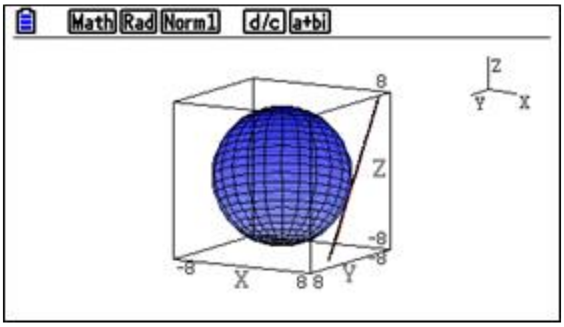
Abrimos el *Menú Gráfico 3D*. Definimos la esfera y el plano y los representamos:

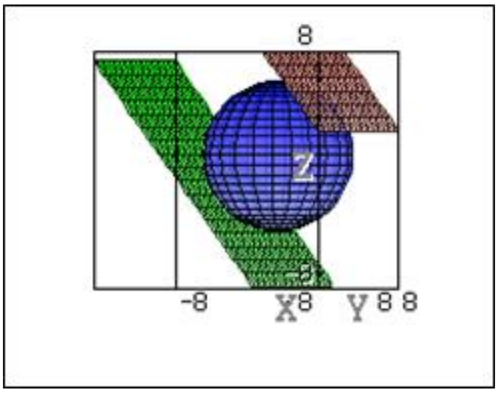












Abril 11: Determinad las ecuaciones de los planos tangentes a la esfera

$$(x-3)^2+(y+2)^2+(z-1)^2=25$$

paralelos al plano

$$4x+3z-17=0$$

Solución: La esfera tiene centro O(3,-2,1) y radio r = 5. El vector característico del plano 4x + 3z – 17 = 0 es a = (4,0,3). La recta perpendicular al plano 4x + 3z – 17 = 0 que pasa por el centro de la esfera tiene dirección el vector característico del plano:

$$(\mathrm{x},\mathrm{y},\mathrm{z})=(3,-2,1)+\alpha(4,0,3)$$

Con la intersección de la recta y la esfera calculamos los puntos de tangencia:

$$\begin{cases}(\mathrm{x}-3)^2+(\mathrm{y}+2)^2+(\mathrm{z}-1)^2=25\\ (\mathrm{x},\mathrm{y},\mathrm{z})=(3,-2,1)+\alpha(4,0,3)\end{cases}$$

$$(4\alpha)^2+0^2+(3\alpha)^2=25$$

Entonces, $\alpha=1,-1$

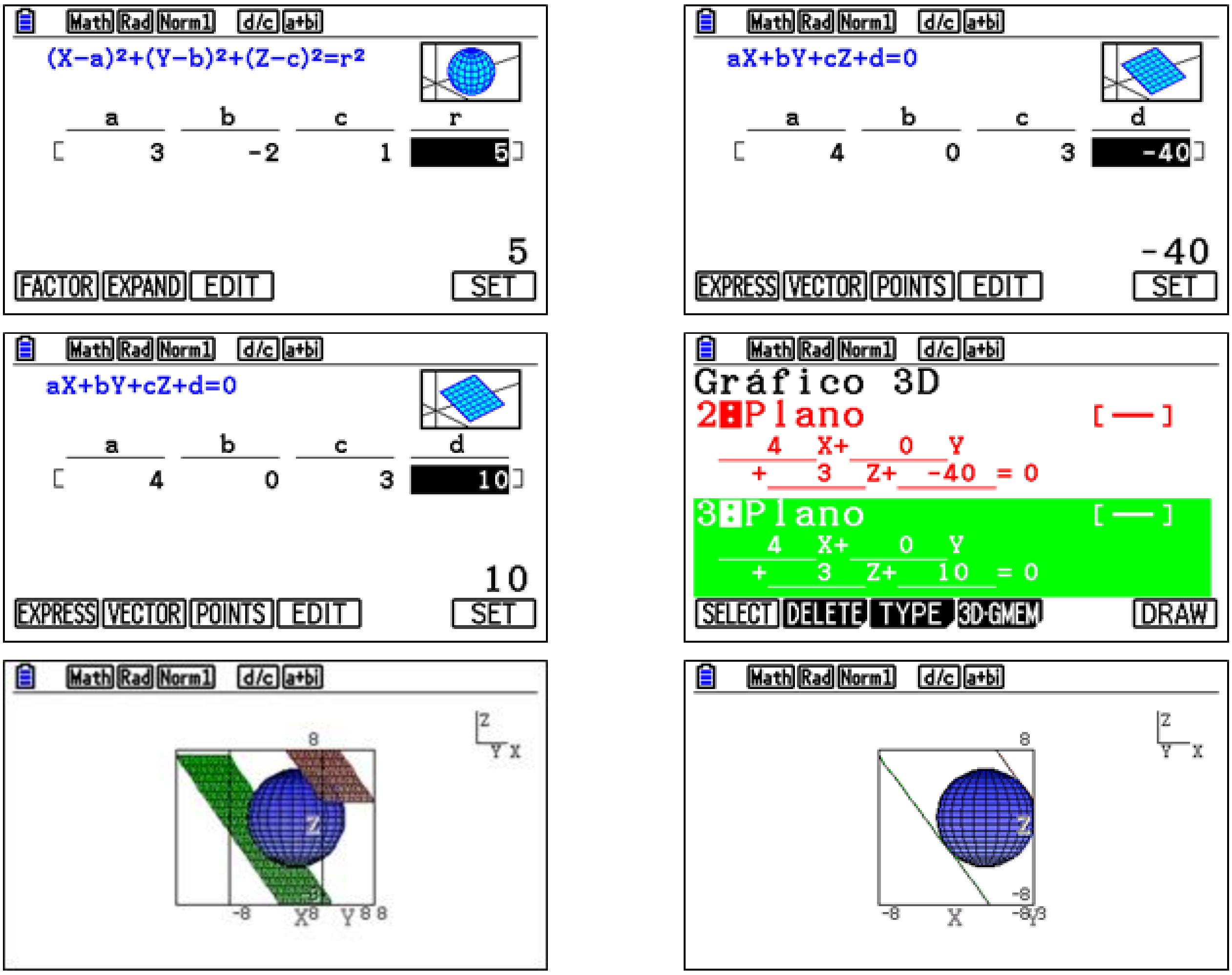
Si $\alpha. = 1$, el punto de tangencia es $T_1(7,-2,4)$. La ecuación del plano es:

$$\pi_1 \equiv 4(x-7)+3(z-4)=0 \qquad \pi_1 \equiv 4x+3z-40=0$$

Si $\alpha = -1$ el punto de tangencia es $T_2(-1,-2,-2)$. La ecuación del plano es:

$$\pi_2 \equiv 4(x+1)+3(z+2)=0 \qquad \pi_2 \equiv 4x+3z+10=0$$

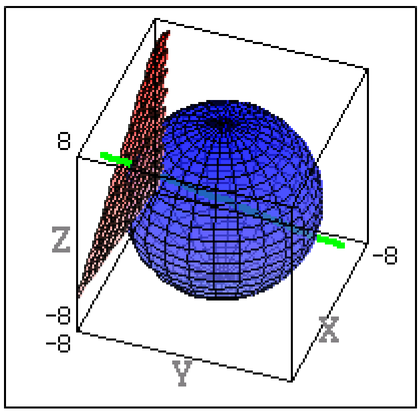
Abrimos el *Menú Gráfico 3D*. Definimos la esfera y los dos planos y los representamos:



Abril 12: Demostrad que el plano $2x-6y+3z-49=0$ es tangente a la esfera

$$x^2+y^2+z^2=49$$

Calculad las coordenadas del punto de tangencia.



Solución: La esfera $x^2+y^2+z^2=49$ tiene centro $O(0,0,0)$ y radio $r=7$. El plano es tangente si la distancia del centro de la esfera al plano es igual al radio. La distancia del centro $O(0,0,0)$ al plano $2x-6y+3z-49=0$ es:

$$d=\frac{|2\cdot 0-6\cdot 0+3\cdot 0-49|}{\sqrt{2^2+(-6)^2+3^2}}=7$$

Por tanto, el plano es tangente a la esfera. Para calcular el punto de tangencia calcularemos la intersección del plano $2x - 6y + 3z - 49 = 0$ y la recta perpendicular al plano que pasa por el centro de la esfera. La recta pasa por el punto $O(0, 0, 0)$ y tiene dirección el vector característico del plano,

$$a = (2, -6, 3)$$

Su ecuación es

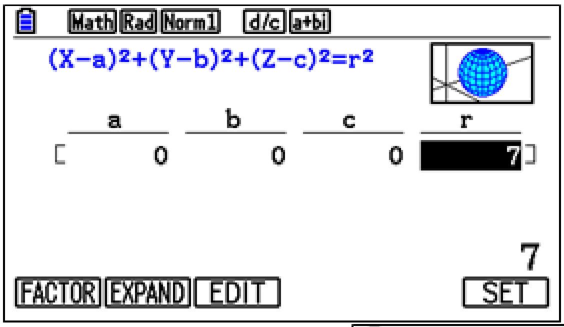
$$r \equiv (x, y, z) = (0, 0, 0) + \alpha(2, -6, 3) \qquad (x, y, z) = (2\alpha, -6\alpha, 3\alpha)$$

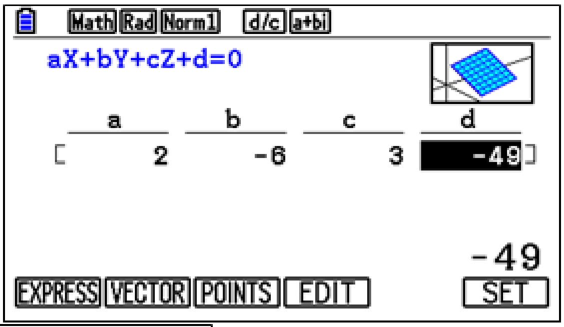
Sustituyendo las coordenadas en la ecuación del plano:

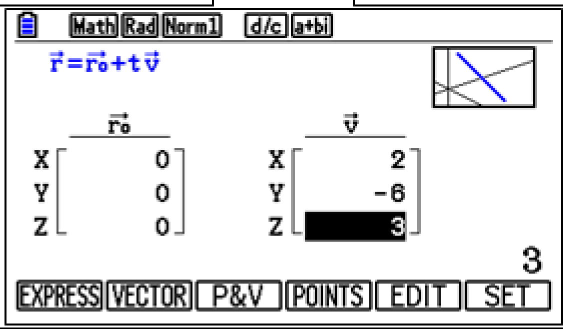
$$2 \cdot (2\alpha) - 6(-6\alpha) + 3(3\alpha) - 49 = 0$$

