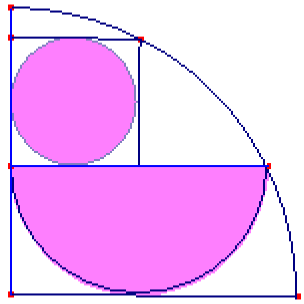
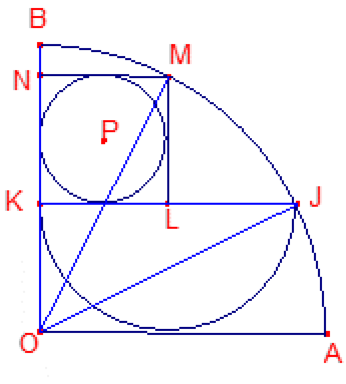
SOLUCIONES JUNIO 2022

PROBLEMAS PARA UTILIZAR PROGRAMAS GEOMÉTRICOS. AUTOR: RICARD PEIRÓ i ESTRUCH. IES “Abastos”. València



Junio 1: Calcular la proporción entre el área sombreada y el área del cuadrante.



Solución: Sea el cuadrante $\widehat{AB}$ de centro O y radio $\overline{OA} = R$. Sea la semicircunferencia de centro L y diámetro $\overline{KJ} = 2r$. Sea la circunferencia inscrita en el cuadrado $KLMN$ de centre P. Sea $\overline{KN} = 2s$, s el radio de la circunferencia. Aplicando el teorema de Pitágoras al triángulo rectángulo $\overset{\Delta}{OKJ}$

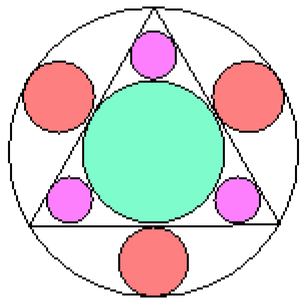
$$5r^2 = R^2, \quad \overline{ON} = r + 2s, \overline{MN} = 2s, \overline{OM} = R$$

Aplicando el teorema de Pitágoras al triángulo rectángulo $\overset{\Delta}{ONM}$

$$R^2 = 4r^2 + (r + 2s)^2; \; 10s^2 + \sqrt{5}Rs - R^2 = 0; \; s = \frac{\sqrt{5}}{10}R$$

Notemos que $r = 2s$. La proporción de las áreas es:

$$\frac{S_{\text{ombreada}}}{S_{\text{cuadrante}}} = \frac{\frac{1}{2}\pi r^2 + \pi s^2}{\frac{1}{4}R^2} = \frac{\frac{1}{2}\frac{1}{5} + \frac{1}{20}}{\frac{1}{4}} = \frac{3}{5}$$

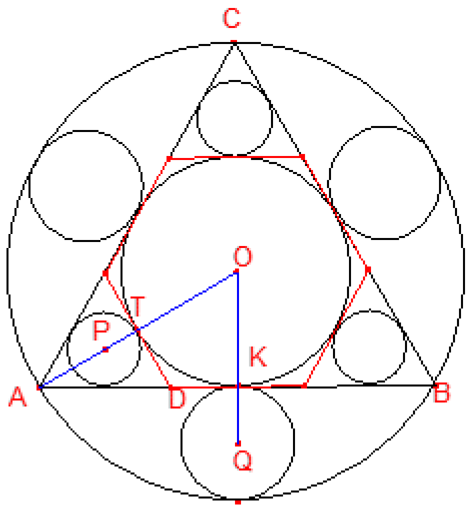


Junio 2-3: En una circunferencia de radio R se ha inscrito un triángulo equilátero. Se han dibujado 7 circunferencias. Calculáis el radio de las circunferencias.

Sangaku. Jefatura de Chiba

Solución: Sea el triángulo equilátero $\overset{\Delta}{ABC}$. Sea la circunferencia de centro O y radio $\overline{OA} = R$. Sea la circunferencia inscrita en el triángulo equilátero de radio $\overline{OT} = \overline{OK} = r$

$$\frac{r}{R} = \frac{1}{2}$$



Sea T el punto de tangencia. Sea la circunferencia de centro P y radio $\overline{PT} = s$. Por el punto T trazamos una paralela al lado $\overline{BC}$ que corta el lado $\overline{AB}$ en el punto D.

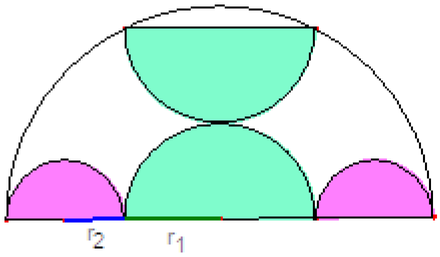
$$\overline{AD} = \frac{1}{3}\overline{AB}; \quad s = \frac{1}{3}r = \frac{1}{6}R$$

Sea la circunferencia de centro Q y radio $\overline{QK} = t$

$$2R - 2t = \overline{CK} = 3r; \ 2t = 2R - 3r = 2R - \frac{3}{2}R = \frac{1}{2}R; \ t = \frac{1}{4}R$$

Junio 4: En la siguiente figura, calcular:

$$\frac{r_1}{r_2}$$



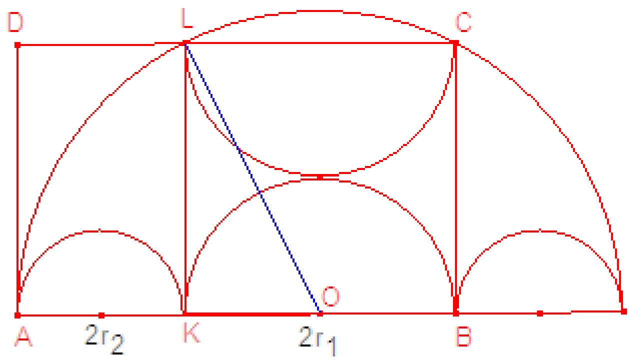
Solución 1: Sea la semicircunferencia de centro O.

