

SOLUCIONS GENER 2022

PROBLEMES PER A BATXILLERAT. AUTORS: Col·lectiu “CONCURSO DE PRIMAVERA”

<http://www.concursoprimavera.es/#concurso>.

Gener 1: Quants números menors que 100 són el producte de tres nombres primers?

Solució: El major factor (que siga nombre primer) que pot tindre qualsevol dels números buscats és el 23, perquè el menor número producte de tres factors primers amb factor major que 23 és: $2 \cdot 2 \cdot 29 = 116$. Així doncs, cal veure quants números menors que 100 són productes de tres factors de la llista: 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23. La millor manera d'obtindre'ls és anar escrivint, ordenadament, tres factors de manera que cada factor siga major o igual que el factor que està a la seua esquerra:

$2 \cdot 2 \cdot 2$; $2 \cdot 2 \cdot 3$; $2 \cdot 2 \cdot 5$; $2 \cdot 2 \cdot 7$; $2 \cdot 2 \cdot 11$; $2 \cdot 2 \cdot 13$; $2 \cdot 2 \cdot 17$; $2 \cdot 2 \cdot 19$; $2 \cdot 2 \cdot 23$ (9 números)

$2 \cdot 3 \cdot 3$; $2 \cdot 3 \cdot 5$; $2 \cdot 3 \cdot 7$; $2 \cdot 3 \cdot 11$; $2 \cdot 3 \cdot 13$ (5 números)

$2 \cdot 5 \cdot 5$; $2 \cdot 5 \cdot 7$; $2 \cdot 7 \cdot 7$ (3 números)

$3 \cdot 3 \cdot 3$; $3 \cdot 3 \cdot 5$; $3 \cdot 3 \cdot 7$; $3 \cdot 3 \cdot 11$; $3 \cdot 5 \cdot 5$ (5 números)

En total, $(9 + 5 + 3 + 5 =)$ 22 números

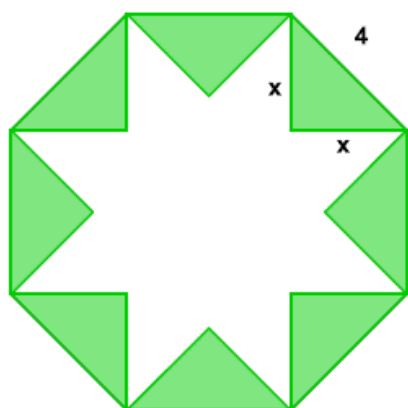
Gener 3: En la figura hi ha un octàgon regular de costat 4 cm. Trobeu l'àrea de l'estrela octogonal.

Solució: Per a calcular l'àrea de l'estrela, a l'àrea de l'octàgon li restarem l'àrea dels huit triangles rectangles isòsceles verds de la il·lustració de l'esquerra. En aplicar Pitàgores, els catets d'aquests triangles mesuren:

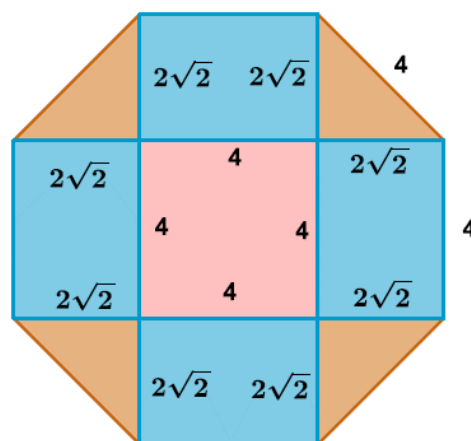
$$2x^2 = 16 \Rightarrow x = 2\sqrt{2}$$

Per tant, a l'àrea de l'octàgon cal restar-li:

$$8 \cdot \frac{2\sqrt{2} \cdot 2\sqrt{2}}{2} = 32$$



Per a trobar l'àrea de l'octàgon, calcularem l'àrea del quadrat roig, l'àrea dels 4 rectangles blaus i l'àrea dels 4 triangles marrons (mirar figura a la dreta). Tindrem:



$$A = 4^2 + 4 \cdot (2\sqrt{2} \cdot 4) + 4 \cdot \frac{2\sqrt{2} \cdot 2\sqrt{2}}{2} - 32 = 32 + 32\sqrt{2} - 32 = 32\sqrt{2}$$

Gener 4: Una bossa conté m boles blanques i n negres. Extraiem una bola a l'atzar i la retornem afegint k boles del mateix color que l'extreta. Traiem una altra bola a l'atzar, quina és la probabilitat que la segona bola extreta siga blanca?

Solució: Considerem els esdeveniments:

B_1 = "la primera bola extreta és blanca"

B_2 = "la segona bola extreta és blanca"

N_1 = "la primera bola extreta és negra"

Aleshores:

$$\begin{aligned} P(B_2) &= P[(B_1 \cap B_2) \cup (N_1 \cap B_2)] = P(B_1 \cap B_2) + P(N_1 \cap B_2) = \frac{m}{m+n} \cdot \frac{m+k}{m+n+k} + \frac{n}{m+n} \cdot \frac{m}{m+n+k} \\ &= \frac{m(m+n+k)}{(m+n) \cdot (m+n+k)} = \frac{m}{m+n} \end{aligned}$$

Gener 5: Quant val la suma de tots els productes de dos naturals diferents agafats de l'1 al n ?