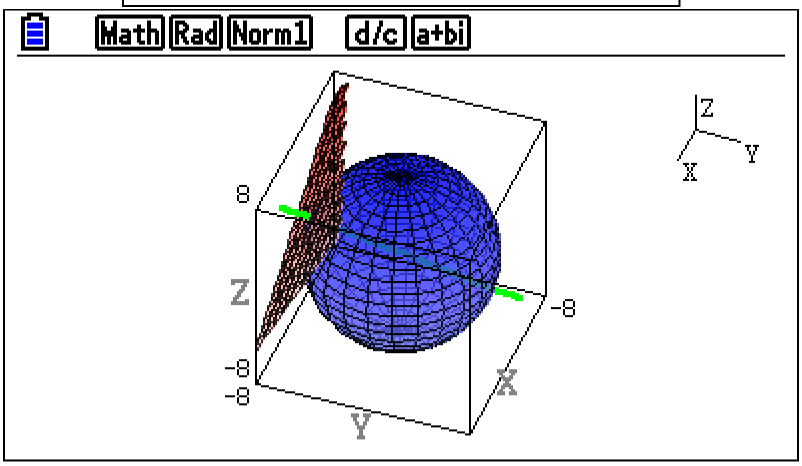
Resolviendo la ecuación $\alpha = 1$. El punto de tangencia tiene coordenadas $P(2, -6, 3)$

Abrimos el *Menú Gráfico 3D*. Definimos y representamos la esfera, el plano y la recta.

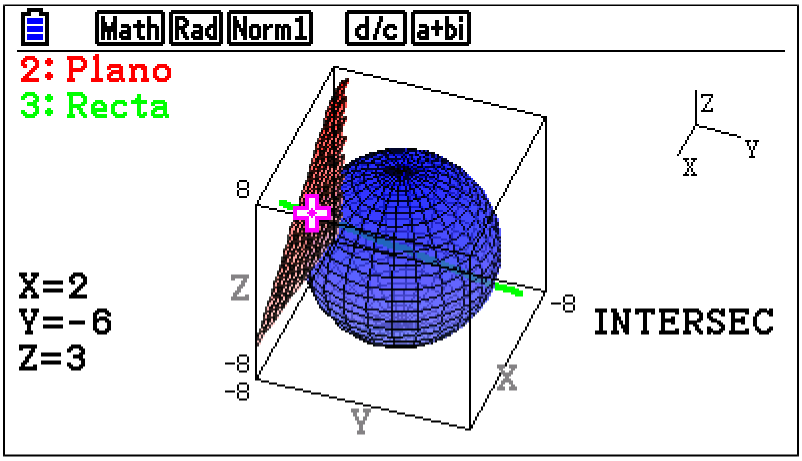






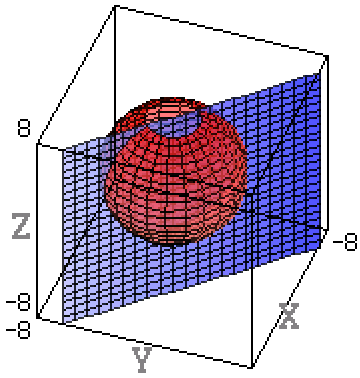


Determinamos con la función *G-Solv,* la intersección de la recta y el plano:

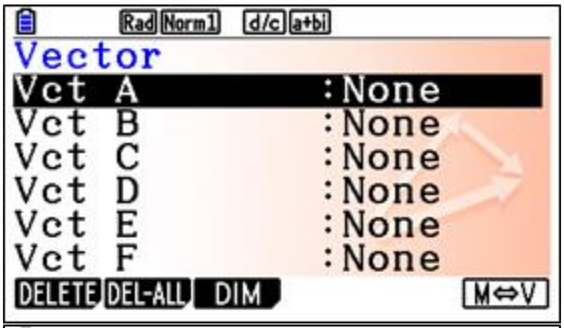


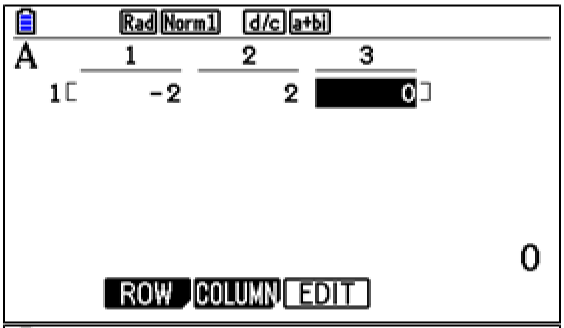
El punto de tangencia tiene coordenadas $\mathrm{P}(2,-6,3)$

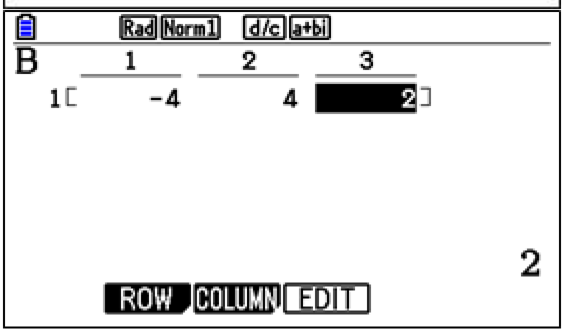
Abril 14: Determinad la ecuación de la circunferencia que pasa por los puntos A (3,-1,-2), B (1,1,-2) y C (-1,3,0)

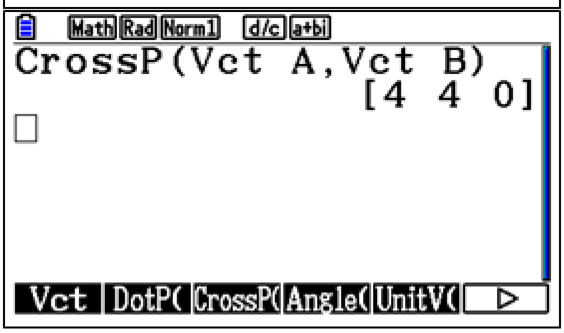


Solución: Abrimos el *Menú Ejec-Mat*:. Definimos los vectores $\overrightarrow{\mathrm{AB}}=(-2,2,0), \overrightarrow{\mathrm{AC}}=(-4,4,2)$









El plano que pasa por $\mathrm{A}, \mathrm{B}, \mathrm{C}$ tiene ecuación:

$$\pi_{\mathrm{ABC}} \equiv \mathrm{x}+\mathrm{y}+\mathrm{D}=0$$

El punto $\mathrm{A}(3,-1,-2)$ pertanece al plano. Entonces, $3-1+\mathrm{D}=0$, $\mathrm{D}=-2$

$$\pi_{\mathrm{ABC}} \equiv \mathrm{x}+\mathrm{y}-2=0$$

Para determinar el centro de una de las esferas que pasen per los puntos $\mathrm{A}, \mathrm{B}, \mathrm{C}$ determinaremos los planos mediadores de los segmentos $\overline{\mathrm{AB}}$, $\overline{\mathrm{AC}}$ y calcularemos la intersección de estos dos planos y del plano que pasa per A, B, C. El punto medio C_1 del segmento $\overline{AB}$ tiene coordenadas: $C_1(2,0,-2)$ .El vector característico del plano mediador del segmento $\overline{AB}$ es $\overrightarrow{AB} = (-2,2,0)$.Su ecuación es:

$$\pi_1 \equiv -x + y + E = 0$$

El punto $C_1(2,0,-2)$ pertanece al plano, por tanto:

$$-2 + 0 + E = 0 \quad E = 2 \quad \pi_1 \equiv -x + y + 2 = 0$$

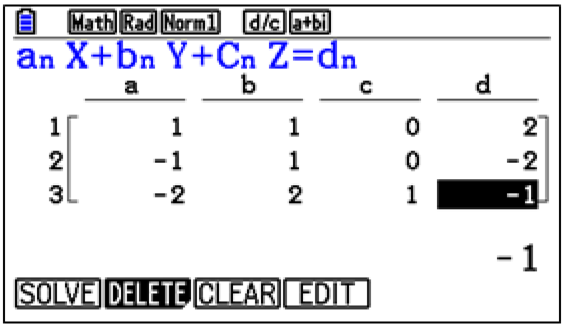
El punto medio B_1 del segmento $\overline{AC}$ tiene coordenadas: $B_1(1,1,-1)$. El vector característico del plano mediador del segmento $\overline{AC}$ es $\overrightarrow{AC} = (-4,4,2)$. Su ecuación es:

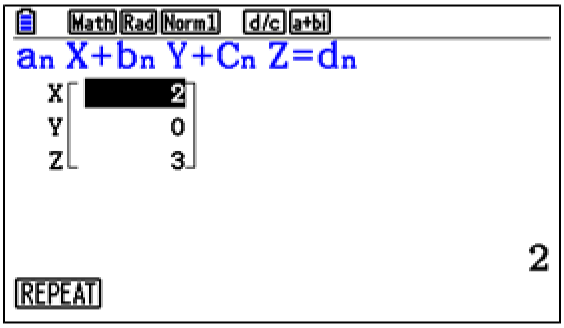
$$\pi_2 \equiv -2x + 2y + z + F = 0$$

El punto $B_1(1,1,-1)$ pertanece al plano, per tanto $-2 + 2 - 1 + F = 0,\ F = 1,\ \pi_2 \equiv -2x + 2y + z + 1 = 0$. El centro es la intersección de los tres planos.