Los diámetros $\overline{BK}, \overline{CL}$ forman un cuadrado.

$$\overline{OL} = \frac{\sqrt{5}}{2} r_1$$

El rectángulo ABCD es áureo.

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{AD}} = \Phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}; \ \frac{r_1}{r_2} = \frac{\overline{KB}}{\overline{AK}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{AD}} = \Phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$



Solución 2: Sea la semicircunferencia de centro O y radio $\overline{OL} = r_1 + 2 \cdot r_2$

$$\overline{OK} = r_1, \overline{KL} = 2 \cdot r_1$$

Aplicando el teorema de Pitágoras al triángulo rectángulo $\overset{\Delta}{OKL}$:

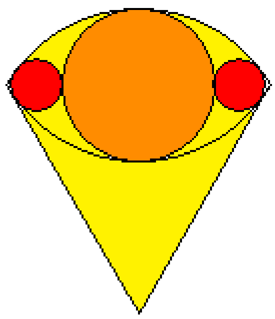
$$(r_1 + 2 \cdot r_2)^2 = {r_1}^2 + (2 \cdot r_1)^2$$

Simplificando:

$${r_1}^2 - r_2 \cdot r_1 - 1 = 0$$

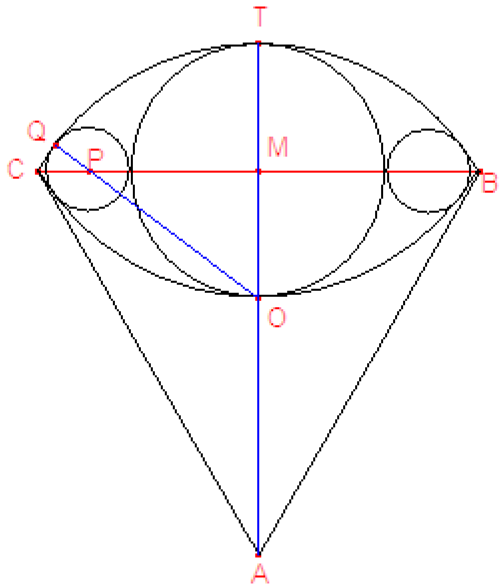
Resolviendo la ecuación:

$$\frac{r_1}{r_2} = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$



Junio 6-7: En la siguiente figura, determinar la proporción entre los radios de los dos tipos de circunferencias.

Sangaku. Jefatura Tochigi



Solución: Sea el triángulo $\overset{\Delta}{ABC}$ y O el centro del arco superior. Sea M el punto medio del lado $\overline{BC}$ centro de la circunferencia grande. Sea $\overline{OM} = R$ el radio de la circunferencia grande. Sea P el centro de la circunferencia pequeña de la izquierda, de radio $s = \overline{PQ}$

$$\overline{OQ} = \overline{OA} = 2 \cdot \overline{MO} = 2R$$

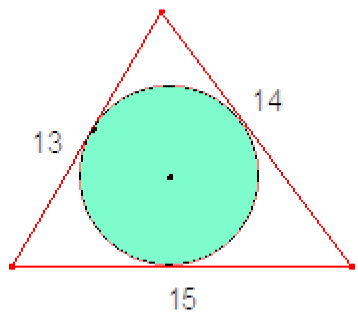
$$\overline{PM} = R + s, \overline{OM} = R, \overline{OP} = \overline{OQ} - \overline{QP} = \overline{OT} - S = 2R - s$$

Aplicando el teorema de Pitágoras al triángulo rectángulo $\overset{\Delta}{OMP}$:

$$(2R - s)^2 = R^2 + (R + s)^2$$

Simplificando:

$$s = \frac{1}{3}R$$



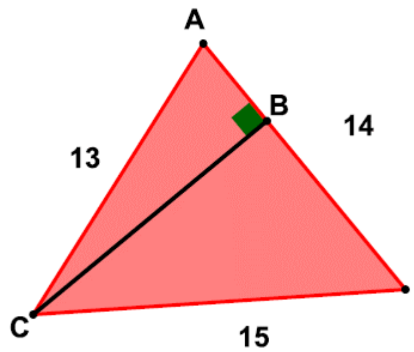
Junio 8: Los lados de un triángulo mesuran 13,14,15. Calcular el radio de la circunferencia inscrita

Solución: Sea r el radio de la circunferencia inscrita al triángulo. El área del triángulo es:

$$S = \frac{\sqrt{42 \cdot 16 \cdot 14 \cdot 12}}{4} = \frac{13 + 14 + 15}{2} r\,; \quad 84 = 21r$$

Resolviendo la ecuación: r = 4. Notamos que el triángulo es heroniano.