Lema prèvi:

$$\sum_{k=1}^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

Demostració del lema: Partim de que:

$$(k+1)^3 - k^3 = 3k^2 + 3k + 1$$

Donant-li diferents valors a k , tenim:

$$k=1 \Rightarrow 2^3 - 1^3 = 3 \cdot 1^2 + 3 \cdot 1 + 1$$

$$k=2 \Rightarrow 3^3 - 2^3 = 3 \cdot 2^2 + 3 \cdot 2 + 1$$

$$k=3 \Rightarrow 4^3 - 3^3 = 3 \cdot 3^2 + 3 \cdot 3 + 1$$

:

$$k=n \Rightarrow (n+1)^3 - n^3 = 3 \cdot n^2 + 3 \cdot n + 1$$

Sumant membre a membre totes les igualtats, tindrem:

$$(n+1)^3 - 1 = 3 \sum_{k=1}^n k^2 + 3 \sum_{k=1}^n k + n$$

D'on:

$$3 \sum_{k=1}^n k^2 = (n+1)^3 - 1 - \frac{3}{2}n(n+1) - n = \frac{2(n+1)^3 - 3n(n+1) - 2(n+1)}{2} = \frac{(n+1)n(2n+1)}{3}$$

Amb el que arribem a la tesi del lema.

Solució: Tenim:

$$\left(\sum_{k=1}^n k \right)^2 = \sum_{k=1}^n k^2 + 2S$$

On S és la suma de tots els productes de dos naturals diferents presos de l'1 al n . De la igualtat anterior, tenim:

$$\left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2 = \sum_{k=1}^n k^2 + 2S$$

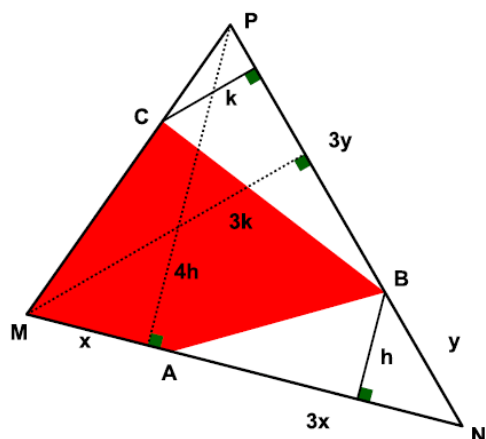
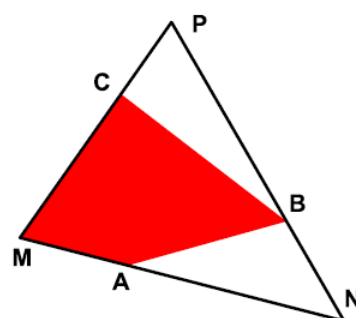
Aplicant el lema:

$$\left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2 = \sum_{k=1}^n k^2 + 2S = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + 2S$$

Per tant:

$$S = \frac{\frac{n^2(n+1)^2}{4} - \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}}{2} = \frac{n(n+1)(n-1)(3n+2)}{24}$$

Gener 6-7: Els punts A , B i C de la figura divideixen a cada costat del triangle $\triangle MNP$ en dos trossos que estan en la relació 1:3. Troba la fracció de l'àrea del triangle $\triangle MNP$ acolorida de roig.



Solució: Tindrem:

$$\left. \begin{aligned} A_{\triangle ABN} &= \frac{3xh}{2} \\ A_{\triangle MNP} &= \frac{4x \cdot 4h}{2} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \frac{A_{\triangle ABN}}{A_{\triangle MNP}} = \frac{3}{16}$$

$$\left. \begin{aligned} A_{\triangle CBP} &= \frac{3yk}{2} \\ A_{\triangle MNP} &= \frac{4y \cdot 4k}{2} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \frac{A_{\triangle CBP}}{A_{\triangle MNP}} = \frac{3}{16}$$

Per tant:

$$\frac{A_{\triangle ABC}}{A_{\triangle MNP}} = 1 - \frac{3}{16} - \frac{3}{16} = \frac{5}{8}$$

Gener 8: Per a què valors de x l'expressió:

$$\frac{\sin^3 x \cdot \cos x}{1 + \tan^2 x}$$

aconsegueix el seu major valor i quin és aquest?

Solució: Tindrem:

$$f(x) = \frac{\sin^3 x \cdot \cos x}{1 + \tan^2 x} = \frac{\sin^3 x \cdot \cos x}{\frac{1}{\cos^2 x}} = \sin^3 x \cdot \cos^3 x = \frac{1}{8} (2 \sin x \cos x)^3 = \frac{1}{8} (\sin 2x)^3$$

Com la funció $i = \sin x$ oscil·la entre -1 i 1 i la funció $i = x^3$ és estrictament creixent, tindrem que el màxim de la funció s'aconsegueix quan:

$$\sin 2x = 1 \text{ i.e. } x = 45^\circ \pm k \cdot 360^\circ$$

i en aquest cas, el màxim de la funció és $1/8$.