Abrimos el *Menú Ecuación*: Resolvemos el sistema:

$$\begin{cases} x + y = 2 \\ -x + y = -2 \\ -2x + 2y + z = -1 \end{cases}$$





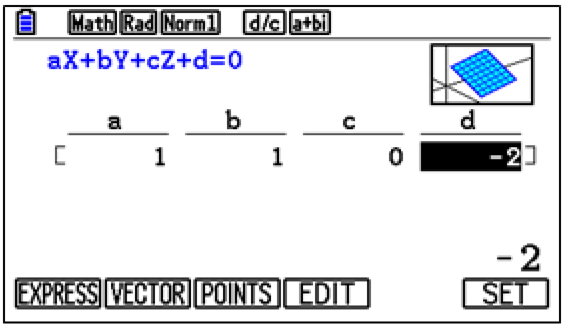
Las coordenadas del centro son: $O(2,0,3)$. El radio de la circunferencia que pasa por los puntos A, B, C es:

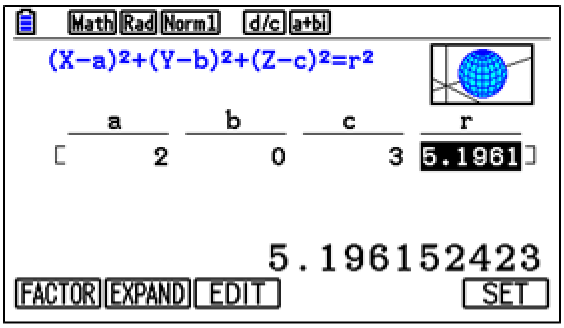
$$r = \sqrt{(3-2)^2 + (-1-0)^2 + (-2-3)^2} = \sqrt{27}$$

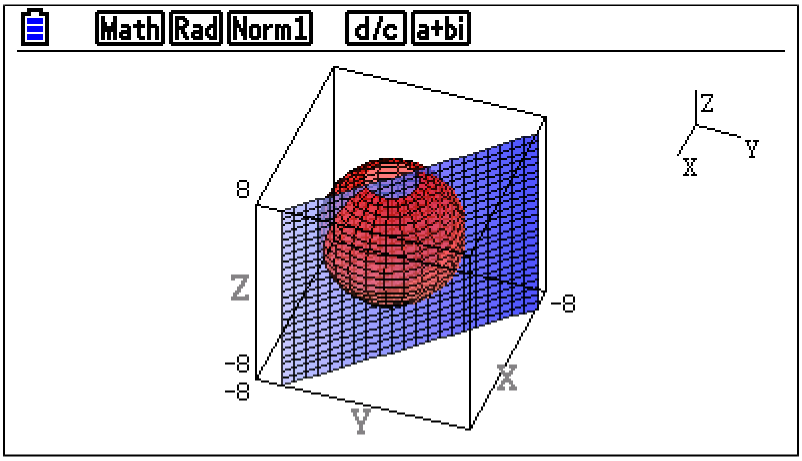
La ecuación de la circunferencia es igual a la intersección del plano $\pi_{ABC} \equiv x + y - 2 = 0$ y la esfera de centro $O(2,0,3)$ y radio $r = \sqrt{27}$

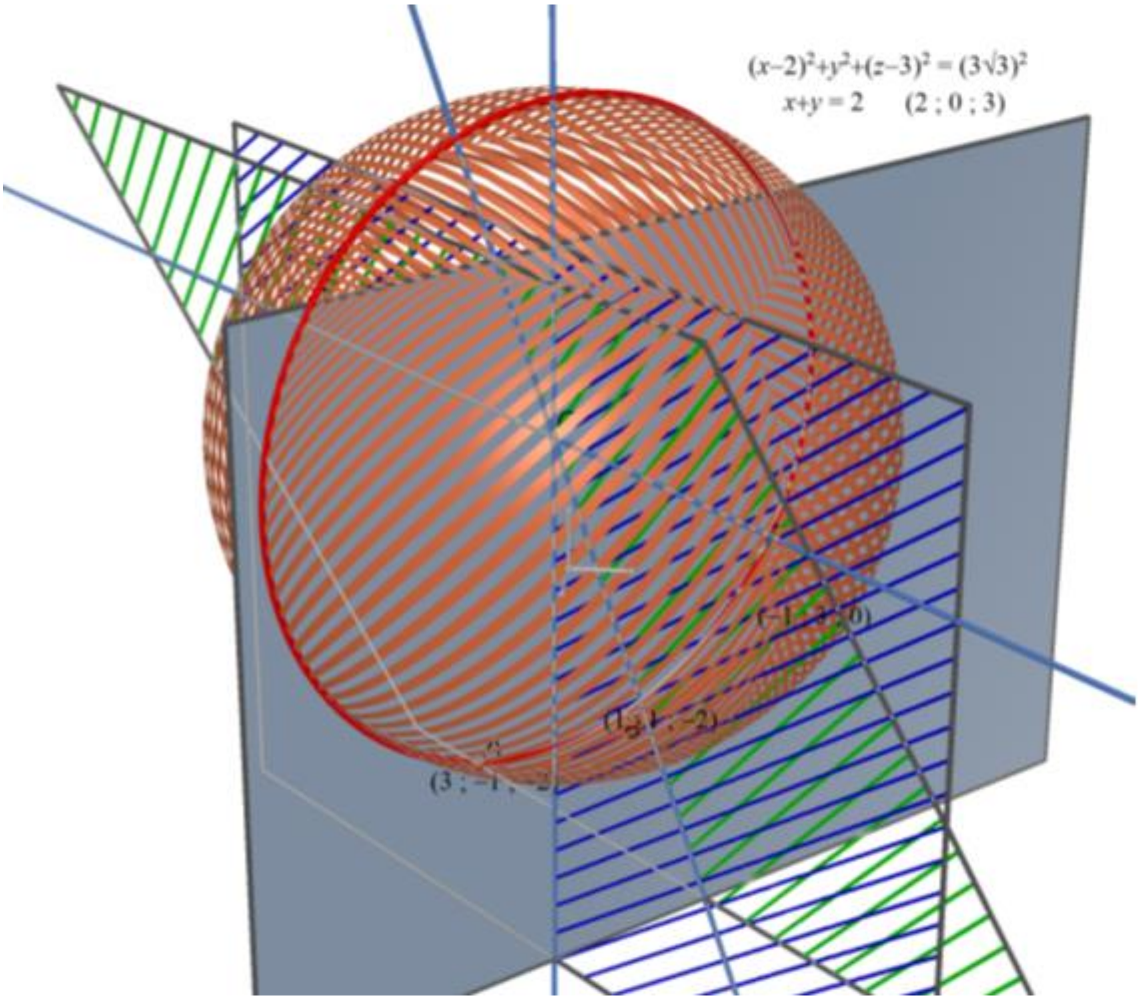
$$\begin{cases} x + y = 2 \\ (x-2)^2 + y^2 + (z-3)^2 = 27 \end{cases}$$

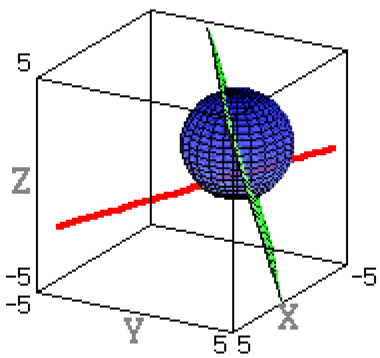
Abrimos el *Menú Gráfico 3D*. Definimos y representamos las ecuaciones del plano $\pi_{ABC} \equiv x + y - 2 = 0$ y la esfera $(x-2)^2 + y^2 + (z-3)^2 = 27$











Abril 15-16: Determináis la posición relativa de la recta

$$\mathbf{r} \equiv \begin{cases} \mathbf{x = 2 - 2\alpha} \\ \mathbf{y = -\dfrac{7}{2} + 3\alpha} \\ \mathbf{z = -2 + \alpha} \end{cases}$$

y la esfera

$$\mathbf{E \equiv x^2 + y^2 + z^2 + x - 4y - 3z + \frac{1}{2} = 0}$$

Solución: Completando cuadrados, la ecuación de la esfera es:

$$\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+(y-2)^2+\left(z-\frac{3}{2}\right)^2=6$$

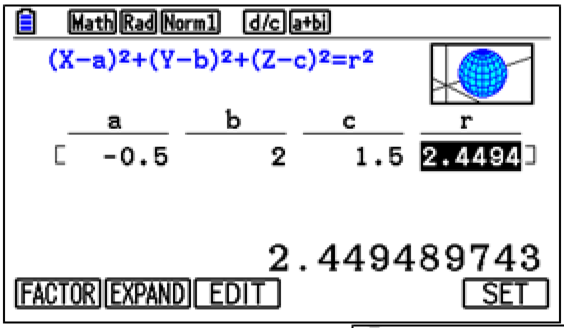
El centro de la esfera es el punto $O\left(-\frac{1}{2},2,\frac{3}{2}\right)$, el radio es $r=\sqrt{6}$. Calculemos la proyección del centro O sobre la recta r. Consideremos el plano perpendicular a la recta r que pasa por $O\left(-\frac{1}{2},2,\frac{3}{2}\right)$ y vector característico el director de la recta $v=(-2,3,1)$. Su ecuación es:

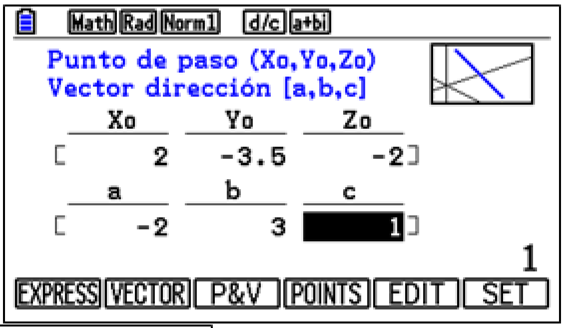
$$\Pi\equiv -2\left(x+\frac{1}{2}\right)+3(y-2)+\left(z-\frac{3}{2}\right)=0$$

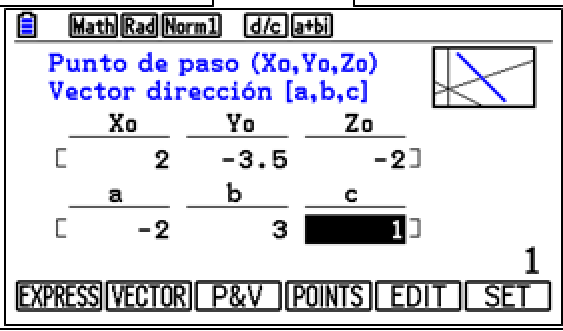
Simplificando:

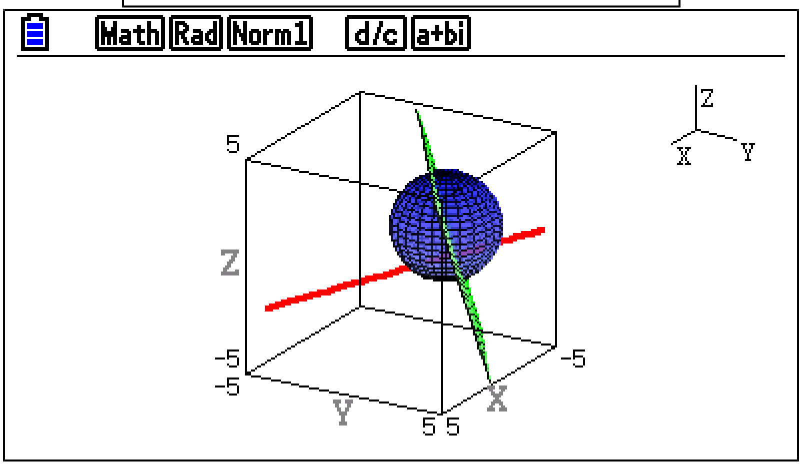
$$\Pi\equiv -2x+3y+z-\frac{17}{2}=0$$

Abrimos el *Menú Gráfico 3D*. Definimos y representamos la esfera la recta y el plano.

