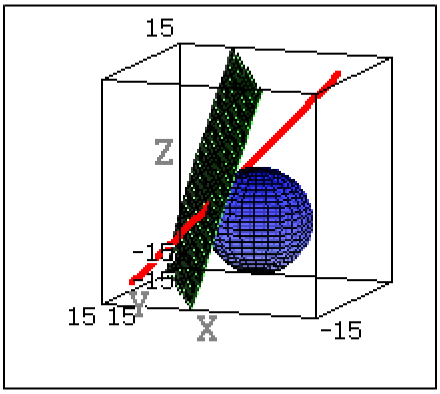
SOLUCIONES JULIO 2022

PROBLEMAS PARA NO PERDER "EL TOQUE". AUTOR: RICARD PEIRÓ i ESTRUCH. IES "Abastos". València



Julio 1-2: Por los puntos intersección de la recta

$$r \equiv \begin{cases} x = -5 + 3t \\ y = -11 + 5t \\ z = 9 - 4t \end{cases}$$

y de la esfera de ecuación:

$$E \equiv (x + 2)^2 + (y - 1)^2 + (z + 5)^2 = 49$$

Se han trazado planos tangentes. Determinar sus ecuaciones

Solución: El centro de la esfera es O (-2, 1, -5) y el radio R = 7. Determinamos los puntos intersección de la recta y la esfera. Un punto cualquiera de la recta

$$r \equiv \begin{cases} x = -5 + 3t \\ y = -11 + 5t \\ z = 9 - 4t \end{cases}$$

es P (5+3t, -11+5t, 9-4t). Sustituimos sus coordenadas en la ecuación de la esfera:

$$(-3 + 3t)^2 + (-12 + 5t)^2 + (14 - 4t)^2 = 49$$

Simplificando:

$$t^2 - 5t + 6 = 0$$

Resolviendo la ecuación: t = 2, 3. Las coordenadas de los puntos intersección son:

$$P_1(1, -1, 1), \quad P_2(4, 4, -3)$$

El vector característico del plano tangente a la esfera en el punto $P_1(1, -1, 1)$ es:

$$\overrightarrow{OP_1} = (3, -2, 6)$$

La ecuación del plano es:

$$\pi_1 \equiv 3(x - 1) - 2(y + 1) + 6(z - 1) = 0$$

Simplificando:

$$\pi_1 \equiv 3x - 2y + 6z - 11 = 0$$

El vector característico del plano tangente a la esfera en el punto $P_2(4, 4, -3)$ es:

$$\overrightarrow{OP_2} = (6, 3, 2)$$

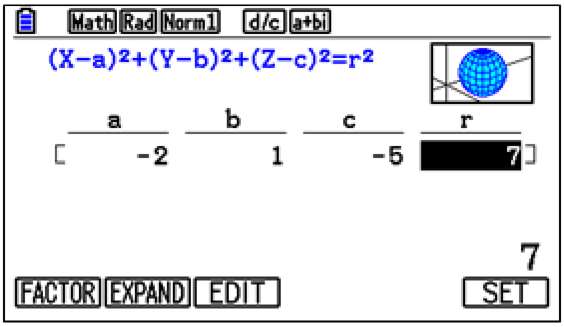
La ecuación del plano es:

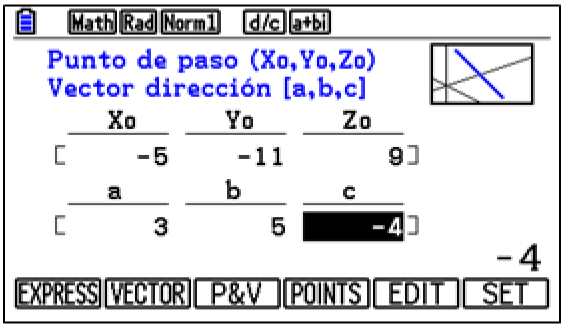
$$\pi_2 \equiv 6(x - 4) + 3(y - 4) + 2(z + 3) = 0$$

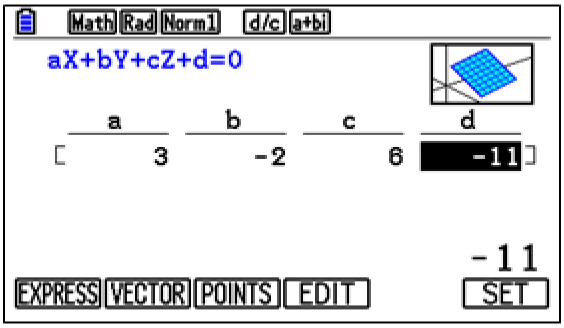
Simplificando:

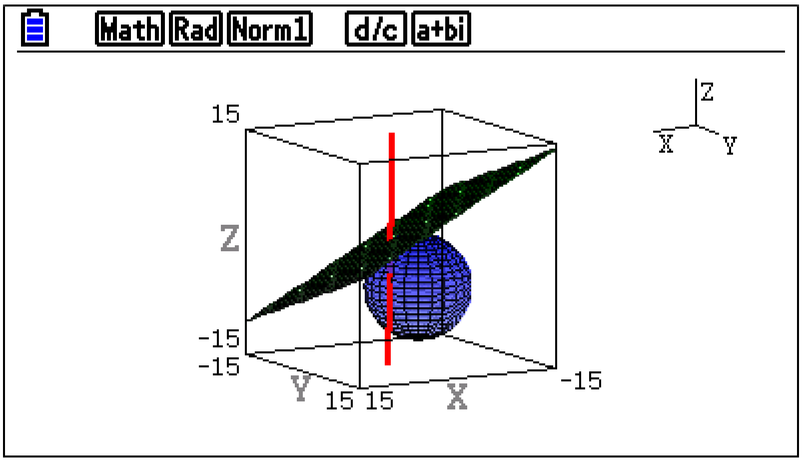
$$\pi_2 \equiv 6x + 3y + 2z - 30 = 0$$

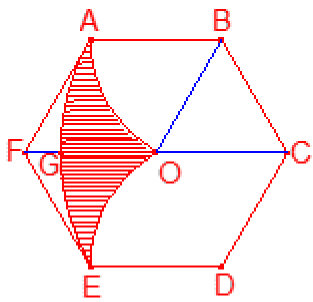
Abrimos el *Menú Gráfico 3D*. Definimos las ecuaciones de la esfera, la recta y el plano $\pi_1 \equiv 3x - 2y + 6z - 11 = 0$





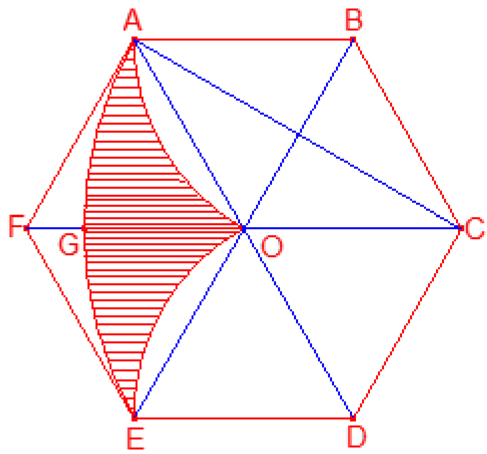






Julio 4-5: Sea ABCDEF el hexágono regular de centro O y lado c. Desde los puntos B y D como centros y con radio c se dibujan dos arcos de circunferencia. Desde el punto C como centro es dibuja el arco $\overset{\frown}{AGE}$.