Gener 10: Si

$$x^2 + xy + y^2 = 84$$

$$x - \sqrt{xy} + y = 6$$

trobeu $x \cdot y$

Solució: La primera equació pot ser reescrita com:

$$x^2 + 2xy + y^2 = 84 + xy \Rightarrow (x + y)^2 = 84 + xy$$

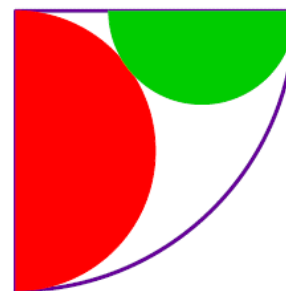
Amb la segona equació, tenim:

$$x + y = 6 + \sqrt{xy} \Rightarrow (x + y)^2 = (6 + \sqrt{xy})^2 = 36 + xy + 12\sqrt{xy}$$

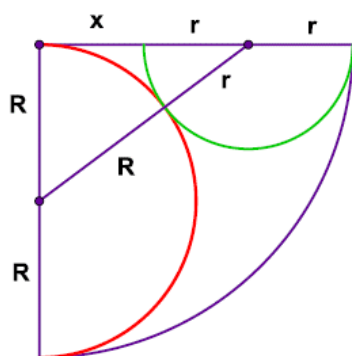
Igualant els segons membres:

$$84 + xy = 36 + xy + 12\sqrt{xy} \Rightarrow 84 - 36 = 12\sqrt{xy} \Rightarrow xy = \left(\frac{48}{12}\right)^2 = 16$$

Gener 11: El dibuix mostra un quadrant de radi s i dues semicircumferències tangents. Trobeu el radi de la semicircumferència xicoteta.



Solució:



Siga R (r) el radi de la semicircumferència gran (xicoteta). Aplicant Pitàgores tindrem:

$$\left. \begin{aligned} R^2 + (x + r)^2 &= (R + r)^2 \\ x + 2r &= 2R = s \end{aligned} \right\}$$

Aïllant x en la segona equació i substituint en la primera:

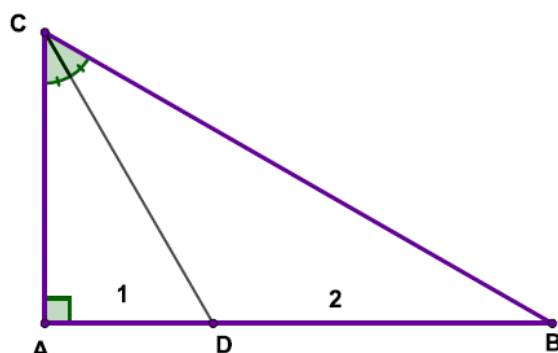
$$R^2 + (2R - 2r + r)^2 = (R + r)^2$$

que porta a:

$$4R(R - r) = 2Rr \Rightarrow r = \frac{2R}{3} = \frac{s}{3}$$

Gener 12: En un triangle rectangle la bisectriu d'un angle agut talla al catet oposat en dos trossos de longitud 1 i 2: Quina és la longitud del segment de bisectriu interior al triangle?

Solució:



:Pel teorema de la bisectriu, tenim:

$$\frac{CA}{AD} = \frac{CB}{DB}$$

Si $a = AC$, tindrem:

$$\frac{a}{1} = \frac{CB}{2} \Rightarrow CB = 2a$$

I aplicant Pitàgores, en $\triangle ABC$:

$$CB^2 = AB^2 + CA^2 \Rightarrow 4a^2 = 9 + a^2 \Rightarrow a = \sqrt{3}$$

I ara en $\triangle CAD$:

$$CD^2 = 1 + a^2 = 1 + 3 = 4 \Rightarrow CD = 2$$

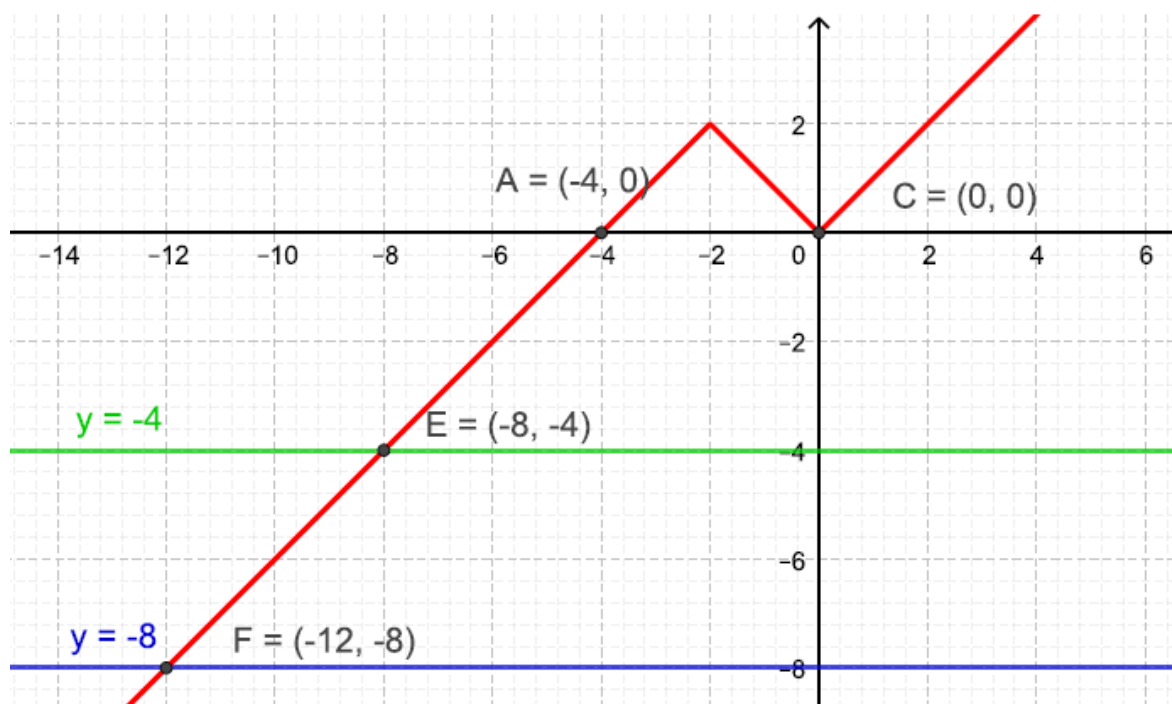
Gener 13: Considerem els naturals amb nou xifres. Quants números hem d'extraure per a assegurar que almenys dos d'ells tenen la mateixa xifra en les desenes de miler?