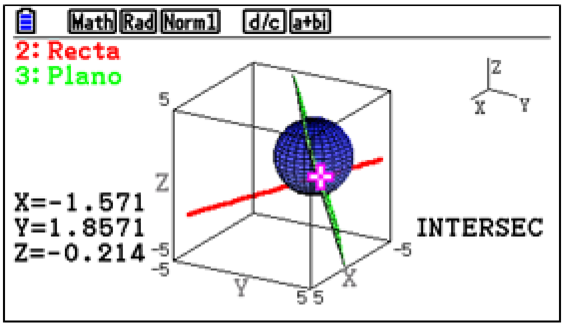






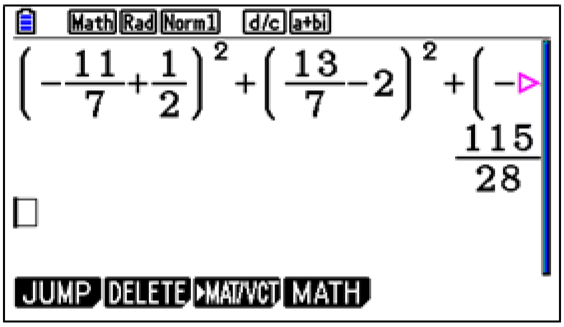


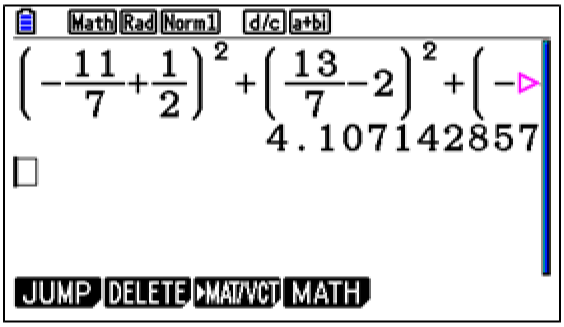
Con la función *G-Solv,* determinemos la intersección de la recta y el plano (punto proyección)



El punto proyección tiene coordenadas P$\left(\frac{-11}{7}, \frac{13}{7}, \frac{-3}{14}\right)$. Calculamos el cuadrado de la distancia entre el centro O y la proyección P.

$$(\mathrm{d}(\mathrm{OP}))^2 = \left(-\frac{11}{7} + \frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{13}{7} - 2\right)^2 + + \left(-\frac{3}{14} - \frac{3}{2}\right)^2$$



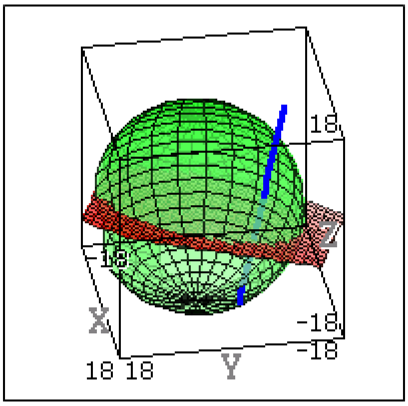


Entonces, la recta corta a la esfera ya que $(\mathrm{d}(\mathrm{OP}))^2 < \mathrm{r}^2 = 6$

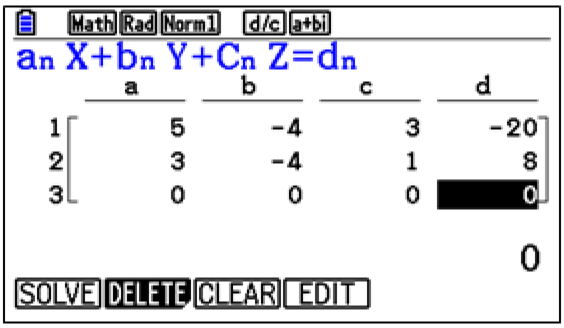
Abril 18: Determinad la ecuación de la esfera de centro $\mathrm{O}(2, 3, -1)$ que corta a la recta

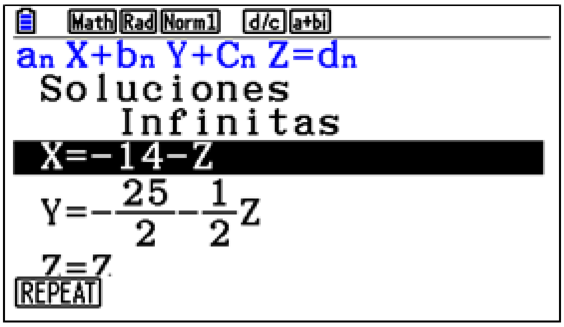
$$s \equiv \begin{cases} 5x - 4y + 3z + 20 = 0 \\ 3x - 4y + z - 8 = 0 \end{cases}$$

en una cuerda de longitud igual a 16.



Solución: Abrimos el *Menú Ecuación*. Resolvemos el sistema formado por la recta por determinar en forma paramétrica:





La ecuación paramétrica de la recta es:

$$s \equiv \begin{cases} x = -14 - \alpha \\ y = -\frac{25}{2} - \frac{1}{2}\alpha \\ z = \alpha \end{cases}$$

Un punto de la recta s es $A\left(-14, -\frac{25}{2}, 0\right)$ y el vector director $v = (-2, -1, 2)$. Determinamos el punto proyección del centro O sobre la recta s. El plano que pasa por $O(2, 3, -1)$ y es perpendicular a la recta $s \equiv \begin{cases} x = -14 - \alpha \\ y = -\frac{25}{2} - \frac{1}{2}\alpha \\ z = \alpha \end{cases}$ tiene vector característico el vector director de la recta s, $v = (-2, -1, 2)$

La ecuación es

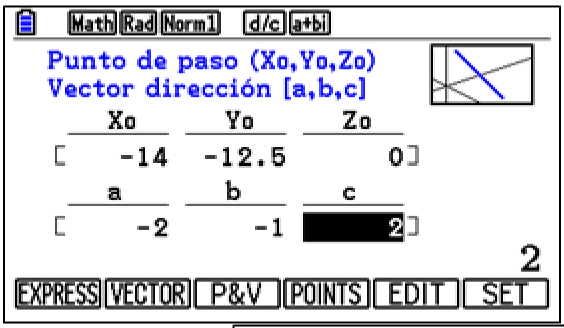
$$\Pi \equiv -2(x - 2) - (y - 3) + 2(z + 1) = 0$$

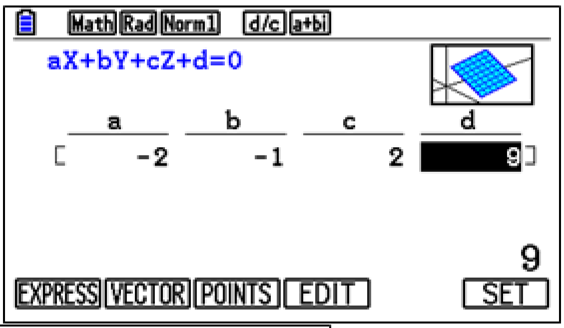
Simplificando:

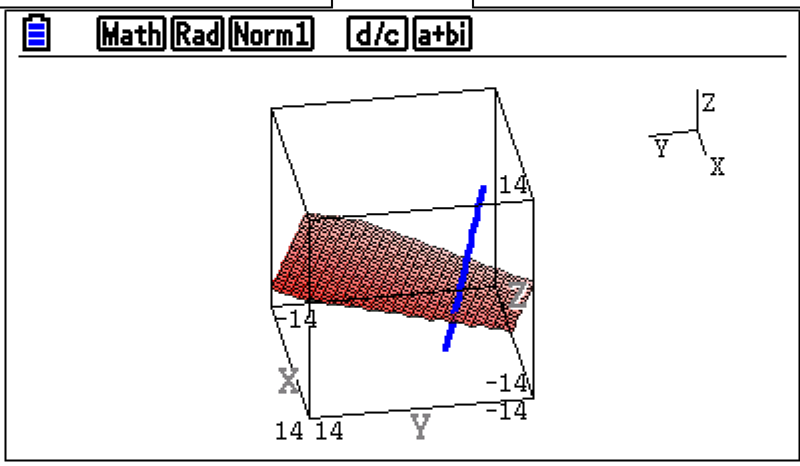
$$\Pi \equiv -2x - y + 2z + 9 = 0$$

Abrimos el *Menú Gráfico 3D.*

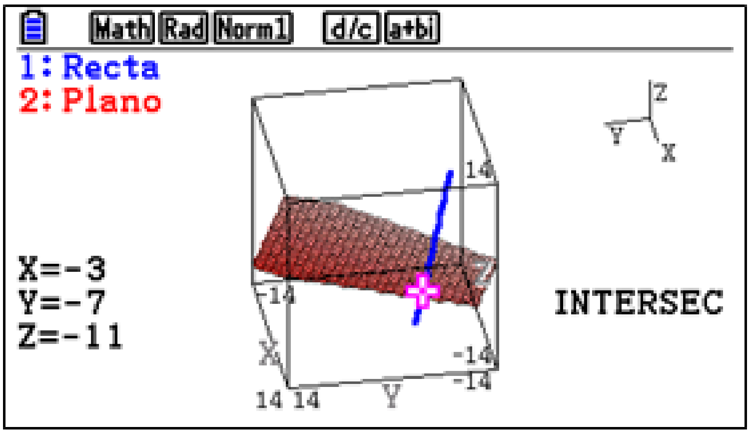
Definimos y representemos la recta $s \equiv \begin{cases} x = -14 - \alpha \\ y = -\frac{25}{2} - \frac{1}{2}\alpha \\ z = \alpha \end{cases}$ y el plano $\Pi \equiv -2x - y + 2z + 9 = 0$.