Determinar el área de la zona sombreada.

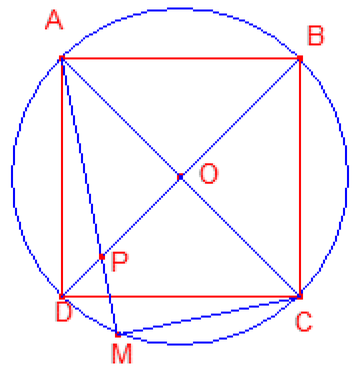


Solución: Tendremos:

$$\overline{AE} = \sqrt{3}c$$

El área de una de las lúnulas grandes es igual al área del sector de 60° y radio $\sqrt{3}c$ menos el área de dos sectores circulares de 60° de radio c:

$$S_{\text{sombreada}} = \frac{1}{6}\pi\left(\sqrt{3}c\right)^2 - 2\left(\frac{1}{6}\pi c^2\right) = \frac{\pi}{6}c^2.$$



Julio 6-13: El cuadrado *ABCD está inscrito en una circunferencia de radio 30. La cuerda $\overline{AM}$ mesura 50 y corta la diagonal $\overline{BD}$ en el punto P. Determinar la medida del segmento $\overline{AP}$.

Solución 1: Aplicando la potencia del punto P respecto de la circunferencia:

$$\overline{AP}\cdot\overline{MP}=\overline{DP}\cdot\overline{BP}.\qquad \overline{AP}\cdot\left(30-\overline{AP}\right)=\overline{DP}\cdot\left(60-\overline{DP}\right).\qquad \overline{AP}\cdot\left(30-\overline{AP}\right)=-\overline{DP}^2+60\overline{DP}\qquad (1)$$

Aplicando el teorema de Pitágoras al triángulo rectángulo $A\overset{\Delta}{B}D$:

$$\overline{AD}=30\sqrt{2}$$

Aplicando el teorema del coseno al triángulo $A\overset{\Delta}{D}P$:

$$\overline{AP}^2=\left(30\sqrt{2}\right)^2+\overline{DP}^2-2\left(30\sqrt{2}\right)\overline{DP}\frac{\sqrt{2}}{2}.\qquad \overline{AP}^2=\left(30\sqrt{2}\right)^2+\overline{DP}^2-60\overline{DP}\qquad (2)$$

Sumando las expresiones (1) y (2):

$$\overline{AP}\cdot\left(30-\overline{AP}\right)+\overline{AP}^2=1800.\qquad 30\overline{AP}=1800.\qquad \overline{AP}=36.$$

Solución 2: Tendremos:

$$\overline{OA}=30,\ \overline{AC}=60.$$

Sea O el centro del cuadrado. Los triángulos rectángulos $A\overset{\Delta}{P}O$, $A\overset{\Delta}{C}M$ son semejantes. Aplicando el teorema de Tales:

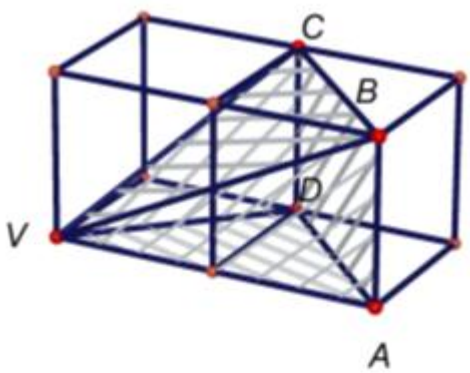
$$\frac{\overline{AP}}{\overline{AC}}=\frac{\overline{OA}}{\overline{AM}}.\qquad \frac{\overline{AP}}{60}=\frac{30}{50}.$$

Resolviendo la ecuación:

$$\overline{AP}=36$$

Julio 7: Sean dos cubos iguales unidos por una cara común (ver figura).

Determinar la proporción entre el volumen de la pirámide ABCDV y la suma de los volúmenes de los dos cubos.



Solución: Sea $\overline{CD}=a$, arista de los dos cubos. La suma de los volúmenes de los dos cubos es:

$$V_{2c} = 2a^3$$

El rectángulo ABCD es la base de la pirámide ABCDV.

$$\overline{VC} = a\sqrt{3}, \overline{CD} = a, \overline{VD} = a\sqrt{2}$$

Aplicando el teorema inverso de Pitágoras, el triángulo $\overset{\Delta}{VDC}$ es rectángulo $\angle VDC = 90°$

$$\overline{VD} = a\sqrt{2}, \overline{AD} = a\sqrt{2}, \overline{VA} = 2a$$

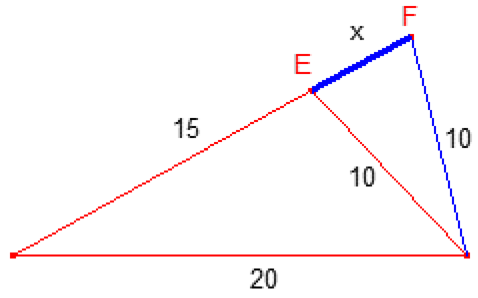
Aplicando el teorema inverso de Pitágoras, el triángulo $\overset{\Delta}{VDA}$ es rectángulo $\angle VDA = 90°$. Entonces, $\overline{VD}$ es perpendicular a la base, altura de la pirámide. El volumen de la pirámide es:

$$V_{ABCDV} = \frac{1}{3}\overline{DA} \cdot \overline{DC} \cdot \overline{VD} = \frac{1}{3}a\sqrt{2} \cdot a \cdot a\sqrt{2} = \frac{2}{3}a^3$$

La proporción entre los volúmenes es:

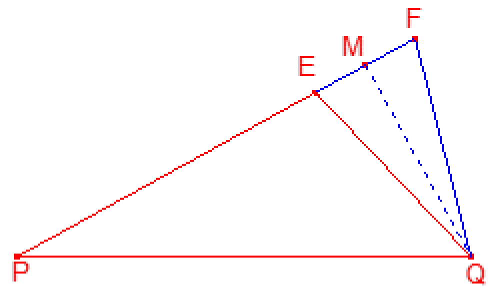
$$\frac{V_{ABCDV}}{V_{2c}} = \frac{\frac{2}{3}a^3}{2a^3} = \frac{1}{3}$$

Julio 8: En la figura, calcular la medida del segmento $\overline{EF}$.