Solució: La xifra que apareix en les desenes de miler, pot ser qualsevol de les del conjunt $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$. Si diem niu i als números que tenen en les desenes de miler el dígit i tindrem un total de 10 nius. Extraient del conjunt inicial 11 números tindrem que almenys 2 estan en el mateix niu, és a dir, almenys dos tindran la mateixa xifra en les desenes de miler.

Gener 14: Resolga $f(f(f(x))) = 0$, on:

$$f(x) = \begin{cases} x + 4 & \text{sii } x \leq -2 \\ -x & \text{sii } -2 < x < 0 \\ x & \text{sii } x \geq 0 \end{cases}$$

Solució: N'hi ha prou amb tindre la representació gràfica de la funció i analitzar l'equació proporcionada.



Tindrem:

$$f(f(f(x))) = 0 \Rightarrow f(f(x)) = \begin{cases} = 0 & \Rightarrow f(x) = \begin{cases} = 0 & \Rightarrow x = \begin{cases} = 0 \\ = -4 \end{cases} \\ = -4 & \Rightarrow f(x) = -8 \Rightarrow x = -12 \end{cases} \end{cases}$$

Per tant, l'equació té quatre arrels, a saber: $x = 0$, $x = -4$, $x = -8$, $x = -12$.

Gener 15: De la funció $f(x)$ se sap que és periòdica de període 5 i que en $[3, 8[$ verifica:

$$f(x) = x^2 - 10x + 25$$

Trobeu $f(2022)$.

Solució: Vegem a quin interval pertany el valor $x = 2022$.

$$2022 \geq 3 + 5(n - 1) \Rightarrow \frac{2022 - 3}{5} \geq n - 1 \Rightarrow 403,8 \geq n - 1 \Rightarrow n = 404$$

És a dir:

$$3 + 5(404 - 1) = 2018 \leq 2022 \leq 8 + 5(404 - 1) = 2023$$

Com $2022 - 2018 = 4$, tindrem:

$$f(2022) = f(3 + 4) = f(7) = 7^2 - 10 \cdot 7 + 25 = 4$$

Gener 17: Quantes parelles d'enters (x, y) amb $x \leq y$, verifiquen que el seu producte és igual a cinc vegades la seua suma?

Solució: Hi ha que resoldre en $\mathbb{Z}$ l'equació:

$$x \cdot y = 5(x + y) \quad \text{con} \quad x \leq y$$

Tenim:

$$xy - 5y = 5x \Rightarrow y(x - 5) = 5x \Rightarrow y = \frac{5x}{x - 5} = \frac{5x - 25 + 25}{x - 5} = 5 + \frac{25}{x - 5}$$

(ja que $x \neq 5$, perquè si $x = 5 \Rightarrow 5y = 5(5 + y) = 25 + 5y \Rightarrow 0 = 25$). Així doncs, $x - 5$ deu ser un divisor de 25, i. e.:

$$x - 5 \in \{\pm 1, \pm 5, \pm 25\}$$

Analitzem, cas a cas:

$$x - 5 = 1 \Rightarrow x = 6 \Rightarrow y = 5 + \frac{25}{1} = 30 \Rightarrow x = 6; y = 30 \text{ és solució}$$

$$x - 5 = -1 \Rightarrow x = 4 \Rightarrow y = 5 + \frac{25}{-1} = -20 \Rightarrow x = 4; y = -20 \text{ no és solució ja que } x = 4 > y = -20$$

$$x - 5 = 5 \Rightarrow x = 10 \Rightarrow y = 5 + \frac{25}{5} = 10 \Rightarrow x = 10; y = 10 \text{ és solució}$$

$$x - 5 = -5 \Rightarrow x = 0 \Rightarrow y = 5 + \frac{25}{-5} = 0 \Rightarrow x = 0; y = 0 \text{ és solució}$$

$$x - 5 = 25 \Rightarrow x = 30 \Rightarrow y = 5 + \frac{25}{25} = 6 \Rightarrow x = 30; y = 6 \text{ no és solució ja que } x = 30 > y = 6$$

$$x - 5 = -25 \Rightarrow x = -20 \Rightarrow y = 5 + \frac{25}{-25} = 4 \Rightarrow x = -20; y = 4 \text{ és solució}$$

Gener 18: Quin és el residu de la divisió de

$$P(x) = x^{200} - 2x^{199} + x^2 + x + 1$$

entre $D(x) = x^2 - 3x + 2$?