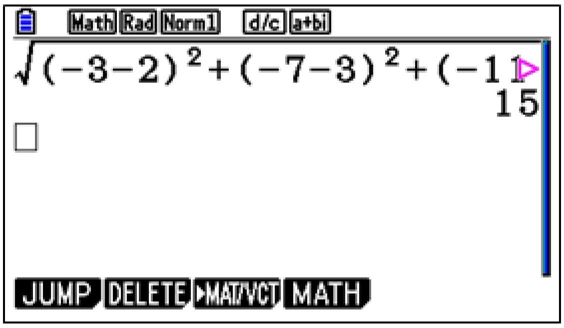
Con la función *G-Solv,* determinemos el punto intersección, punto medio de la cuerda.



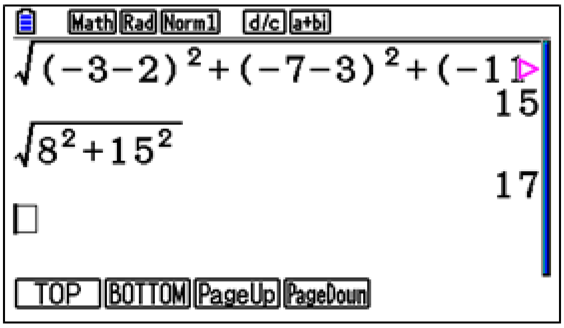
Las coordenadas del punto medio de la cuerda son: $\mathrm{M}(-3,-7,-11)$

Abrimos el *Menú Ejec-Mat*. Calculemos la distancia del centre O al punt M

$$\mathrm{d}(\mathrm{O},\mathrm{M}) = \sqrt{(-3-2)^2+(-7-3)^2+(-11+1)^2}$$



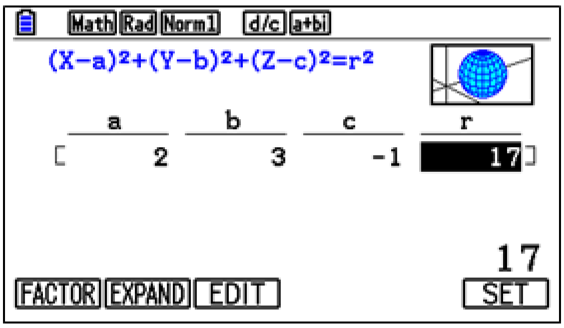
Sea r el radio de la esfera. Aplicando el teorema de Pitágoras: $\mathrm{r}^2 = 8^2 + 15^2$

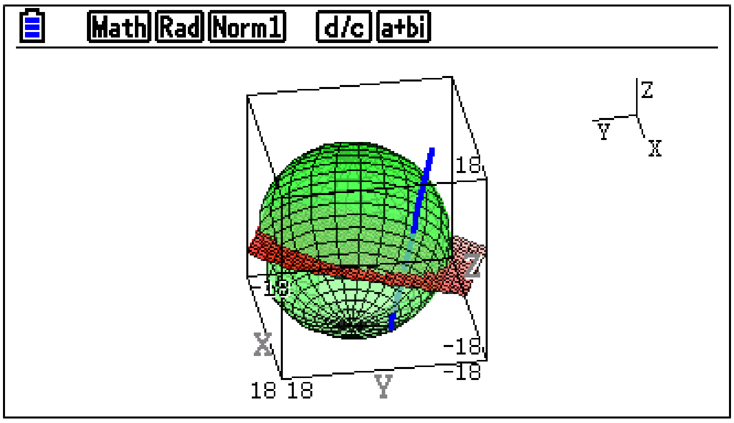


El radio de la esfera es $r = 17$. La ecuación de la esfera es:

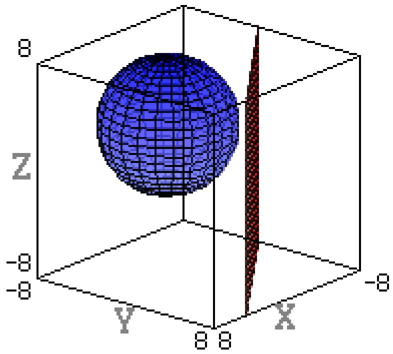
$$(x-2)^2 + (y-3)^2 + (z+1)^2 = 17^2$$

Abrimos el *Menú Gráfico 3D*. Definimos y representemos la esfera.





Abril 19-20: En la esfera de ecuación $E \equiv (x-1)^2 + (y+2)^2 + (x-3)^2 = 25$ determinad el punto M mas próximo al plano $\Pi \equiv 3x - 4y + 19 = 0$ y calculad la distancia del punto M a este plano.

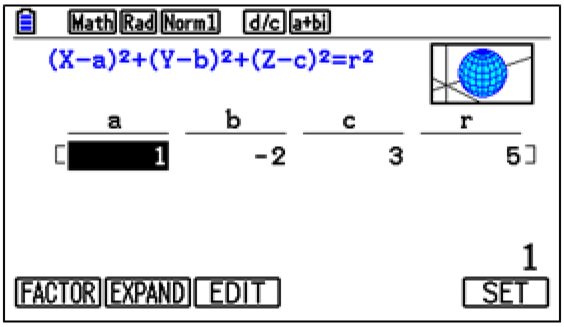


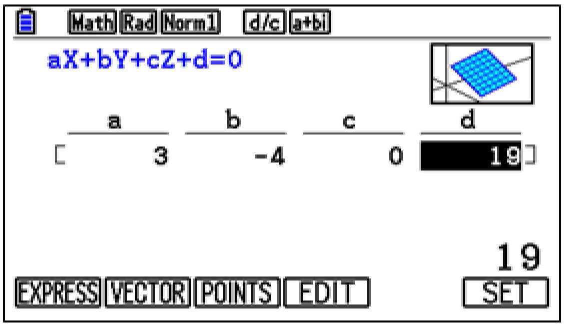
Solución: La esfera tiene centro el punto $O(1,-2,3)$ y radio $r = 5$. Veamos que el plano es exterior a la esfera. Calculemos la distancia del centro $O(1,-2,3)$ al plano $\Pi \equiv 3x - 4y + 19 = 0$

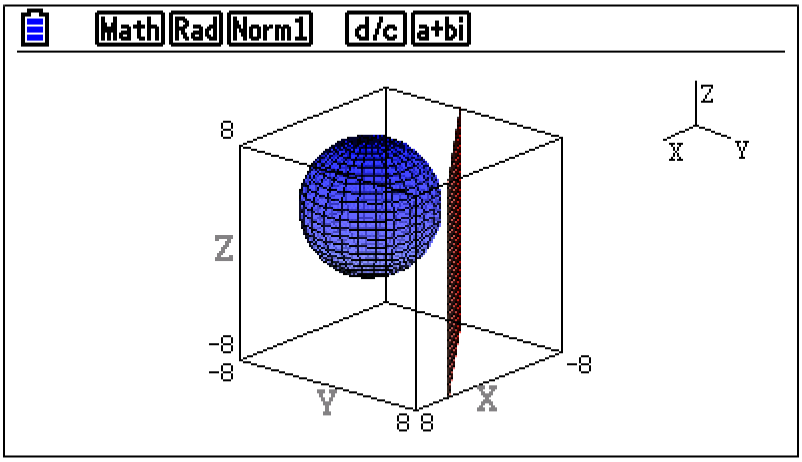
$$d(O,\Pi) = \left|\frac{3\cdot 1 - 4\cdot(-2) + 0\cdot 3 + 19}{\sqrt{3^2 + (-4)^2 + 0^2}}\right| = 6, \quad d(O,\Pi) = 6 > r = 5$$

Entonces, el plano es exterior a la esfera.

Abrimos el *Menú Gráfico* 3D. Definimos y representamos la esfera y el plano.







La recta perpendicular al plano $\Pi \equiv 3x - 4y + 19 = 0$ que pasa por el centro $O(1,-2,3)$ tiene vector director el característico del plano $a = (3,-4,0)$. Su ecuación es:

$$r \equiv (x,y,z) = (1,-2,3) + \alpha(3,-4,0)$$

Un punto cualquiera de la recta tiene coordenadas:

$$M(1+3\alpha, -2-4\alpha, 3)$$

Sustituyendo las coordenadas del punto en la ecuación del plano:

$$(3\alpha)^2 + (-4\alpha)^2 = 25$$

Resolviendo la ecuación:

$$\alpha = 1, -1$$

Si $\alpha = 1$, el punto intersección tiene coordenadas $M_1(4, -6, 3)$. Si $\alpha = -1$, el punto intersección tiene coordenadas $M_2(-2, 2, 3)$

Calculemos la distancia del punto $M_1(4, -6, 3)$ al plano $\Pi \equiv 3x - 4y + 19 = 0$

$$d(M_1, \Pi) = \left| \frac{3 \cdot 4 - 4 \cdot (-6) + 0 \cdot 3 + 19}{\sqrt{3^2 + (-4)^2 + 0^2}} \right| = 11$$

Calculemos la distancia del punto $M_2(-2, 2, 3)$ al plano $\Pi \equiv 3x - 4y + 19 = 0$

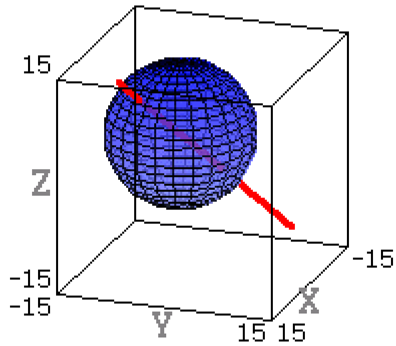
$$d(M_2, \Pi) = \left| \frac{3 \cdot (-2) - 4 \cdot 2 + 0 \cdot 3 + 19}{\sqrt{3^2 + (-4)^2 + 0^2}} \right| = 1$$

El punto más próximo al plano $\Pi \equiv 3x - 4y + 19 = 0$ es $M_2(-2, 2, 3)$

Abril 21-22: Calculad la distancia más corta del punto A (1,-1,3) a la esfera

$$\mathbf{E \equiv x^2 + y^2 + z^2 - 6x + 4y - 10z - 62 = 0}$$

¿En qué punto de la esfera se logra la distancia más corta?