Solución 2: (Miguel Herrainz @M1GU3L_HH). Tendremos:



$$A = \frac{14 \cdot \overline{BC}}{2}$$

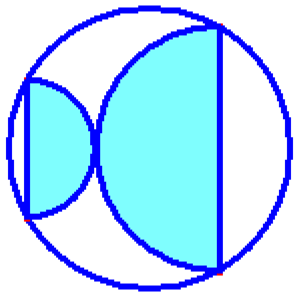
Recordando la terna pitagórica 5-12-13, tendremos:

$$\overline{CB} = 12;\ \ \overline{AB} = 5$$

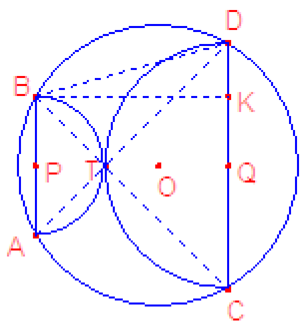
Por tanto:

$$A = \frac{14 \cdot 12}{2} = 84 = \frac{R(13 + 14 + 15)}{2} \Rightarrow R = 4$$

Junio 9: Los diámetros de los semicírculos son paralelos. Calcular la proporción entre el área sombreada y el área del círculo.



Solución: Sea la circunferencia de centro O y radio R. Sea la semicircunferencia de diámetro $\overline{AB} = 2r$ y centro P. Sea la semicircunferencia de diámetro $\overline{CD} = 2s$ y centro Q. Sea T el punto de tangencia de las dos circunferencias: Las rectas PT y AB son perpendiculares. Las rectas PT, DC son perpendiculares.



$$\angle ATB = \angle CTD = 90°\,;\ \ \angle BAT = \angle CDT = 45°$$

Entonces, los puntos A, T, D estan alineados.

Sea K la proyección de B sobre la recta CD.

$$\overline{BK} = \overline{PQ} = r + s, \overline{DK} = |r - s|$$

Aplicando el teorema de Pitágoras al triángulo rectángulo $\overset{\Delta}{BKD}$:

$$\overline{BD}^2 = (r + s)^2 + (r - s)^2 = 2r^2 + 2s^2;\ \overline{BD} = \sqrt{2(r^2 + s^2)};\ \ \overline{AT} = r\sqrt{2}, \overline{DT} = s\sqrt{2}, \overline{AD} = (r + s)\sqrt{2}$$

Aplicando el teorema de los sinos al triángulo $\overset{\Delta}{ABD}$:

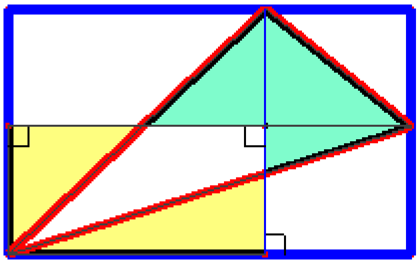
$$\frac{\sqrt{2(r^2 + s^2)}}{\sin 45°} = 2R, \qquad \frac{\sqrt{2(r^2 + s^2)}}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = 2R$$

Simplificando:

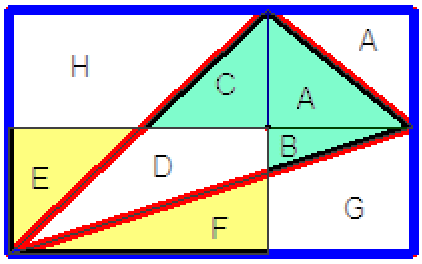
$$R^2 = r^2 + s^2$$

La proporción de las áreas es:

$$\frac{S_{sombreada}}{S_{Total}} = \frac{\frac{1}{2}\pi r^2 + \frac{1}{2}\pi s^2}{\pi R^2} = \frac{1}{2}$$



Junio 10-11: El área del triángulo rojo es la tercera parte del rectángulo exterior verde. Calcular la proporción entre el área pintada de verde y la pintada de amarillo.



Solución: El triángulo rojo y el rectángulo azul y los dos segmentos perpendiculares dividen el rectángulo exterior en 9 partes de áreas:

$$\mathrm{A, A, B, C, D, E, F, G, H}$$

La diagonal de un rectángulo divide el rectángulo en dos partes iguales.

$$\mathrm{H + E = C + D + F}; \quad \mathrm{B + D + E = F + G}$$

El área del triángulo rojo es la tercera parte de rectángulo azul, entonces:

$$\mathrm{A + H + E + F + G = 2(A + B + C + D)}$$

$$\mathrm{E + F + H + G = A + 2B + 2C + 2D}$$

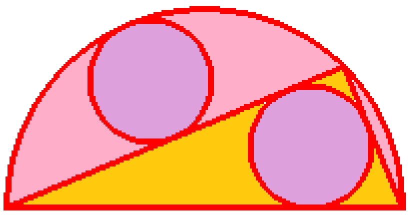
$$\mathrm{E + F + (C + D + F - E) + G = A + 2B + 2C + 2D}$$

$$\mathrm{E + F + F - E + G = A + B + C + B + D}$$

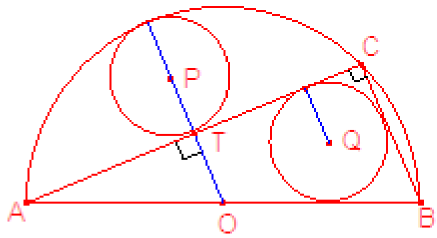
$$\mathrm{E + F + F - E + G = A + B + C + F + G - E}$$

Entonces:

$$\mathrm{E + F = A + B + C}$$



Junio 13: Las dos circunferencias tienen radio 4. Calcular el radio de la semicircunferencia.