Solució 1: Tindrem, ja que $D(x) = (x-1) \cdot (x-2)$, que existeixen polinomis $q(x)$ i $ax+b$:

$$P(x) = q(x) \cdot (x-1) \cdot (x-2) + ax + b$$

Donant-li a x el valor 1, tenim:

$$P(1) = \begin{cases} = 1^{200} - 2 \cdot 1^{199} + 1^2 + 1 + 1 = 2 \\ = q(1) \cdot (1-1) \cdot (1-2) + a + b \end{cases} \Rightarrow 2 = a + b$$

Donant-li a x el valor 2, tenim:

$$P(2) = \begin{cases} = 2^{200} - 2 \cdot 2^{199} + 2^2 + 2 + 1 = 7 \\ = q(1) \cdot (2-1) \cdot (2-2) + 2a + b \end{cases} \Rightarrow 7 = 2a + b$$

Per últim:

$$\begin{cases} a + b = 2 \\ 2a + b = 7 \end{cases} \Rightarrow a = 5, b = -3 \Rightarrow r(x) = 5x - 3$$

Solució 2: Ja que $D(x) = (x-1) \cdot (x-2)$, per el teorema del residu:

$$P(x) = Q_1(x)(x-1) + P(1) \Rightarrow (x-2)P(x) = Q_1(x)(x-1)(x-2) + P(1)(x-2)$$

$$P(x) = Q_2(x)(x-2) + P(2) \Rightarrow (x-1)P(x) = Q_2(x)(x-1)(x-2) + P(2)(x-1)$$

Restant les dues últimes igualtats:

$$((x-2) - (x-1))P(x) = (-1)P(x) = (Q_1(x) - Q_2(x))(x-1)(x-2) + P(1)(x-2) - P(2)(x-1)$$

D'on:

$$P(x) = (Q_2(x) - Q_1(x))(x-1)(x-2) + P(2)(x-1) - P(1)(x-2)$$

I, per la unicitat de la descomposició de la divisió de polinomis, (ja que $\text{grd}(P(2)(x-1) - P(1)(x-2)) = 1 < 2 = \text{grd}((x-1)(x-2))$), el quocient i el residu de la divisió entre $P(x)$ i $D(x)$ són:

$$C(x) = Q_2(x) - Q_1(x); R(x) = P(2)(x-1) - P(1)(x-2)$$

Per últim, com $P(2) = 7$ i $P(1) = 2$, tenim:

$$R(x) = 7(x-1) - 2(x-2) = 5x - 3$$

Gener 19: Es tenen deu naturals consecutius. La suma de nou d'ells dona 2022. Quin número no hem sumat?

Solució: Siguen els deu naturals consecutius:

$$x-4, \quad x-3, \quad x-2, \quad x-1, \quad x, \quad x+1, \quad x+2, \quad x+3, \quad x+4, \quad x+5$$

Tindrem, si el no sumat és $x-k$ ($k \in \{-5, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4\}$):

$$10x + 5 = 2022 + (x-k) \Rightarrow 9x = 2017 - k \Rightarrow x = \frac{2017-k}{9} = \frac{224 \cdot 9 + 1 - k}{9} = 224 + \frac{1-k}{9}$$

I com x es natural, 9 a de dividir a $1-k$. L'única possibilitat (degut als valors de k) és que $1-k=0$, es a dir que $k=1$. Amb el que $x=224$ i el número no sumat és $(x-1)=223$

Gener 20: Els punts A i B són punts de la gràfica de

$$y = x^2 - 7x - 1$$

Trobeu la longitud del segment AB si (0, 0) és el seu punt mitjà.

Solució: Com A i B són punts de la paràbola tindrem:

$$A(a; a^2 - 7a - 1) \quad B(b; b^2 - 7b - 1)$$

I com (0; 0) es el punt mitjà del segment AB, tindrem:

$$\begin{cases} \frac{a+b}{2} = 0 \\ \frac{a^2 - 7a - 1 + b^2 - 7b - 1}{2} = 0 \end{cases}$$

De la primera equació:

$$b = -a$$

que substituïda en la segona porta a:

$$2a^2 - 2 = 0 \Rightarrow a = \pm 1 \Rightarrow b = \mp 1$$

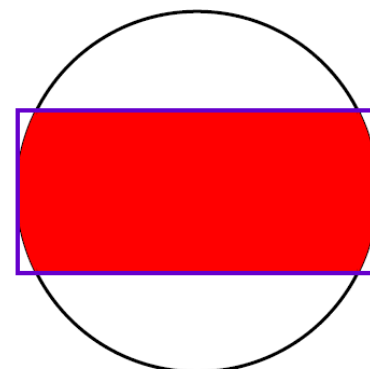
Els punts són:

$$A(1; -7) \text{ y } B(-1; 7) \quad \text{o} \quad A(-1; 7) \text{ y } B(1; -7)$$