Solución: Completando cuadrados:

$$E \equiv (x-3)^2 + (y+2)^2 + (z-5)^2 = 62 + 9 + 4 + 25 = 10^2$$

Las coordenadas del centro de la esfera es $O(3, -2, 5)$ y el radio $R = 10$

Estudiemos la posición relativa del punto $A(1, -1, 3)$ respecto de la esfera.

$$(1-3)^2 + (-1+2)^2 + (3-5)^2 = 9 < 10^2$$

El punto $A(1, -1, 3)$ es interior a la esfera.

$$\overline{OA} = \sqrt{(1-3)^2 + (-1+2)^2 + (3-5)^2} = 3$$

La distancia más corta es:

$$d_{mín} = R - \overline{OA} = 10 - 3 = 7$$

La distancia más larga es:

$$d_{màx} = R + \overline{OA} = 10 + 3 = 13, \qquad \overrightarrow{OA} = (-2, 1, -2)$$

La ecuación de la recta que pasa por los puntos O y A es:

$$r_{OA} \equiv (x, y, z) = (3, -2, 5) + \alpha(-2, 1, -2)$$

Un punto cualquiera de la recta $r_{OA} \equiv (x, y, z) = (3, -2, 5) + \alpha(-2, 1, -2)$ tiene coordenadas:

$$P(3 - 2\alpha, -2 + \alpha, 5 - 2\alpha)$$

Determinemos la intersección de la recta y la esfera. Substituimos las coordenadas del punto $P(3 - 2\alpha, -2 + \alpha, 5 - 2\alpha)$ en la ecuación de la esfera:

$$(-2\alpha)^2 + \alpha^2 + (-2\alpha)^2 = 100$$

Resolviendo la ecuación:

$$\alpha = \frac{10}{3}, -\frac{10}{3}$$

Si $\alpha = \frac{10}{3}$

$$P_1\left(\frac{-11}{3}, \frac{4}{3}, \frac{-5}{3}\right), \qquad \overline{AP_1} = \sqrt{\left(\frac{-11}{3} - 1\right)^2 + \left(\frac{4}{3} + 1\right)^2 + \left(\frac{-5}{3} - 3\right)^2} = 7$$

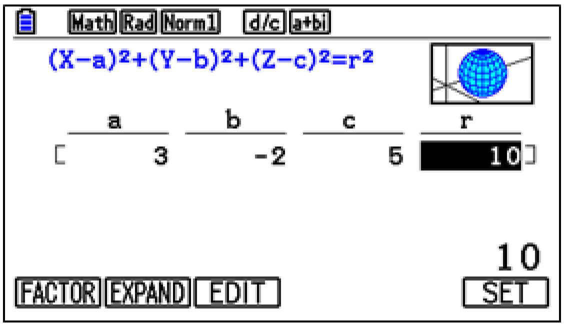
$P_1\left(\frac{-17}{3}, \frac{7}{3}, \frac{11}{3}\right)$ es el punto más próximo de A.

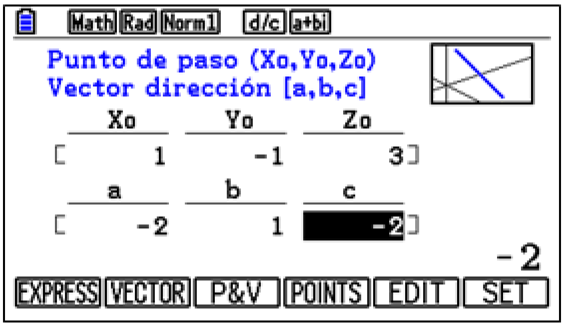
Si $\alpha = -\frac{10}{3}$

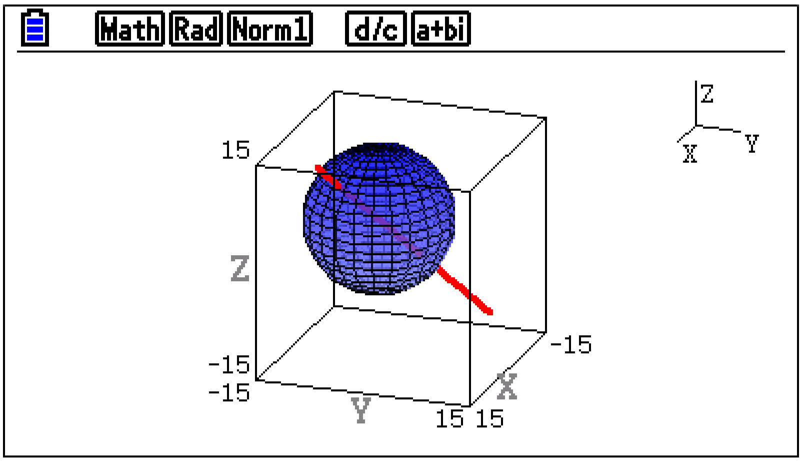
$$P_2\left(\frac{29}{3}, \frac{-16}{3}, \frac{35}{3}\right), \qquad \overline{AP_2} = \sqrt{\left(\frac{29}{3} - 1\right)^2 + \left(\frac{-16}{3} + 1\right)^2 + \left(\frac{35}{3} - 3\right)^2} = 13$$

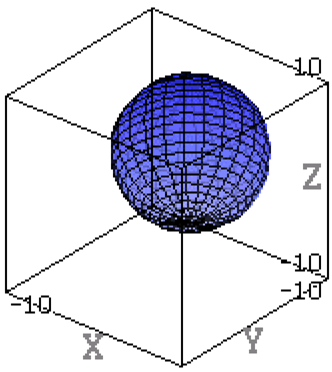
$P_2\left(\frac{29}{3}, \frac{-16}{3}, \frac{35}{3}\right)$ es el punto más alejado de A.

Abrimos el *Menú Gráfico 3D*. Definimos y representamos la esfera y la recta









Abril 23: Determináis la ecuación de la esfera que pasa por los puntos A(3,1,-3); B(-2,4,1); C(-5,0,0) y tiene el centro en el plano

$$\boldsymbol{\Pi \equiv 2x + y - z + 3 = 0}$$

Solución: Calculemos las componentes de los vectores $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}$

$$\overrightarrow{AB} = (-5, 3, 4), \quad \overrightarrow{AC} = (-8, -1, 3)$$

Los vectores son linealmente independientes ya que las componentes no son proporcionales

$$\frac{-5}{-8} \neq \frac{3}{-1}$$

Calculemos los puntos medios de los segmentos $\overline{AB}, \overline{AC}$

El punto medio del segmento $\overline{AB}$ es $D\left(\frac{1}{2}, \frac{5}{2}, -1\right)$

El punto medio del segmento $\overline{AC}$ es $E\left(-1, \frac{1}{2}, \frac{-3}{2}\right)$

El plano mediador del segmento $\overline{AB}$ tiene ecuación:

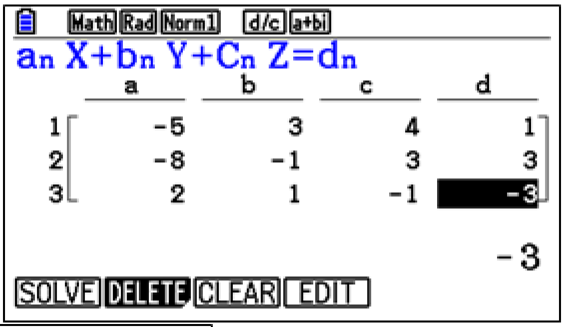
$$\Pi_1 \equiv -5\left(x - \frac{1}{2}\right) + 3\left(y - \frac{5}{2}\right) + 4(z + 1) = 0, \quad \Pi_1 \equiv -5x + 3y + 4z = 1$$

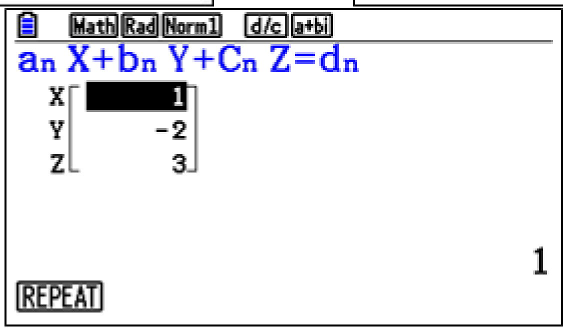
El plano mediador del segmento $\overline{AC}$ tiene ecuación:

$$\Pi_2 \equiv -8(x + 1) - \left(y - \frac{1}{2}\right) + 3\left(z + \frac{3}{2}\right) = 0, \quad \Pi_2 \equiv -8x - y + 3z = 3$$

El centro de la esfera es igual al punto intersección de los tres planos.

Abrimos el *Menú Ecuación*:



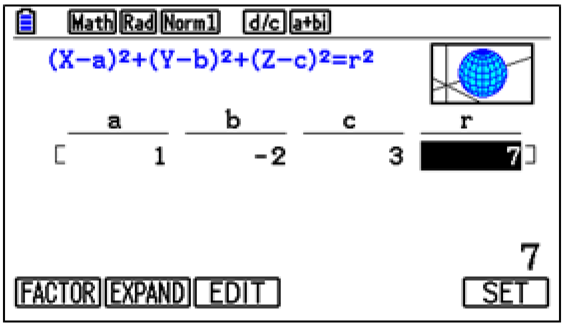


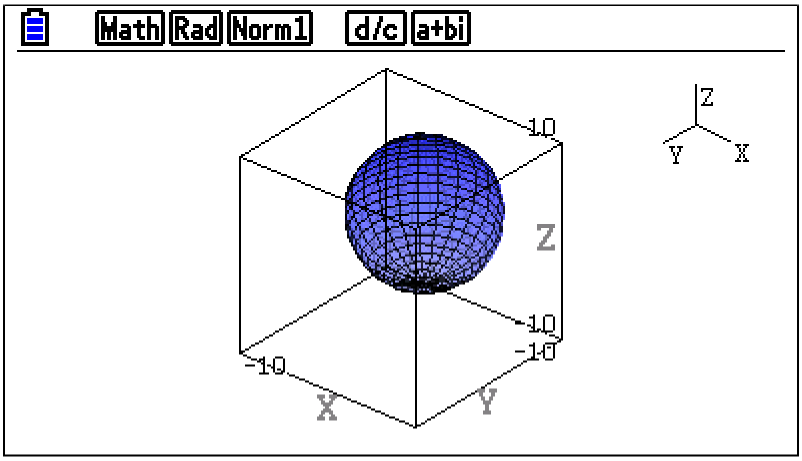
El centro de la esfera es el punto $O(1, -2, 3)$. El radio de la esfera es:

$$r = \overline{OA} = \sqrt{(3-1)^2 + (1+2)^2 + (-3-3)^2} = 7$$

El radio de la esfera es $r = 7$. La ecuación de la esfera es $(x-1)^2 + (y+2)^2 + (z-3)^2 = 7^2$

Abrimos el *Menú Gráfico 3D*. Definimos y representamos la esfera.