Solución: Sea la semicircunferencia de centro O y diámetro $\overline{\mathrm{AB}} = 2\mathrm{R}$. Sea el triángulo rectángulo $\overset{\Delta}{\mathrm{ABC}}, \mathrm{C} = 90°$. Sea la circunferencia de centro P y radio $\overline{\mathrm{PT}} = 4$. T es el punto medio del lado $\overline{\mathrm{AC}}$, $\angle\mathrm{ATO} = 90°$

$$\overline{\mathrm{OT}} = \mathrm{R} - 8$$

Aplicando el teorema de Pitágoras al triángulo rectángulo $\overset{\Delta}{\mathrm{AOT}}$:

$$\overline{\mathrm{AT}} = \sqrt{\mathrm{R}^2 - (\mathrm{R} - 8)^2} = \sqrt{16\mathrm{R} - 64}$$

Los triángulos rectángulos $\overset{\Delta}{\mathrm{AOT}}, \overset{\Delta}{\mathrm{ABC}}$ son semejantes y de razón $1:2$

$$\overline{\mathrm{BC}} = 2\mathrm{R} - 16, \overline{\mathrm{AC}} = 2\sqrt{16\mathrm{R} - 64}$$

El radio de la circunferencia inscrita al triángulo rectángulo $\overset{\Delta}{ABC}$ es:

$$4 = r = \frac{\overline{AC} + \overline{BC} - \overline{AB}}{2} \quad ; \quad 4 = \frac{2\sqrt{16R - 64} + 2R - 16 - 2R}{2}$$

Simplificando:

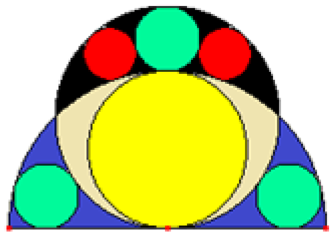
$$12 = \sqrt{16R - 64}$$

Resolviendo la ecuación:

$$R = 13$$

<u>Junio 14-15:</u> En la figura, el radio de la semicircunferencia es R = 1. Calcular el radio de los cuatro tipos de circunferencia.

Jefatura de Fukushima.



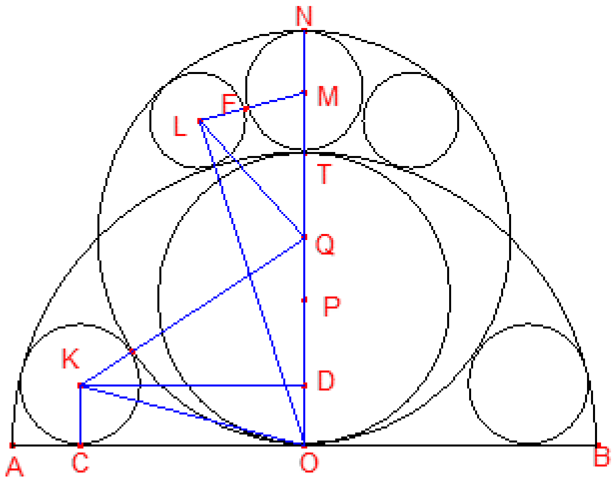
<u>Solución:</u> Sea la semicircunferencia de diámetro $\overline{AB} = 2$ y centro O. Sea la circunferencia de centro P y diámetro $\overline{OT} = 1$. Su radio es $\overline{PO} = \frac{1}{2}$. Sea la circunferencia de centro K y radio $\overline{KC} = r$. Sea la circunferencia de centro Q de diámetro $\overline{ON} = 1 + 2r$

Sea D la proyección de K sobre $\overline{ON}$. Sea $\overline{KD} = a$.

$$\overline{OK} = 1 - r, \overline{QK} = \frac{1}{2} + 2r, \overline{QD} = \frac{1}{2}$$

Aplicando el teorema de Pitágoras a los triángulos rectángulos $\overset{\Delta}{OCK}, \overset{\Delta}{KDQ}$:

$$a^2 = (1 - r)^2 - r^2 \; ; \; a^2 = \left(\tfrac{1}{2} + 2r\right)^2 - \left(\tfrac{1}{2}\right)^2$$



Igualando las expresiones:

$$(1 - r)^2 - r^2 = \left(\frac{1}{2} + 2r\right)^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2$$

Simplificando y resolviendo la ecuación:

$$4r^2 + 4r - 1 = 0, \qquad r = \frac{-1 + \sqrt{2}}{2}$$

El radio de la circunferencia de diámetro $\overline{ON}$ es: $\overline{QO} = \frac{\sqrt{2}}{2}$. Sea la circunferencia de centro L y radio $\overline{LF} = s$

Sea la circunferencia de centro M y radio $\overline{MF} = \overline{MT} = r$.

$$\overline{OL} = 1 + s, \overline{LM} = r + s, \overline{QL} = \frac{\sqrt{2}}{2} - s, \overline{OM} = 1 + r, \overline{QM} = \frac{1}{2}$$

Sea $\angle LON = \alpha$. Aplicando el teorema del coseno al triángulo $\overset{\Delta}{LON}$:

$$(r+s)^2 = (1+s)^2 + (1+r)^2 - 2(1+s)(1+r)\cos\alpha \; ; \qquad \cos\alpha = \frac{1+r+s-rs}{(1+s)(1+r)}$$