Solución: Sea $\overline{PQ} = 20$, $\overline{PE} = 15$, $\overline{QE} = \overline{QF} = 10$. El triángulo $\overset{\Delta}{QEF}$ es isósceles. Sea M el punto medio del segmento $\overline{EF}$. $\angle EMQ = 90^o$. Sea $\overline{QM} = y$. Aplicando el teorema de Pitágoras al triángulo rectángulo $\overset{\Delta}{PMQ}$:

$$20^2 = y^2 + \left(15 + \frac{x}{2}\right)^2.$$



Aplicando el teorema de Pitágoras al triángulo rectángulo $\overset{\Delta}{EMQ}$:

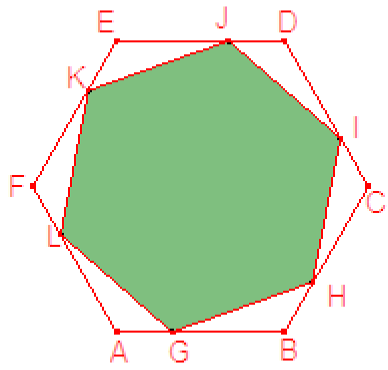
$$10^2 = y^2 + \left(\frac{x}{2}\right)^2.$$

Resolviendo el sistema formado por las dos expresiones:

$$x = 5.$$

Julio 9-16: En un hexágono regular ABCDEF se ha inscrito el hexágono regular GHIJKL tal que $\overline{AG}=\frac{1}{3}\overline{AB}$.

Calcular la proporción entre las áreas de los dos hexágonos.



Solución: Sea $\overline{AB}=c$ lado del hexágono ABCDEF.

$$\overline{AG}=\frac{1}{3}c,\ \overline{AL}=\frac{2}{3}c.$$

$\angle FAG=120^{o}$, ángulo interior del hexágono regular. Aplicando el teorema del coseno al triángulo $\overset{\Delta}{LAG}$:

$$\overline{LG}^2=\left(\frac{1}{3}c\right)^2+\left(\frac{2}{3}c\right)^2-2\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{3}\left(\frac{-1}{2}\right)=\frac{7}{9}c^2.$$

La proporción de las áreas de dos hexágonos regulares es igual al cuadrado de la proporción de los lados.

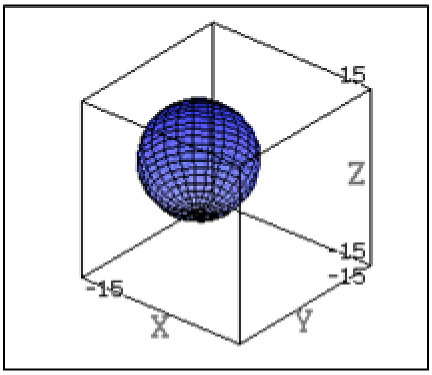
$$\frac{S_{GHIJKL}}{S_{ABCDEF}}=\left(\frac{\overline{LG}}{\overline{AB}}\right)^2=\frac{7}{9}.$$

Generalización: En un hexágono regular ABCDEF se ha inscrito el hexágono regular GHIJKL tal que $\overline{AG}=k\cdot\overline{AB}$. Calcular la proporción entre las áreas de los dos hexágonos.

Solución:

$$\frac{S_{GHIJKL}}{S_{ABCDEF}}=k^2-k+1.$$

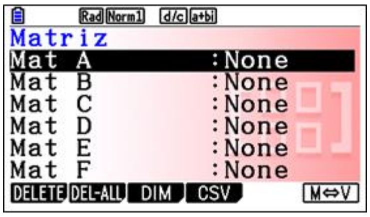
Julio 11: Determinar la ecuación de la esfera que pasa por los puntos $A(1,-2,-1), B(-5,10,-1), C(4,1,11), D(-8,-2,2)$

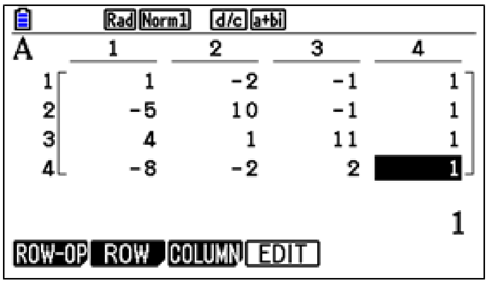


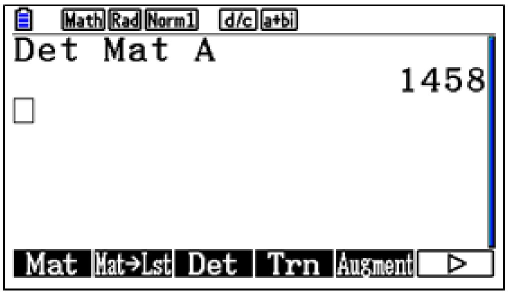
Solución 1: Veamos que los cuatro puntos no son coplanarios. Abrimos el *Menú Ejec-Mate*. Veamos que el determinante de la matriz

$$M=\begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 & 1\\ -5 & 10 & -1 & 1\\ 4 & 1 & 11 & 1\\ -8 & -2 & 2 & 1\end{pmatrix}$$

es distinto de cero.







Calculemos los puntos medios de los segmentos $\overline{\mathrm{AB}}$, $\overline{\mathrm{AC}}$, $\overline{\mathrm{AD}}$

El punto medio del segmento $\overline{\mathrm{AB}}$ es $\mathrm{E}(-2,4,-1)$

El punto medio del segmento $\overline{\mathrm{AC}}$ es $\mathrm{F}\left(\frac{5}{2},\frac{-1}{2},5\right)$

El punto medio del segmento $\overline{\mathrm{AD}}$ es $\mathrm{G}\left(\frac{-7}{2},-2,\frac{1}{2}\right)$