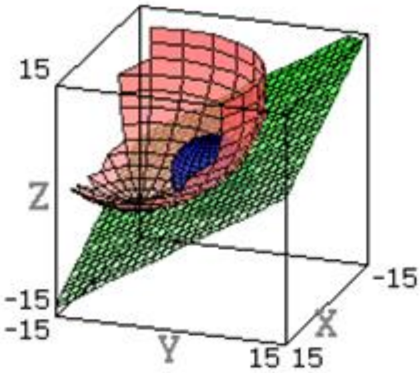
Abril 25-26: Sean las esferas de ecuaciones

$$\mathbf{E_1 \equiv x^2 + y^2 + z^2 = 25,}$$
$$\mathbf{E_2 \equiv x^2 + y^2 + z^2 - 10x + 15y - 25z = 0}$$

Probad que las dos esferas son secantes.

Determinad el plano que contiene la intersección de las dos esferas.

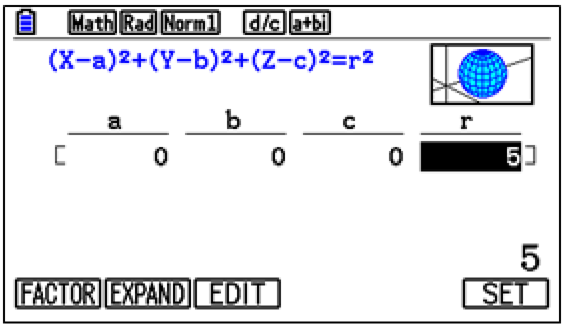
Determinad el centro y el radio de la circunferencia intersección

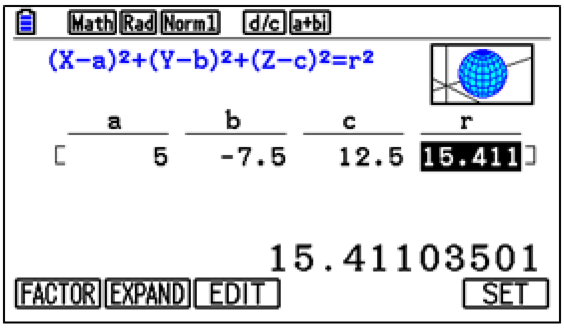


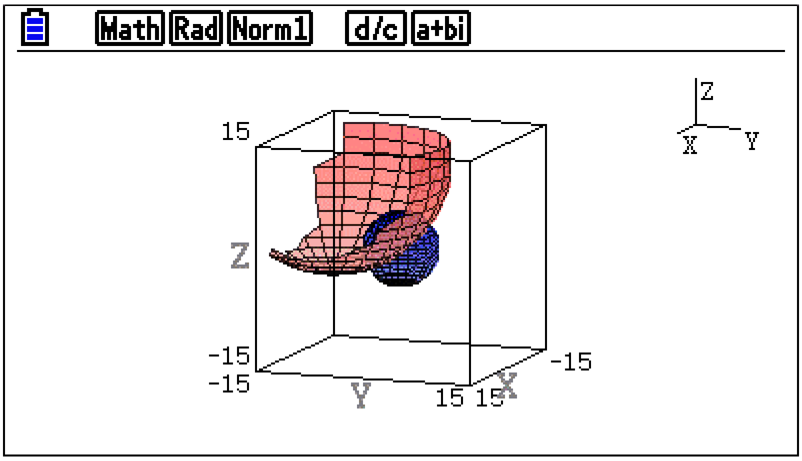
Solución: La esfera $E_1 \equiv x^2 + y^2 + z^2 = 25$ tiene centro $O_1(0,0,0)$ y radio $R_1 = 5$. Completando cuadrados en la esfera $E_2 \equiv x^2 + y^2 + z^2 - 10x + 15y - 25z = 0$

$$(x-5)^2 + \left(y + \frac{15}{2}\right)^2 + \left(z - \frac{25}{2}\right)^2 = 25 + \frac{225}{4} + \frac{625}{4} = \left(\frac{5}{2}\sqrt{38}\right)^2$$

El centro de la esfera es $O_2\left(5, -\frac{15}{2}, \frac{25}{2}\right)$ y radio $R_2 = \frac{5}{2}\sqrt{38}$. Abrimos el *Menú Gráfico 3D*. Definimos y representamos las dos esferas.







Veamos analíticamente que las dos esferas son secantes. Calculemos la distancia entre los dos centros.

$$\overline{O_1O_2} = \sqrt{(5-0)^2 + \left(-\frac{15}{2}-0\right)^2 + \left(\frac{25}{2}-0\right)^2} = \frac{5}{2}\sqrt{38}$$

La suma de los radios es:

$$R_1 + R_2 = 5 + \tfrac{5}{2}\sqrt{38} > \overline{O_1O_2}$$

La diferencia de los radios es:

$$R_2 - R_1 = \frac{5}{2}\sqrt{38} - 5 > \overline{O_1O_2}$$

Entonces, las dos esferas son secantes.

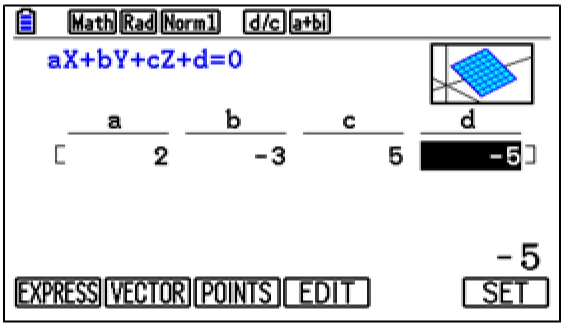
El plano intersección de las dos esferas es el plano formado por la diferencia de las ecuaciones de las dos esferas:

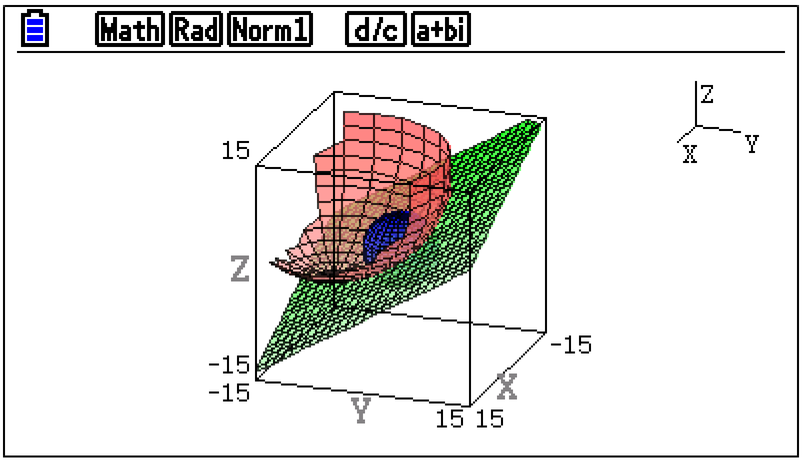
$$\Pi \equiv 10x - 15y + 25z = 25$$

Simplificando:

$$\Pi \equiv 2x - 3y + 5z - 5 = 0$$

Representemos el plano.





El centro de la circunferencia intersección de las dos esferas es la proyección del centro $O_1(0,0,0)$ sobre el plano $\Pi \equiv 2x - 3y + 5z - 5 = 0$. La recta r perpendicular al plano que pasa por $O_1(0,0,0)$ tiene vector director el característico del plano $a = (2,-3,5)$ y su ecuación es:

$$r \equiv (x,y,z) = \alpha(2,-3,5)$$

Sustituimos las coordenadas de un punto cualquiera de la recta r, $(2\alpha, -3\alpha, 5\alpha)$ en la ecuación del plano:

$$2(2\alpha) - 3(-3\alpha) + 5(5\alpha) - 5 = 0$$

Resolviendo la ecuación:

$$\alpha = \frac{5}{38}$$

La intersección del plano y la recta es:

$$O\left(\frac{5}{19}, -\frac{15}{38}, \frac{25}{38}\right), \quad \overline{O_1O} = d(O_1, \Pi) = \left|\frac{-5}{\sqrt{38}}\right| = \frac{5}{\sqrt{38}}$$

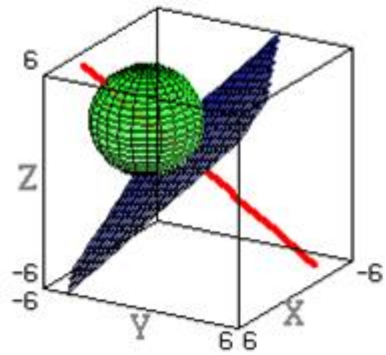
Consideremos el triángulo rectángulo formado por los catetos $\overline{O_1O}$, O y un punto de la circunferencia y de hipotenusa $R_1 = 5$. Sea R el radio de la circunferencia. Aplicando el teorema de Pitágoras:

$$5^2 = R^2 + \left(\frac{5}{\sqrt{38}}\right)^2 \quad R = 5 \cdot \sqrt{\frac{37}{38}} \approx 4.93$$

Abril 27: Probad que el punto T(1,0,1) pertenece al plano

$$\boldsymbol{\pi \equiv x - 2y + 2z = 3.}$$

Determinad la ecuación de la esfera que pasa por el punto P(1,0,5) y es tangente en T al plano π.