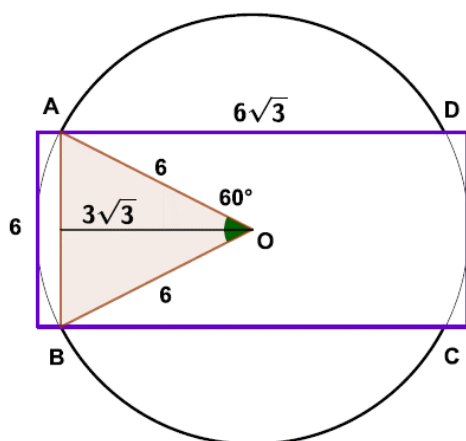
La distancia entre ells és:

$$d(A; B) = \sqrt{(1+1)^2 + (-7-7)^2} = 10\sqrt{2}$$

Gener 21-22: El cercle i el rectangle de la figura tenen el mateix centre. Les dimensions del rectangle són 6x12 i els costats xicotets del rectangle són tangents al cercle, quina és l'àrea de la regió comuna al cercle i al rectangle?



Solució:



El triangle $\triangle AOB$ es equilàter de costat 6, per el que l'angle en O és de 60° i la seua altura és:

$$\sqrt{6^2 - 3^2} = 3\sqrt{3} \Rightarrow AD = 6\sqrt{3}$$

L'àrea de la zona sol·licitada serà, l'àrea de dos sectors circulars d'angle 60° i radi 6 més l'àrea de dos triangles $\triangle AOD$.

L'àrea del sector circular és:

$$\frac{1}{6} \pi 6^2 = 6\pi$$

L'àrea del triangle $\triangle AOD$ és:

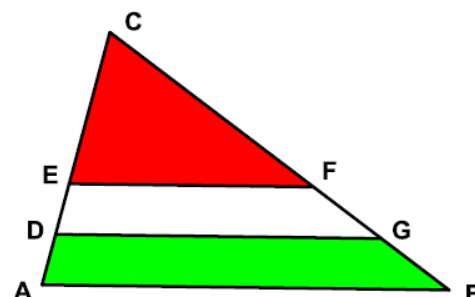
$$\frac{1}{2} \cdot 6\sqrt{3} \cdot 3 = 9\sqrt{3}$$

Així que, l'àrea sol·licitada és:

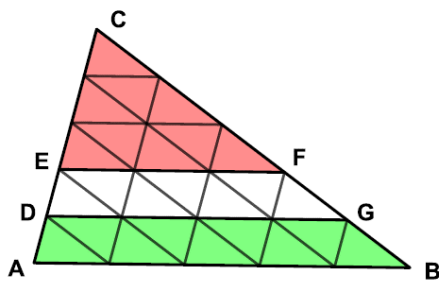
$$2(6\pi + 9\sqrt{3}) = 12\pi + 18\sqrt{3}$$

Gener 24-25-31: En el dibuix $EF \parallel DG \parallel AB$. Les zones ombrejades tenen igual àrea i $CD = 4 \cdot DA$.

Trobeu la raó entre CE i EA



Solució "sense paraules":



$$A_{\triangle ECF} = 9\Delta$$

$$A_{\triangle DGB} = 9\Delta$$

$$\frac{CE}{EA} = \frac{3}{2}$$

Solució 2: Agafem $AD = 1$ aleshores $DC = 4$ i $AC = 5$. Els triangles $\triangle CDG$ i $\triangle CAB$ son semblants (ja que estan en posició de Tales) amb raó de semblança

$$k = \frac{DC}{AC} = \frac{4}{5}$$

Per tant, les seues àrees estaran en proporció:

$$k^2 = \frac{16}{25}$$

Per tant:

$$A_{\triangle CDG} = \frac{16}{25} A_{\triangle ABC}$$

$$A_{\triangle DGB} = \frac{9}{25} A_{\triangle CEF}$$

Els triangles $\triangle CEF$ i $\triangle CAB$ també són semblants i la raó de les seues àrees és $9/25$, per tant la seua raó de semblança és $3/5$. D'ací:

$$\frac{CE}{CA} = \frac{3}{5}$$

y com $CA = 5$, aleshores $CE = 3$ i $EA = 2$, d'on:

$$\frac{CE}{EA} = \frac{3}{2}$$

Gener 26: Resolga en $\mathbb{R}$

$$x^2 + y^2 = |x| + |y|$$

Solució: Les solucions de l'equació seran els punts de la gràfica de l'expressió.Siga $x \geq 0$ i $y \geq 0$. Aleshores:

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 = |x| + |y| &\Rightarrow x^2 - x + y^2 - y = 0 \Rightarrow x^2 - x + \frac{1}{4} + y^2 - y + \frac{1}{4} = \frac{1}{2} \Rightarrow \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 \\ &= \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 \end{aligned}$$

que és una circumferència de centre $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ i radi $r = \frac{1}{\sqrt{2}}$. Naturalment només serveixen els punts d'aquesta circumferència que compleixen $x \geq 0$ i $y \geq 0$.