Aplicando el teorema del coseno al triángulo $\overset{\Delta}{LOQ}$:

$$\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - s\right)^2 = (1+s)^2 + \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 - 2(1+s)\frac{\sqrt{2}}{2}\cos\alpha$$

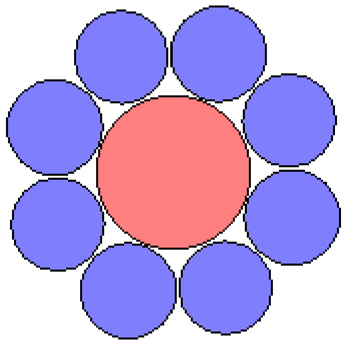
$$\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - s\right)^2 = (1+s)^2 + \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 - 2(1+s)\frac{\sqrt{2}}{2}\frac{1+r+s-rs}{(1+s)(1+r)}$$

$$\sqrt{2}s = 1 + 2s - \frac{\frac{1+\sqrt{2}}{2} + s - \frac{-1+\sqrt{2}}{2}s}{\frac{1+\sqrt{2}}{2}}\sqrt{2}$$

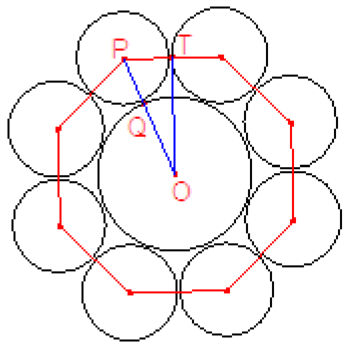
Resolviendo la ecuación:

$$s = \frac{1}{6}$$

Junio 16-17: Ocho circunferencias son tangentes exteriores dos a dos y todas son tangentes exteriores a otra. Calculáis la proporción entre los dos tipos de circunferencias. Calcular la proporción entre las áreas de la suma de las ocho azules y la roja.



Solución: Sea O el centro de la circunferencia roja de radio $\overline{OQ} = r$. Sea P el centro de una circunferencia azul de radio $\overline{PQ} = s$. Sea T el punto de tangencia dos circunferencias azules. Las ocho circunferencias azules son vértice de un octógono regular.



$$\angle POT = \frac{1}{2}45°$$

Aplicando razones trigonométricas al triángulo rectángulo $\overset{\Delta}{OTP}$

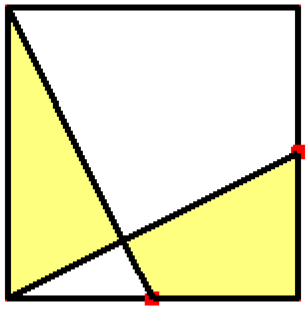
$$\frac{s}{r+s} = \sin\frac{45°}{2} = \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$$

Resolviendo la ecuación, la proporción entre los radios:

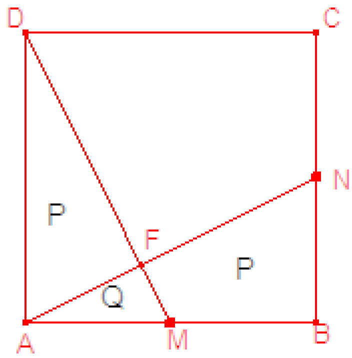
$$\frac{s}{r} = \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2-\sqrt{2-\sqrt{2}}} \approx 0.6199$$

La proporción entre las áreas de la suma de las ocho azules y la roja es:

$$\frac{S_{\text{blava}}}{S_{\text{roja}}} = 8 \cdot \left(\frac{s}{r}\right)^2 = 8\frac{2-\sqrt{2}}{\left(2-\sqrt{2-\sqrt{2}}\right)^2} = 3.0744$$



Junio 18: Los puntos señalados son puntos medios de los lados del cuadrado. Calculad la proporción de las áreas de la región sombreada y el cuadrado.



Solución: Sea el cuadrado ABCD. Sean M,N los puntos medios de los lados $\overline{AB}, \overline{BC}$, respectivamente. Sea F la intersección de $\overline{DM}$, $\overline{AN}$. Sea S el área del cuadrado $ABCD$. Sea P el área del triángulo rectángulo $\overset{\Delta}{AFD}$. Sea Q el área del triángulo rectángulo $\overset{\Delta}{AFM}$.

$$P + Q = \frac{1}{4}S$$

Los triángulos rectángulos $\overset{\Delta}{AFD}, \overset{\Delta}{MFA}$ son semejantes y de razón 2:1.

Sus áreas son proporcionales al cuadrado de la proporción de los lados:

$$P = 4 \cdot Q$$

Entonces:

$$Q = \frac{1}{20}S, P = \frac{1}{5}S$$

Con la región sombreada tenemos:

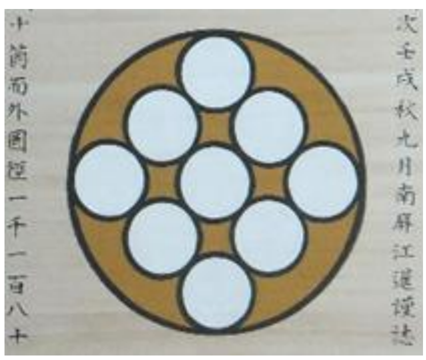
$$S_{\text{sombreada}} = 2P = 2 \cdot \frac{1}{5}S = \frac{2}{5}S$$