Calculamos las componentes de los vectores $\overrightarrow{\mathrm{AB}},\overrightarrow{\mathrm{AC}},\overrightarrow{\mathrm{AD}}$

$$\overrightarrow{\mathrm{AB}}=(-6,-12,0)$$

$$\overrightarrow{\mathrm{AC}}=(3,3,12)$$

$$\overrightarrow{\mathrm{AD}}=(-9,0,3)$$

El plano mediador del segmento $\overline{\mathrm{AB}}$ tiene ecuación:

$$\Pi_1\equiv(x+2)+2(y-4)=0$$

$$\Pi_1\equiv x+2y=6$$

El plano mediador del segmento $\overline{\mathrm{AC}}$ tiene ecuación:

$$\Pi_2\equiv\left(x-\frac{5}{2}\right)+\left(y+\frac{1}{2}\right)+4(z-5)=0$$

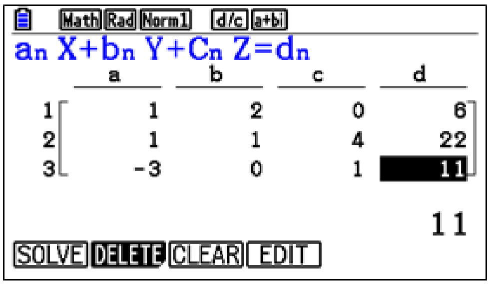
$$\Pi_2\equiv x+y+4z=22$$

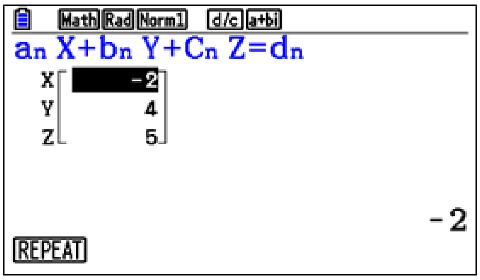
El plano mediador del segmento $\overline{\mathrm{AD}}$ tiene ecuación:

$$\Pi_3\equiv-3\left(x+\frac{7}{2}\right)+\left(z-\frac{1}{2}\right)=0$$

$$\Pi_3\equiv-3x+z=11$$

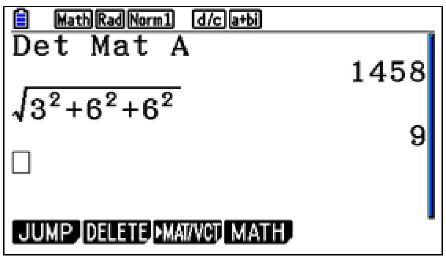
El centro de la esfera es igual al punto intersección de los tres planos. Abrimos el *Menú Ecuación*:





El centro de la esfera es el punto $\mathrm{O}(-2,4,5)$. El radio de la esfera es:

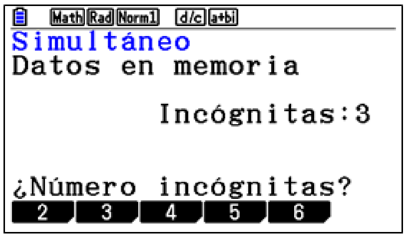
$$r=\overline{\mathrm{OA}}=\sqrt{(1+2)^2+(-2-4)^2+(-1-5)^2}$$

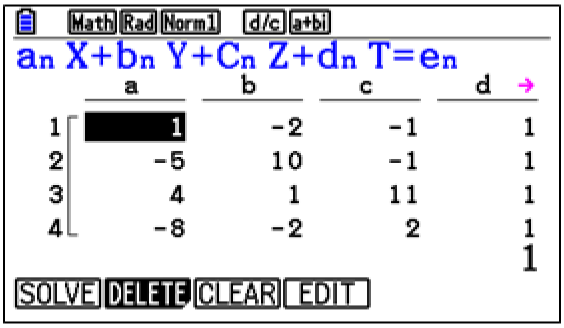


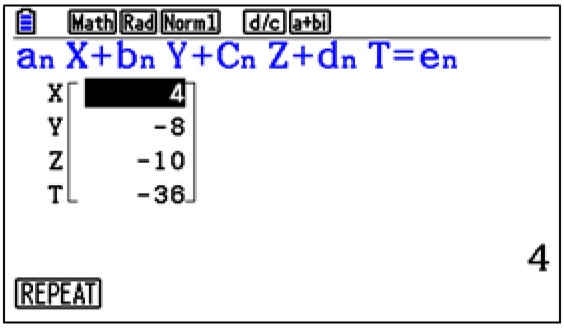
<u>Solución 2:</u> La ecuación general de la esfera es:

$$x^2 + y^2 + z^2 + Ax + By + Cz + D = 0$$

Sustituimos las coordenadas de los cuatro puntos en la ecuación general y resolvemos el sistema formado por las 4 ecuaciones con las incógnitas A, B, C, D. Abrimos el *Menú Ecuación*:







La solución es:

$$\begin{cases} A = 4 \\ B = -8 \\ C = -10 \\ D = -36 \end{cases}$$

La ecuación general de la esfera es:

$$x^2 + y^2 + z^2 + 4x - 8y - 10z + 36 = 0$$

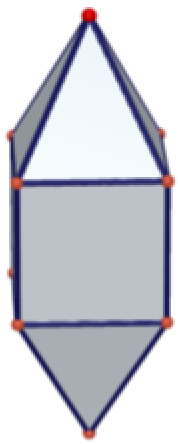
Completando cuadrados:

$$(x+2)^2 + (y-4)^2 + (z-5)^2 = 36 + 2^2 + 4^2 + 5^2; \qquad (x+2)^2 + (y-4)^2 + (z-5)^2 = 9^2$$

El centro de la esfera es el punto $O(-2, 4, 5)$ y el radio $r = 9$

<u>Julio 12:</u> La figura está formada per un cubo de arista a y dos pirámides cuadrangulares regulares de altura a.

Determinar el área y el volumen de la figura.



<u>Solución:</u> El volumen es igual al volumen del cubo de arista a y de dos pirámides de base cuadrada de arista a y altura a.

$$V = a^3 + 2\left(\frac{1}{3}a^2 \cdot a\right) = \frac{5}{3}a^3$$

La apotema x de una cara de las pirámides es la hipotenusa de un triángulo rectángulo de catetos 1/2 a y a. Aplicando el teorema de Pitágoras:

$$x = \frac{\sqrt{5}}{2}a$$

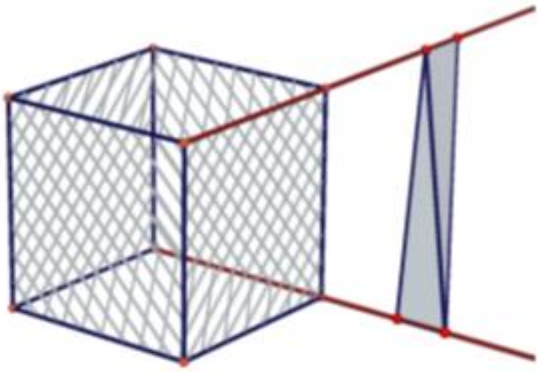
El área de la figura es igual a la suma de 4 cuadrados de lado a y 8 triángulos de base a y altura la apotema $x = \frac{\sqrt{5}}{2}a$.

$$S = 4 \cdot a^2 + 8 \cdot \left(\frac{1}{2}a \cdot \frac{\sqrt{5}}{2}a\right) = \left(4 + 2\sqrt{5}\right)a^2$$

Julio 14-15: Dos aristas que se creen de un cubo se extienden.

En cada extensión se coge un segmento de una unidad.