Siga $x \geq 0$ i $y < 0$. Aleshores:

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 = |x| + |y| &\Rightarrow x^2 - x + y^2 + y = 0 \Rightarrow x^2 - x + \frac{1}{4} + y^2 + y + \frac{1}{4} = \frac{1}{2} \Rightarrow \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(y + \frac{1}{2}\right)^2 \\ &= \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 \end{aligned}$$

que és una circumferència de centre $\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)$ i radi $r = \frac{1}{\sqrt{2}}$. Naturalment només serveixen els punts d'aquesta circumferència que compleixen $x \geq 0$ i $y < 0$.

Siga $x < 0$ i $y \geq 0$. Aleshores:

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 = |x| + |y| &\Rightarrow x^2 + x + y^2 - y = 0 \Rightarrow x^2 + x + \frac{1}{4} + y^2 - y + \frac{1}{4} = \frac{1}{2} \Rightarrow \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 \\ &= \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 \end{aligned}$$

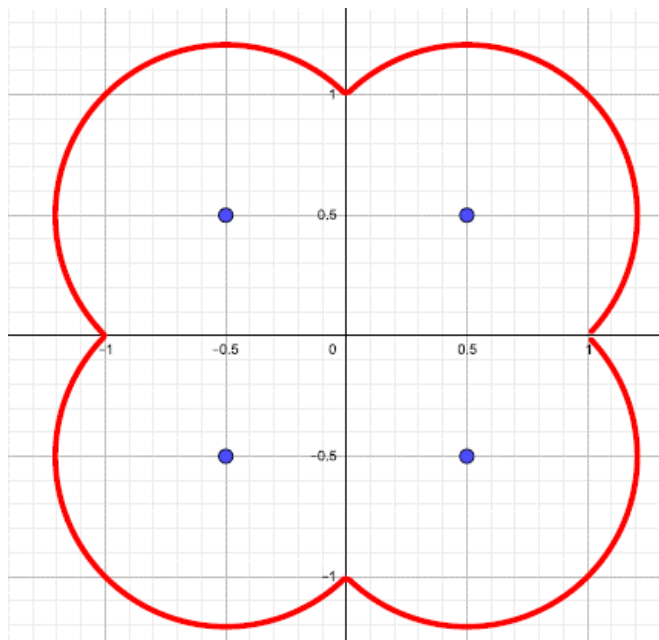
que és una circumferència de centre $\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ i radi $r = \frac{1}{\sqrt{2}}$. Naturalment només serveixen els punts d'aquesta circumferència que compleixen $x < 0$ i $y \geq 0$.

Siga $x < 0$ i $y < 0$. Aleshores:

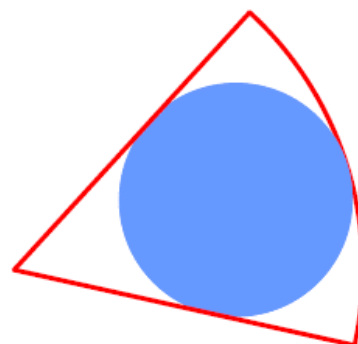
$$\begin{aligned} x^2 + y^2 = |x| + |y| &\Rightarrow x^2 + x + y^2 + y = 0 \Rightarrow x^2 + x + \frac{1}{4} + y^2 + y + \frac{1}{4} = \frac{1}{2} \Rightarrow \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \left(y + \frac{1}{2}\right)^2 \\ &= \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 \end{aligned}$$

que és una circumferència de centre $\left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)$ i radi $r = \frac{1}{\sqrt{2}}$. Naturalment només serveixen els punts d'aquesta circumferència que compleixen $x < 0$ i $y < 0$.

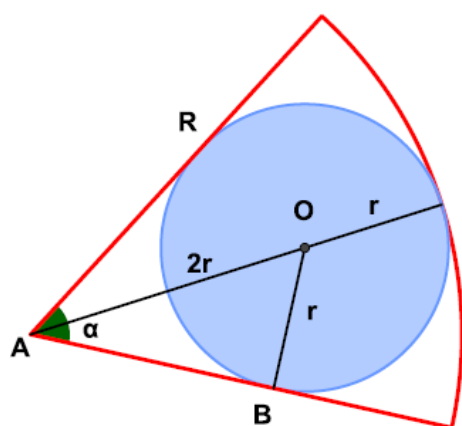
Les solucions de l'equació són els punts de la corba roja:



Gener 27: Si el quocient entre el radi del sector circular i el radi del cercle és tres, quin és el quocient entre les seues àrees?



Solució:



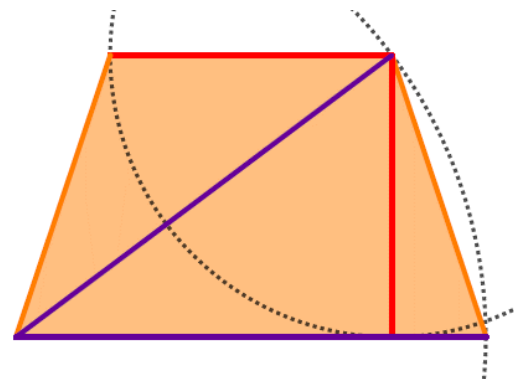
Siga R (r) el radi del sector circular i el radi del cercle. De l'enunciat $R = 3r$. Sigui O el centre del cercle, tindrem en el triangle rectangle $\triangle AOB$:

$$OB = r \Rightarrow AO = 2r \Rightarrow \triangle AOB \text{ es } 30^\circ - 60^\circ - 90^\circ \Rightarrow \alpha = 60^\circ$$