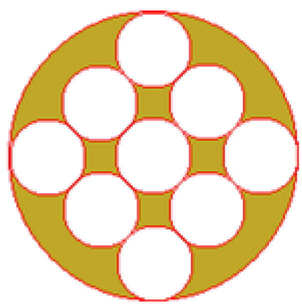
La proporción entre las áreas de la zona sombreada y el cuadrado es:

$$\frac{S_{\text{sombreada}}}{S} = \frac{2}{5}$$

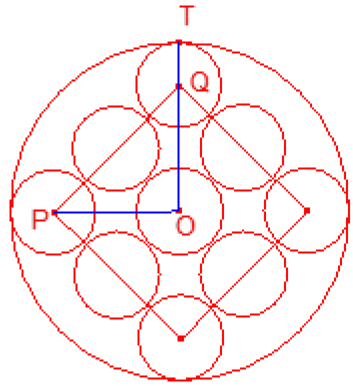
Junio 20-21: Nueve circunferencias tangentes dos a dos están en el interior de otra circunferencia. Calcular la proporción entre las áreas de la suma de las nueve circunferencias y la circunferencia exterior.

Jefatura Shisouka.





Solución: Sea la circunferencia exterior de centro O y radio $\overline{OT} = R$. Sea la circunferencia de centro Q y radio $\overline{QT} = r$. Sea P el centro de la circunferencia y radio r.



$$\overline{PQ} = 4r$$

Aplicando el teorema de Pitágoras al triángulo rectángulo $\overset{\Delta}{POQ}$:

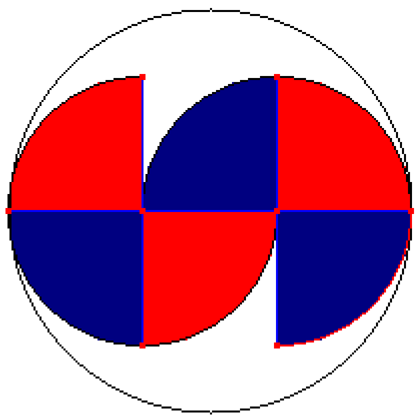
$$\overline{OQ} = 2r\sqrt{2}$$

Entonces:

$$R = \left(1 + 2\sqrt{2}\right)r$$

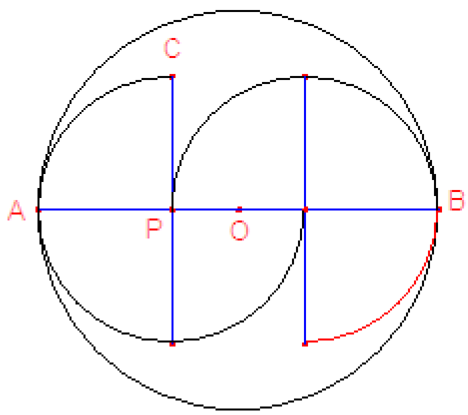
La proporción de las áreas de las nueve circunferencias y la circunferencia exterior es.

$$\frac{9 \cdot S_Q}{S_O} = 9\left(\frac{r}{R}\right)^2 = 9\frac{1}{\left(1 + 2\sqrt{2}\right)^2} = \frac{9\left(9 - 4\sqrt{2}\right)}{49} \approx 0.6140$$



Junio 22: Calcular la proporción entre el área de la zona sombreada y el área del círculo exterior.

Solución: Sea P el centro del cuadrado de circunferencia. Sea $\overline{PA} = r$ el radio del cuadrante de circunferencia. Sea $\overline{AB} = 3r$ diámetro de la circunferencia exterior de centro O. El radio de la circunferencia exterior es:

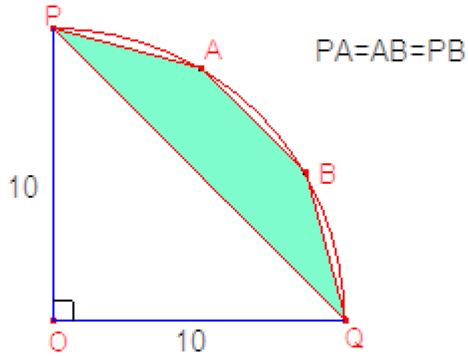


$$\overline{OA} = \frac{3}{2}r$$

La proporción de áreas es:

$$\frac{S_{sombreada}}{S_{total}} = \frac{\frac{3}{2} \cdot r^2}{R^2} = \frac{\frac{3}{2} \cdot r^2}{\left(\frac{3}{2}r\right)^2} = \frac{2}{3}$$

<u>Junio 23:</u> Sea el cuadrante de centro O y radio $\overline{OP} = \overline{OQ} = 10$. Sean A y B los puntos del arco tales que $\overline{PA} = \overline{AB} = \overline{PB}$. Calcular el área del cuadrilátero PABQ.