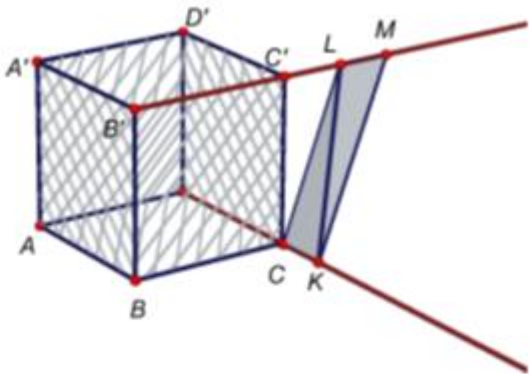
¿Dónde tienen que estar situados los segmentas a fin de que el volumen del tetraedro formado por los 4 extremos del segmento sea máximo?.



Solución: Sea el cubo ABCDA'B'C'D de arista $\overline{AB} = a$ con las siguientes coordenadas cartesianas:

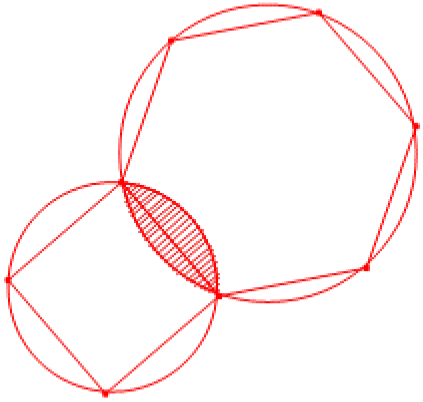
$$A(0,0,0),\ B(0,a,0),\ C(a,a,0),\ D(a,0,0),\ A'(0,0,a),$$
$$B'(0,a,a),\ C'(a,a,a),\ D'(a,0,a)$$

Podemos suponer sin perder generalidad que C es un vértice del tetraedro. Sea $K(a, a+1, 0)$, $L(x, a, a)$, $M(x+1, a, a)$. Calculamos el volumen del tetraedro CKLM:



$$V_{CKLM} = \frac{1}{6}\left|\left[\overrightarrow{CK} \quad \overrightarrow{CL} \quad \overrightarrow{CM}\right]\right|. \quad V_{CKLM} = \frac{1}{6}\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ x-a & 0 & a \\ x+1-a & 0 & a \end{vmatrix} = \frac{a}{6}.$$

El volumen no depende de la posición de los dos segmentos.

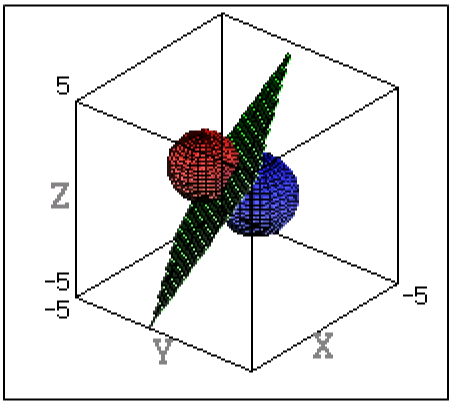


Julio 18-25: Sobre un lado de un hexágono regular de lado c se ha dibujado un cuadrado (ver figura).

Calcular el área de la intersección de las circunferencias circunscritas a los dos polígonos regulares.

Solución: El área es igual a la suma de las áreas de dos segmentos circulares, uno de radio c y ángulo 60° y uno de radio $\frac{\sqrt{2}}{2}c$ y ángulo de 90º.

$$S=\left(\frac{1}{6}\pi c^2-\frac{\sqrt{3}}{4}c^2\right)+\left(\frac{1}{4}\pi\left(\frac{\sqrt{2}}{2}c\right)^2-\frac{1}{4}c^2\right)=\frac{7\pi-6\sqrt{3}-6}{24}c^2.$$



Julio 19-20: Dadas las esferas

$$E_1 \equiv 2x^2+2y^2+2z^2+3x-2y+z-5=0,$$
$$E_2 \equiv x^2+y^2+z^2-x+3y-2z+1=0$$

Determinar la posición relativa de las dos esferas.

Si son secantes, determinar el plano donde se cortan.

Determinar el centro y el radio de la circunferencia intersección de las dos esferas.

Solución: Completando cuadrados:

$$E_1 \equiv \left(x+\frac{3}{4}\right)^2+\left(y-\frac{1}{2}\right)^2+\left(z+\frac{1}{4}\right)^2=\frac{5}{2}+\frac{3}{16}+\frac{1}{4}+\frac{1}{16}=\frac{54}{16}$$

El centro tiene coordenadas, $O_1\left(-\frac{3}{4},\frac{1}{2},-\frac{1}{4}\right)$ y el radio es $R_1=\frac{3}{4}\sqrt{6}$

$$E_2 \equiv \left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\left(y+\frac{3}{2}\right)^2+(z-1)^2=-1+\frac{1}{4}+\frac{9}{4}+1=\frac{10}{4}$$

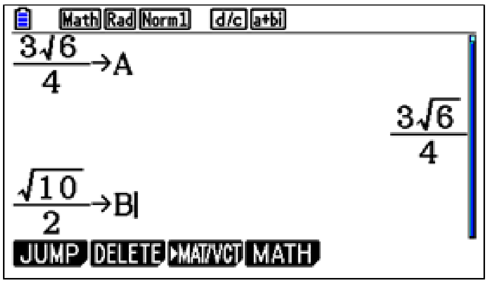
El centro tiene coordenadas, $O_2\left(\frac{1}{2},-\frac{3}{2},1\right)$ y el radio es $R_1=\frac{1}{2}\sqrt{10}$

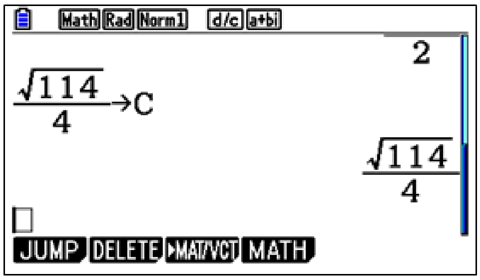
$$\overrightarrow{O_1O_2}=\left(\frac{5}{4},2,\frac{5}{4}\right)$$

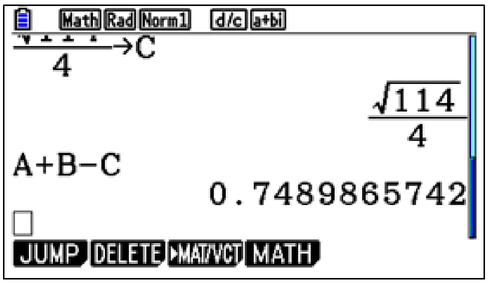
La distancia entre los centros es:

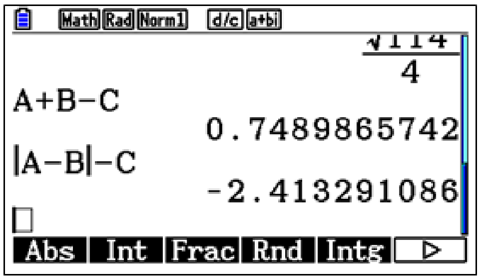
$$\overline{O_1O_2}=\frac{\sqrt{114}}{4}\overline{O_1O_2}=\frac{\sqrt{114}}{4}<R_1+R_2=\frac{3\sqrt{6}+2\sqrt{10}}{4}$$

$$\overline{O_1O_2}=\frac{\sqrt{114}}{4}>|R_1-R_2|=\frac{3\sqrt{6}-2\sqrt{10}}{4}$$







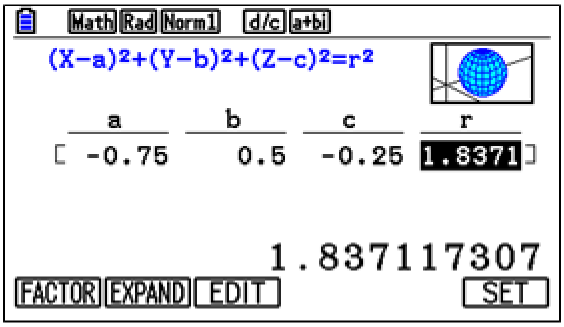


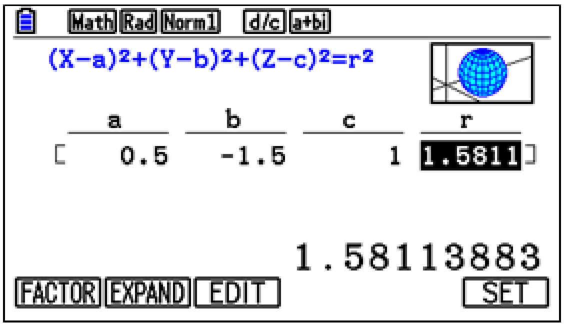
Entonces, las dos esferas son secantes.

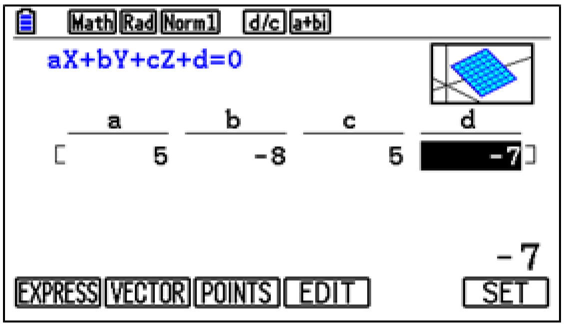
Calculemos $E_1 - 2 \cdot E_2$ que nos da el plano intersección de las dos esferas.

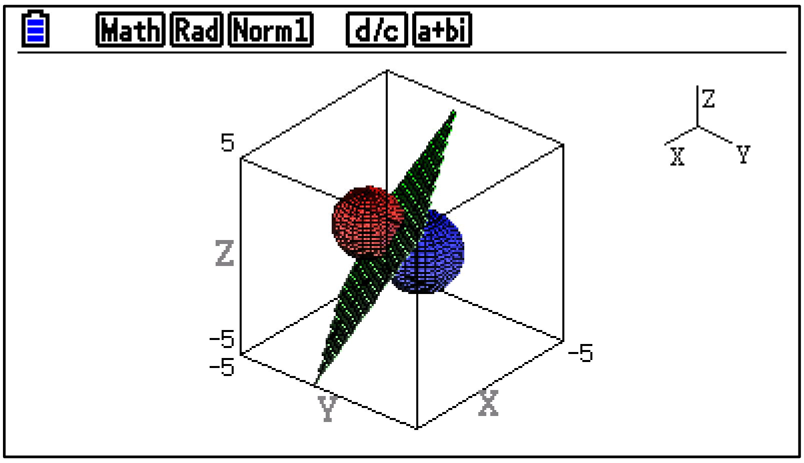
$$E_1 - 2 \cdot E_2 \equiv 5x - 8y + 5z - 7 = 0$$

Abrimos el *Menú Gráfico 3D*. Definimos y representamos las dos esferas y el plano intersección.

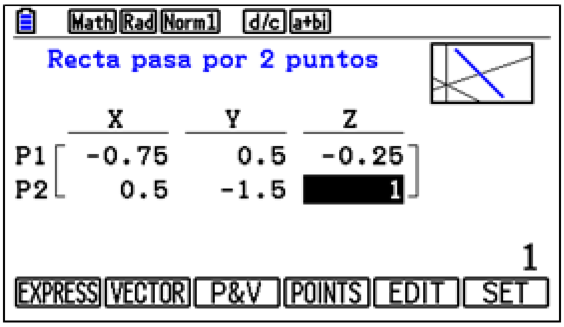


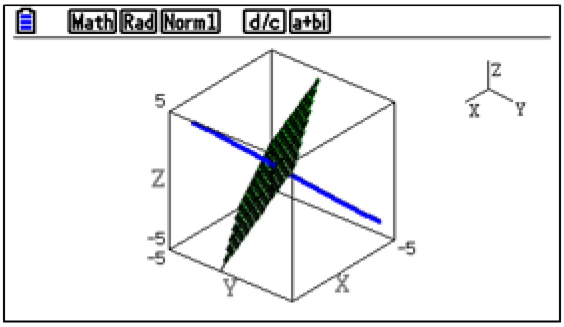




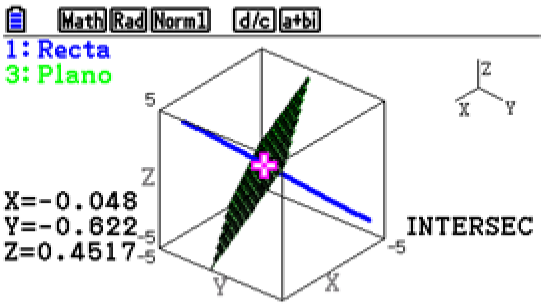


Definimos y representamos la recta que pasa por los centros $O_1\left(-\frac{3}{4}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{4}\right)$, $O_2\left(\frac{1}{2}, -\frac{3}{2}, 1\right)$



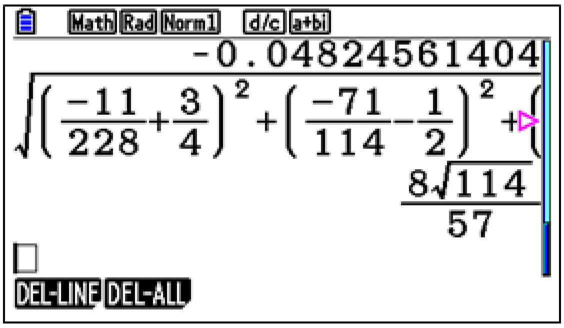


El centro de la circunferencia intersección se calcula efectuando la intersección de la recta y el plano. Con la función *G-Solv*, determinamos la intersección:



El centro de la circunferencia es:

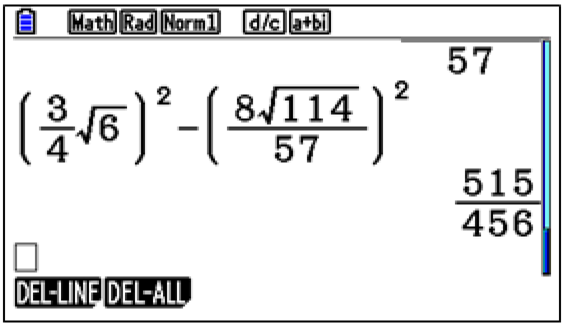
$$O\left(\frac{-11}{228},\frac{-71}{114},\frac{103}{228}\right)$$



Calculemos

$$\overline{O_1O}=\sqrt{\left(\frac{-11}{228}+\frac{3}{4}\right)^2+\left(\frac{-71}{114}+\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{103}{228}+\frac{1}{4}\right)^2}$$

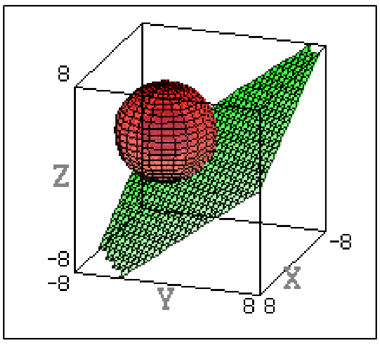
$$=\frac{8\sqrt{114}}{57}$$



Sea R el radio de la circunferencia intersección de las dos esferas. Para calcular el radio R aplicaremos el teorema de Pitágoras al triángulo rectángulo de catetos, R, $\overline{O_1O}=\frac{8\sqrt{114}}{57}$ y hipotenusa $R_1=\frac{3}{4}\sqrt{6}$

$$\left(\frac{3}{4}\sqrt{6}\right)^2=R^2+\left(\frac{8\sqrt{114}}{57}\right)^2\ ;\ R^2=\frac{515}{456}$$

El radio de la circunferencia es $R=\sqrt{\frac{515}{456}}$



<u>Julio 21-28:</u> Sea la esfera

$$\mathbf{x^2+y^2+z^2+6y-4z+9=0}$$

Determinar la ecuación de la esfera concéntrica con ella que es tangente al plano

$$\mathbf{2x-3y+2z+4=0}$$

Solución: Completando cuadrados en la esfera $x^2+y^2+z^2+6y-4z+9=0$

$$x^2+(y+3)^2+(z-2)^2=2^2$$

El centro de la esfera es el punto $O(0,-3,2)$ y el radio $r=2$

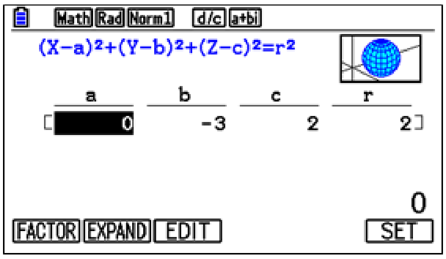
El radio de la esfera concéntrica tangente al plano $\Pi \equiv 2x-3y+2z+4=0$ tiene radio

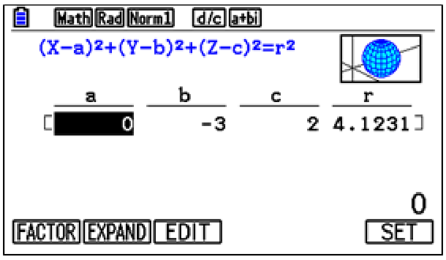
$$R=d(O,\Pi);\quad R=d(O,\Pi)=\left|\frac{2\cdot 0-3\cdot(-3)+2\cdot 2+4}{\sqrt{2^2+(-3)^2+2^2}}\right|=\sqrt{17}$$

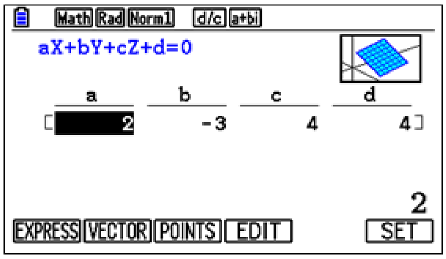
La ecuación de la esfera es:

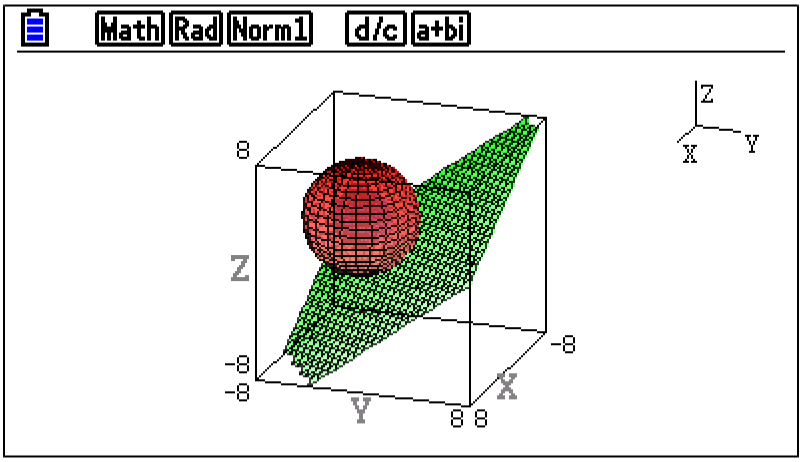
$$x^2+(y+3)^2+(z-2)^2=17$$

Abrimos el *Menú Gráfico 3D*. Definimos y representamos las dos esferas y el plano



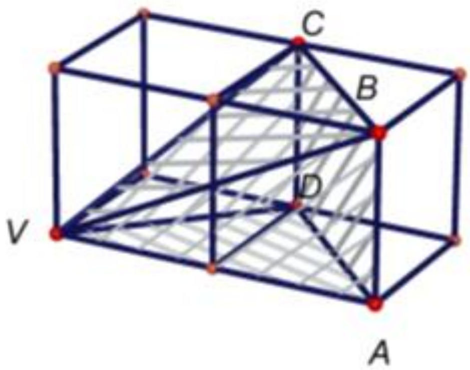






Julio 22: Sean dos cubos iguales unidos por una cara común (ver figura).

Determinar la proporción entre el volumen de la pirámide ABCDV y la suma de los volúmenes de los dos cubos.