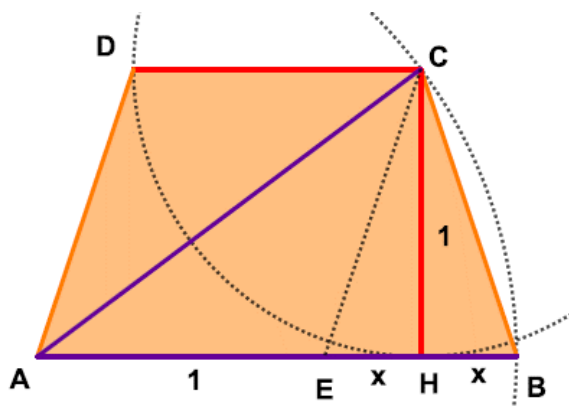
Per tant, si A_R (A_r) és l'àrea del sector circular (cercle) tindrem:

$$\frac{A_R}{A_r} = \frac{\frac{\pi R^2}{6}}{\pi r^2} = \frac{R^2}{6r^2} = \frac{(3r)^2}{6r^2} = \frac{3}{2}$$

Gener 28: Si la base major d'un trapezi isòsceles mesura igual que la diagonal i la base menor mesura igual que l'altura del trapezi, trobeu el quocient entre la longitud de la base menor i la de la base major.



Solució:



Tracem el segment CE, paral·lel al AD. Prenguem l'altura del trapezi com 1. Llavors: AE = 1, AC = AB = 1 + 2x sent x = EH = HB, i aplicant Pitàgores en $\triangle AHC$, rectangle en H:

$$(1 + 2x)^2 = 1^2 + (1 + x)^2 \Rightarrow \begin{cases} x = -1 \text{ sense sentit} \\ x = \frac{1}{3} \end{cases}$$

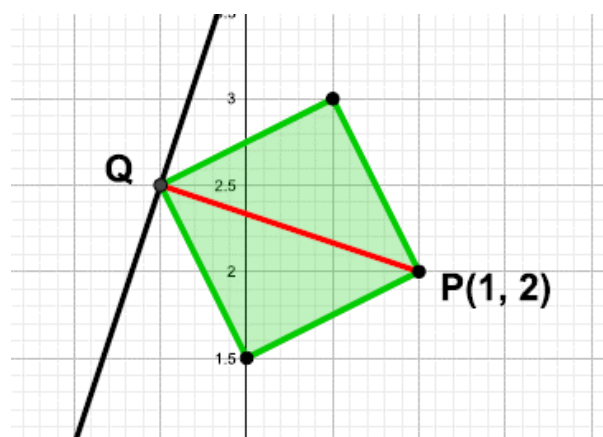
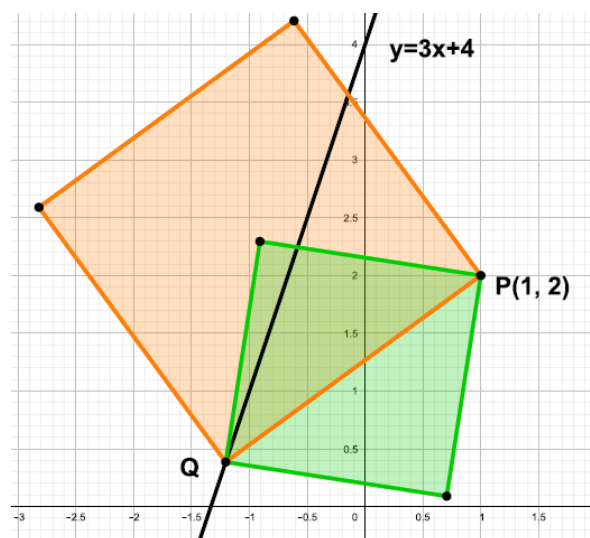
Per tant:

$$AB = 1 + \frac{2}{3}, \quad \frac{AB}{DC} = \frac{\frac{5}{3}}{1} = \frac{5}{3}$$

Gener 29: Un quadrat té un vèrtex en el punt P(1, 2) i un altre en la recta $y = 3x + 4$. Quin és el menor valor possible per a la seua àrea?

Solució: Segons s'observa en la il·lustració de la dreta, l'elecció d'un punt de la recta origina dos quadrats: el de costat PQ (de color taronja) i el de diagonal PQ (de color verd). Com interessa el quadrat de menor àrea, considerarem només el de diagonal PQ.

Busquem, doncs, el punt de la recta $y = 3x + 4$ que aporta la menor diagonal possible. Aquest punt és, òbviament la projecció del punt P sobre la recta $y = 3x + 4$.



El quadrat buscat té un àrea de:

$$A = 2 \cdot \frac{d \cdot \frac{d}{2}}{2} = \frac{d^2}{2} = \frac{10}{8} = \frac{5}{4}$$

on d és la diagonal del quadrat, es a dir:

$$d = d((x_0, y_0); Ax + By + C = 0) = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}} = \frac{|-3 + 2 - 4|}{\sqrt{(-3)^2 + 1^2}} = \frac{\sqrt{10}}{2}$$