<u>Solución:</u>

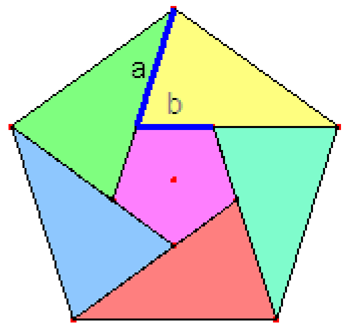
$$\angle POA = \angle AOB = \angle BOQ = 30°$$

El área del cuadrilátero PABQ es:

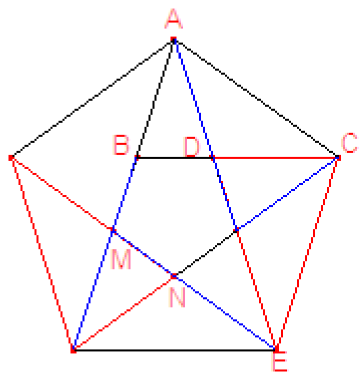
$$\begin{aligned} S_{PABQ} &= 3 \cdot S_{POA} - S_{OPQ} \\ &= 3 \cdot \frac{1}{2} \cdot 10 \cdot 10 \cdot \sin 30° - \frac{1}{2} \cdot 10 \cdot 10 \\ &= 75 - 50 = 25 \end{aligned}$$

<u>Junio 24-25:</u> El pentágono regular de la figura se ha dividido en cinco triángulos y un pentágono regular. ~~Las seis regiones tienen la misma área~~. Calcular.

$$\frac{a}{b}$$



<u>Nota 1:</u> La frase en color rojo y tachada debe de ser eliminada del enunciado, por ser falsa y no aplicarse en la demostración del problema. Ved notas posteriores.



<u>Solución:</u> Sea el triangulo $\overset{\Delta}{ABC}, \overline{AB} = a$. Sea D el lado $\overline{BC}$ tal que $\overline{BD} = b, \overline{BC} = a + b$. A, B y M estan alineados. Entonces, M, N y E están alineados, $\overline{EM} = \overline{BC} = a + b$, $\angle BMN = 108°, \angle ABC = 72°$, $\angle MAE = 36°$

Entonces el triángulo $\overset{\Delta}{ABC}$ es isósceles y áureo.

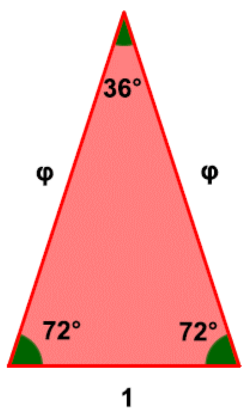
Entonces:

$$\frac{a}{b} = \Phi = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$$

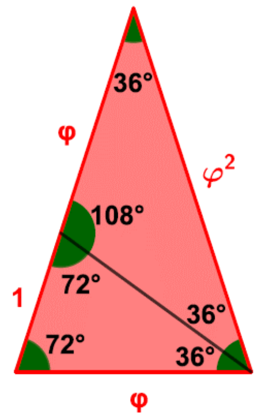
Notemos que las áreas de los dos pentágonos regulares están en proporción $1:5$

<u>Nota 2:</u> Un triángulo 72°-36°-72° se denomina un triángulo áureo. Si en el, el lado desigual mide 1 tenemos que los lados iguales miden:

$$\varphi = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} = \Phi$$



Todo triángulo áureo se descomponen en un triángulo áureo y un gnomon áureo (triángulo 36°-108°-36°). En la figura adjunta está dibujada la descomposición del triángulo áureo de lados $\varphi^2 - \varphi - \varphi^2$ porqué en el queda demostrada una igualdad muy importante, a saber:



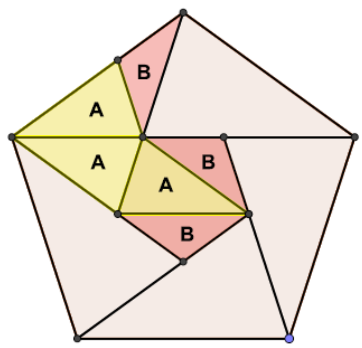
$$1 + \varphi = \varphi^2$$

En el triángulo áureo φ-1-φ, se cumple que:

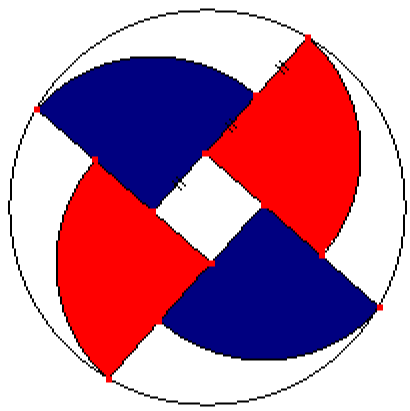
$$\text{Área} = \frac{(1+\varphi)\sqrt{3-\varphi}}{4}\ ;\ \text{Perímetro} = 1 + 2\varphi = \varphi(1+\varphi)$$

$$\cos 36° = \frac{\varphi}{2}$$

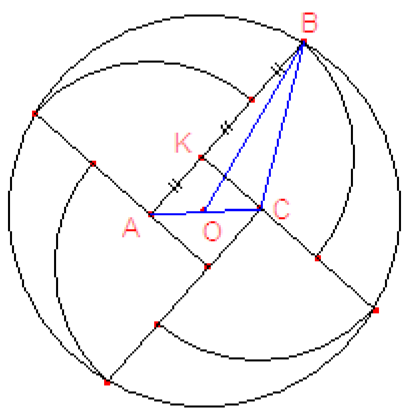
Nota 3: La frase eliminada del enunciado nunca se cumple, puesto que el área del pentágono interior nunca es igual al área de cualquier de los cinco triángulos asociados junto al pentágono inicial: Cada uno de estos triángulos se descompone en dos triángulos áureos de área A y un gnomon áureo, de área B, mientras que el pentágono interior se descompone en un triángulo áureo y dos gnómones áureos. Si los dos polígono tuvieron igual área debería de cumplirse que 2.A + B = A + 2B, que llevaría a que A = B que, obviamente, no se cierta



Junio 27: Calculad la proporción entre el área de la zona sombreada y el área del círculo exterior.