Solución: Substituimos el punt $T(1,0,1)$ en la ecuación del plano $\pi \equiv x - 2y + 2z = 3$ y veamos que se transforma en una igualdad:

$$1 - 2 \cdot 0 + 2 \cdot 1 = 3$$

El centro pertenece a la recta r perpendicular al plano que pasa por el punto $T(1,0,1)$. El vector director de la recta r es el característico del plano π, $a = (1, -2, 2)$

$$r \equiv (x, y, z) = (1, 0, 1) + \mu(1, -2, 2)$$

El centro de la esfera tiene coordenadas:

$$O(1 + \mu, -2\mu, 1 + 2\mu)$$

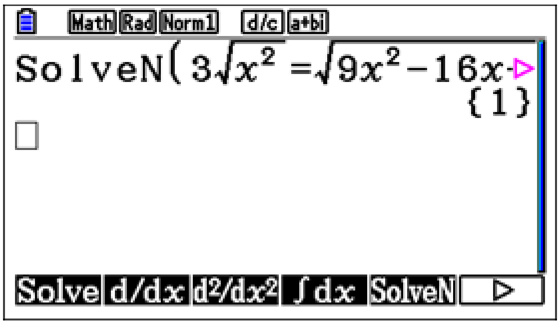
El centro cumple que $d(O, T) = d(O, P) = R$, radio de la esfera.

$$d(O, T) = \sqrt{(-\mu)^2 + (2\mu)^2 + (-2\mu)^2} = 3\sqrt{\mu^2}$$

$$d(O, P) = \sqrt{(-\mu)^2 + (2\mu)^2 + (4 - 2\mu)^2} = \sqrt{9\mu^2 - 16\mu + 16}$$

$$3\sqrt{\mu^2} = \sqrt{9\mu^2 - 16\mu + 16}$$

Abrimos el *Menú Ejec-Mat*: Resolvemos la ecuación:



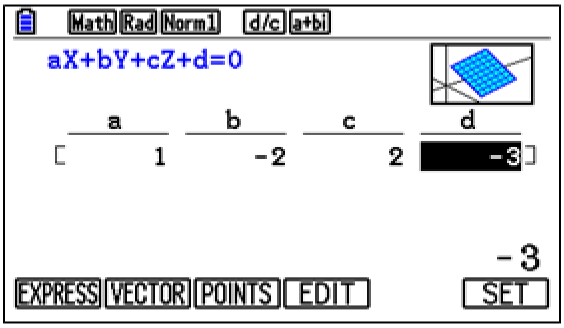
La solución es:

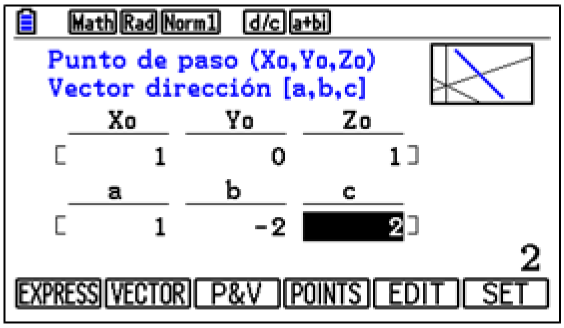
$$\mu = 1$$

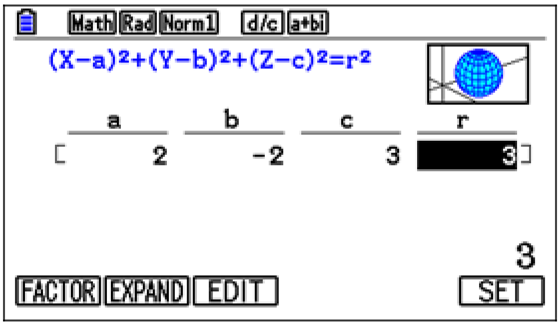
El centro de la esfera es $O(2,-2,3)$. El radio es $R = 3 \cdot 1 = 3$. La ecuación de la esfera es:

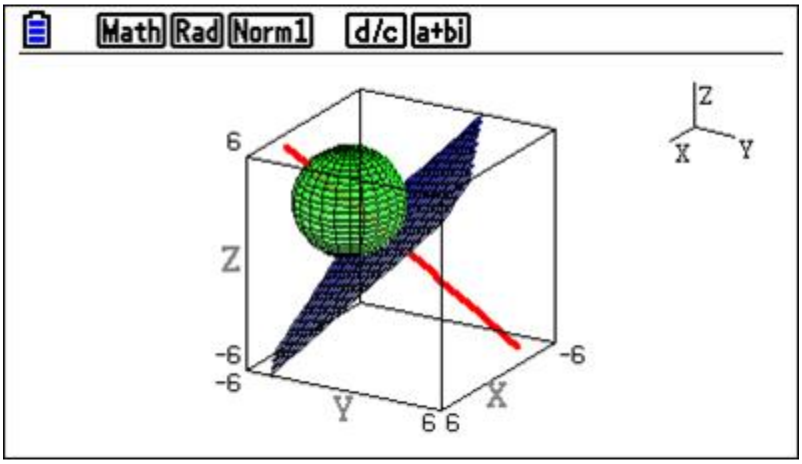
$$(x-2)^2 + (y+1)^2 + (z-3)^2 = 3^2$$

Abrimos el *Menú Gráfico 3D*. Definimos y representemos el plano $\pi \equiv x - 2y + 2z = 3$, la recta $r \equiv (x, y, z) = (1, 0, 1) + \mu(1, -2, 2)$ y la esfera $(x-2)^2 + (y+1)^2 + (z-3)^2 = 3^2$





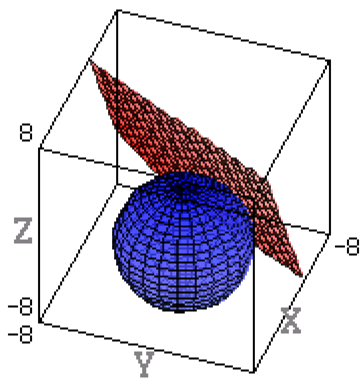




Abril 28: Determinad la ecuación del plano tangente a la esfera

$$\mathbf{(x-3)^2 + (y-1)^2 + (z+2)^2 = 24}$$

que pase por el punto M(-1,3,0)



Solución: La esfera $(x-3)^2+(y-1)^2+(z+2)^2=24$ tiene centro $\text{O}(3,1,-2)$ y radio $\text{r}=\sqrt{24}$. El punto $\text{M}(-1,3,0)$ pertenece a la esfera ya que $(-1-3)^2+(3-1)^2+(0+2)^2=24$. El plano tangente a la esfera pasa por el punto $\text{M}(-1,3,0)$ y tiene vector característico

$$\overrightarrow{\text{OM}}=(-4,2,2)$$

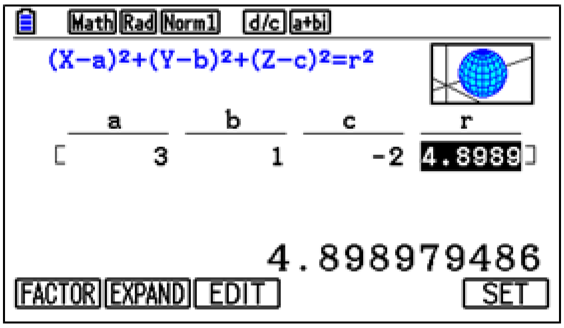
La ecuación del plano es:

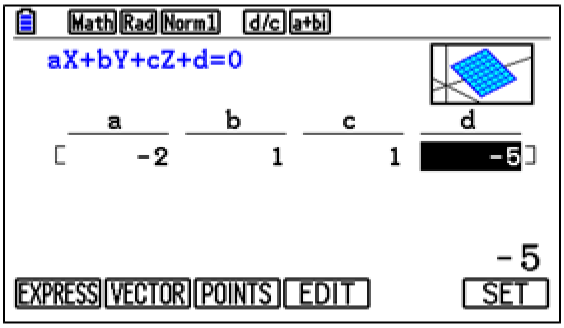
$$-4(x+1)+2(y-3)+2(z-0)=0$$

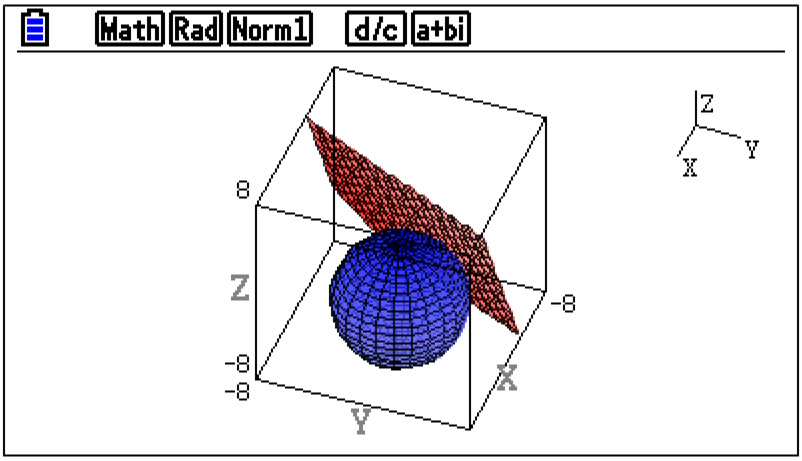
Simplificando:

$$-2x+y+z-5=0$$

Abrimos el *Menú Gráfico 3D*: Definimos y representamos la esfera y el plano.



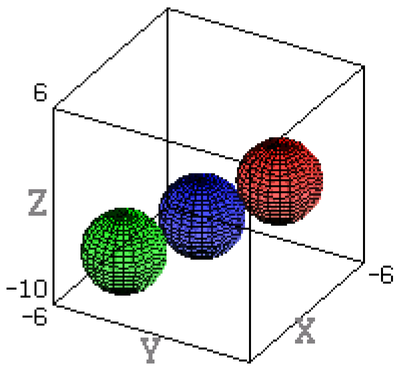




Abril 29-30: Sea la esfera

$$\mathbf{x^2+y^2+z^2-6x-4y+8z+20=0}$$

Calculad la esfera de igual radio, tangente exterior en el punto A(1,4,-3) de la esfera. Calculad la esfera de igual radio, tangente exterior en el punto diametralmente opuesto al punto A de la esfera.



Solución: Completando cuadrados:

$$\text{E}\equiv(\text{x}-3)^2+(\text{y}-2)^2+(\text{z}+4)^2=3^2$$

La esfera E tiene centro $\text{O}(3,2,-4)$ y radio $\text{r}=3$. Notemos que el punto $\text{A}(1,4,-3)$ pertenece a la esfera E ya que satisface su ecuación:

$$\text{E}\equiv(1-3)^2+(4-2)^2+(-3+4)^2=3^2$$

El centro O_1de la esfera tangente en el punto $A(1,4,-3)$ cumple: $\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{AO_1}$

$$(-2,2,1) = (x-2, y-4, z+3)$$

Resolviendo la ecuación: $O_1(-1,6,-2)$. La ecuación de la esfera de radio 3, tangente en A a la esfera E tiene ecuación:

$$E_1 \equiv (x+1)^2 + (y-6)^2 + (z+2)^2 = 3^2$$

El punto A' diametralmente opuesto al punto A cumple: $\overrightarrow{AO} = \overrightarrow{OA'}$

$$(2,-2,-1) = (x-3, y-2, z+4)$$

Resolviendo la ecuación: $A'(5,0,-5)$.

El centro O_2 de la esfera tangente en el punto $A'(5,0,-5)$ cumple:

$$\overrightarrow{O_1O} = \overrightarrow{OO_2}, \quad (4,-4,-2) = (x-3, y-2, z+4)$$

Resolviendo la ecuación: $O_2(7,-2,-6)$

La ecuación de la esfera de radio 3 tangente en A' a la esfera E tiene ecuación:

$$E_1 \equiv (x-7)^2 + (y+2)^2 + (z+6)^2 = 3^2$$

Abrimos el *Menú Gráfico 3D.* Definimos y representamos las tres esferas.