Solución: Sea $\overline{CD}=a$, la arista de los dos cubos. La suma de los volúmenes de los dos cubos es:

$$V_{2c}=2a^3$$

El rectángulo ABCD es la base de la pirámide ABCDV.

$$\overline{VC}=a\sqrt{3}, \overline{CD}=a, \overline{VD}=a\sqrt{2}$$

Aplicando el teorema inverso de Pitágoras, el triángulo $\overset{\Delta}{VDC}$ es rectángulo $\angle VDC=90°$

$$\overline{\mathrm{VD}} = \mathrm{a}\sqrt{2}, \qquad \overline{\mathrm{AD}} = \mathrm{a}\sqrt{2}, \qquad \overline{\mathrm{VA}} = 2\mathrm{a}$$

Aplicando el teorema inverso de Pitágoras, el triángulo $\overset{\Delta}{\mathrm{VDA}}$ es rectángulo $\angle\mathrm{VDA} = 90°$. Entonces, $\overline{\mathrm{VD}}$ es perpendicular a la base, y es la altura de la pirámide. El volumen de la pirámide es:

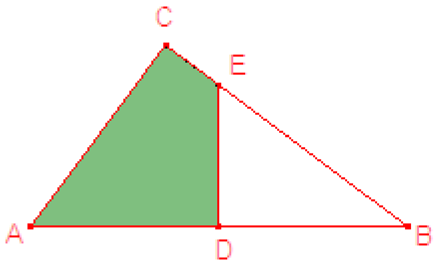
$$\mathrm{V_{ABCDV}} = \frac{1}{3}\overline{\mathrm{DA}} \cdot \overline{\mathrm{DC}} \cdot \overline{\mathrm{VD}} = \frac{1}{3}\mathrm{a}\sqrt{2} \cdot \mathrm{a} \cdot \mathrm{a}\sqrt{2} = \frac{2}{3}\mathrm{a}^3$$

La proporción entre los volúmenes es:

$$\frac{\mathrm{V_{ABCDV}}}{\mathrm{V_{2c}}} = \frac{\frac{2}{3}\mathrm{a}^3}{2\mathrm{a}^3} = \frac{1}{3}$$

Julio 23: En la figura, $\overset{\Delta}{ABC}$ es un triángulo rectángulo $\angle C = 90^o$, $\overline{AD} = \overline{BD}$ y $\overline{DE} \perp \overline{AB}$.

Si $\overline{AC} = 12$ y $AB = 20$, calcular el área del cuadrilátero ADEC.



Solución: Tenemos:

$$\overline{AD} = \overline{BD} = 10.$$

Aplicando el teorema de Pitágoras al triángulo rectángulo $\overset{\Delta}{ABC}$:

$$\overline{BC} = 16.$$

Los triángulos rectángulos $\overset{\Delta}{ABC}$, $\overset{\Delta}{EBD}$ son semejantes. Aplicando el teorema de Tales:

$$\frac{\overline{DE}}{10} = \frac{12}{16}. \text{ Entonces, } \overline{DE} = \frac{15}{2}. \quad \frac{\overline{BE}}{10} = \frac{20}{16}. \text{ Entonces, } \overline{BE} = \frac{25}{2}. \quad \overline{CE} = \overline{BC} - \overline{BE} = 16 - \frac{25}{2} = \frac{7}{2}.$$

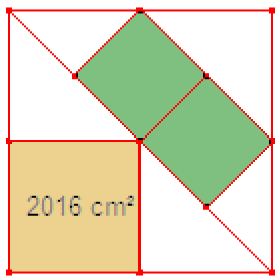
El área del cuadrilátero ADEC es igual a la suma de las áreas de los triángulos rectángulos $\overset{\Delta}{ADE}$ y $\overset{\Delta}{ACE}$:

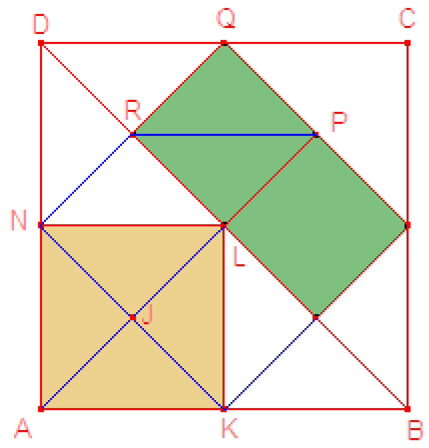
$$S_{ADEC} = \frac{1}{2} \cdot 10 \cdot \frac{15}{2} + \frac{1}{2} \cdot 12 \cdot \frac{7}{2} = \frac{117}{2} = 58.5.$$

Julio 26-27: Un cuadrado se ha dividido en dos por la diagonal.

En la parte inferior se ha inscrito un cuadrado de área $2016\ \mathrm{cm}^2$ y en la parte superior se ha inscrito dos cuadrados pequeños idénticos.

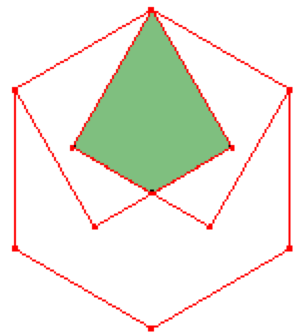
¿Cuál es el área de cada uno de los dos cuadrados pequeños?.





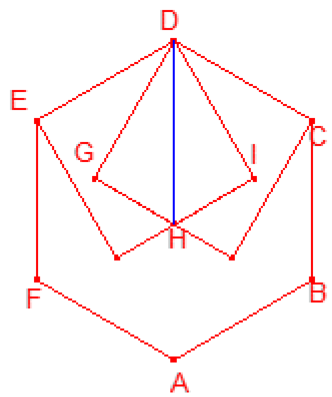
Solución:

$$S_{LPQR} = \frac{1}{2} S_{AKLN} = 1008\ \text{cm}^2 .$$



Julio 29-30: En dos lados consecutivos de un hexágono regular se ha dibujado, hacia el interior del hexágono, dos cuadrados.

Determinar la proporción entre el área de la intersección de los dos cuadrados y el área del hexágono regular.



Solución: Sea ABCDEF el hexágono regular de lado 1.

$$\overline{DG} = \overline{AB} = 1$$

Sea DGHI la intersección de los dos cuadrados.

$\angle EDG = \angle EDC - \angle GDC = 120^o - 90^o = 30^o$. $\angle GDI = \angle EDC - 2\angle EDG = 60^o$.

$$\angle GDH = \frac{1}{2}\angle GDI = 30^o .\quad \overline{GH} = \frac{\sqrt{3}}{3}\overline{DG} = \frac{\sqrt{3}}{3} .$$

El área de la intersección de los dos cuadrados es:

$$S_{DGHI} = \overline{GH} \cdot \overline{DG} = \frac{\sqrt{3}}{3} .$$

El área del hexágono regular es:

$$S_{ABCDEF} = 6\left(\frac{\sqrt{3}}{4}1^2\right) = \frac{3\sqrt{3}}{2} .$$

La proporción entre las dos áreas es:

$$\frac{S_{DGHI}}{S_{ABCDEF}} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{3}}{\frac{3\sqrt{3}}{2}} = \frac{2}{9} .$$