Solución: Sea el cuadrante de centro K y radio $\overline{\text{KB}} = 2\text{a}$. Sean A, C centros de dos cuadrantes. Sea $\overline{\text{AK}} = \text{a}$. El centro O de la circunferencia exterior es el punto medio del segmento $\overline{\text{AC}}$. Sea $\overline{\text{OB}} = \text{R}$ el radio de la circunferencia exterior. Aplicando el teorema de Pitágoras al triángulo rectángulo $\overset{\Delta}{\text{AKC}}$



$$\overline{\text{AC}} = \text{a}\sqrt{2}$$

Aplicando el teorema de Pitágoras al triángulo rectángulo $\overset{\Delta}{\text{BKC}}$

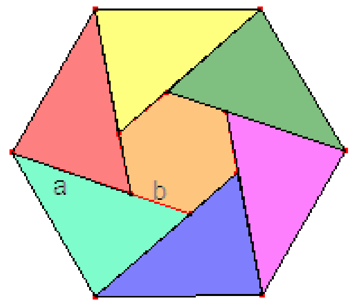
$$\overline{\text{BC}} = \text{a}\sqrt{5}$$

$\overline{\text{OB}}$ es la mediana del triángulo $\overset{\Delta}{\text{ABC}}$, entonces:

$$\text{R}^2 = \frac{2\cdot\left(\text{a}\sqrt{5}\right)^2 - 2\cdot(3\text{a})^2 - \left(\text{a}\sqrt{5}\right)^2}{4}, \qquad \text{R}^2 = \frac{13}{2}\text{a}^2$$

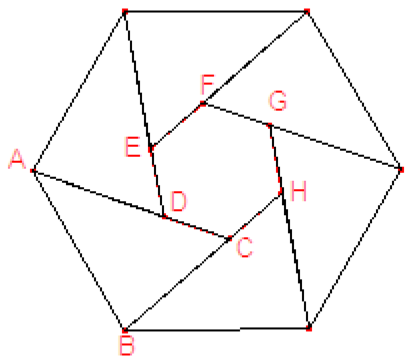
La proporción de áreas es:

$$\frac{S_{sombreada}}{S_{total}} = \frac{(2a)^2}{R^2} = \frac{8}{13}$$



Junio 28-29: Las siete regiones de la figura tienen la misma área. Calcular

$$\frac{a}{b}$$



Solución: Sea $\overline{AD} = \overline{BC} = a, \overline{CD} = b$; $\angle BCA = 60°$. El área del triángulo $\overset{\Delta}{ABC}$ y el área del hexágono regular CDEFGH son iguales.

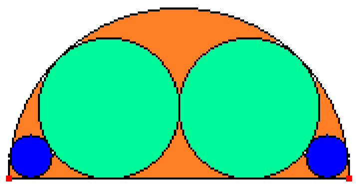
$$\frac{1}{2}(a+b)a\frac{\sqrt{3}}{2} = 6\frac{\sqrt{3}}{4}b^2$$

Simplificando:

$$a^2 + ab - 6b^2 = 0$$

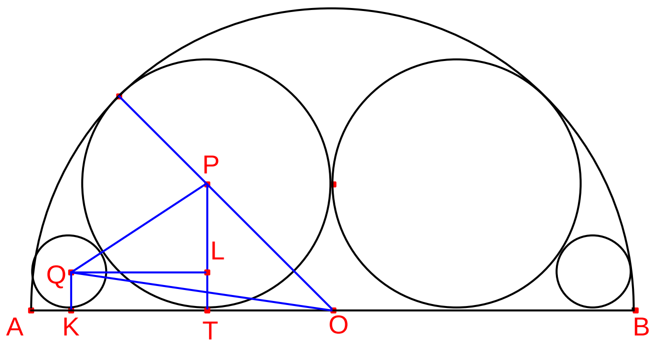
Resolviendo la ecuación:

$$\frac{a}{b} = 2$$



Junio 30: Dado el semicírculo de radio R calcular los radios de las otras circunferencias.

Solución:



Sea el semicírculo de centro O y diámetro $\overline{AB} = 2R$. Sea la circunferencia grande de centro P y radio $\overline{OT} = \overline{OT} = r$.

$$\overline{OP} = R - r = r\sqrt{2}$$

Entonces:

$$r = \left(\sqrt{2} - 1\right)R$$

Sea la circunferencia pequeña de centro Q y radio $\overline{QK} = s$. Sea L la proyección de Q sobre $\overline{PT}$

$$\overline{PQ} = r + s, \overline{PL} = r - s$$

Sea $\overline{QL} = a$. Aplicando el teorema de Pitágoras al triángulo rectángulo $\overset{\Delta}{QLP}$

$$a^2 = 4rs$$

Aplicando el teorema de Pitágoras al triángulo rectángulo $\overset{\Delta}{QKO}$

$$(R - s)^2 = (a + r)^2 + s^2$$

Simplificando:

$$\left(2\sqrt{2} - 1\right)s + \left(1 - \sqrt{2}\right)R + 2\left(\sqrt{2} - 1\right)\sqrt{\left(\sqrt{2} - 1\right)Rs}$$

Resolviendo la ecuación:

$$s = \frac{5\sqrt{2} - 1}{49}R$$