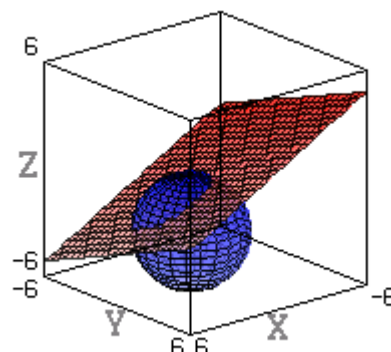


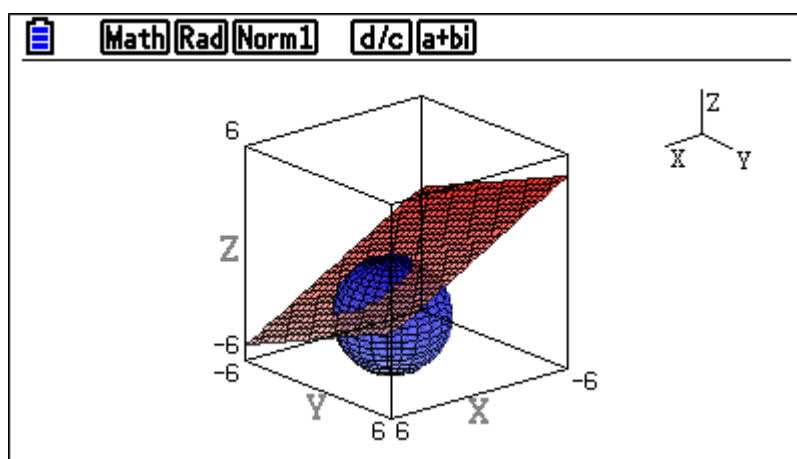
SOLUCIONS ABRIL 2022

PROBLEMES AMB CALCULADORA CASIO fx-CG50. AUTOR: RICARD PEIRÓ I ESTRUCH. IES "Abastos". València

Abril 1-2: Siga l'esfera d'equació $E \equiv x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 6z = 0$. Determineu les coordenades del centre i la mesura del radi. Verifiqueu si el plànel $\Pi \equiv 3x - 2y + 6z + 1 = 0$ i l'esfera són secants. Determineu el radi de la circumferència intersecció de E, Π . Determineu el centre de la circumferència intersecció de E, Π



Solució: Obrim el *Menú Gráfico 3D*. Representem l'esfera i el plànel:



Completant quadrats:

$$E \equiv (x - 1)^2 + y^2 + (z + 3)^2 = (\sqrt{10})^2$$

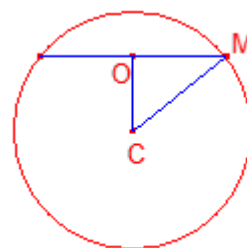
Les coordenades del centre són $C(1, 0, -3)$ i el radi $R = \sqrt{10}$.

Per estudiar la posició relativa del plànel i l'esfera, calculem la distància del centre de l'esfera al plànel.

$$d(C, \Pi) = \left| \frac{3 \cdot 1 - 2 \cdot 0 + 6(-3) + 1}{\sqrt{3^2 + (-2)^2 + 6^2}} \right| = 2$$

$$d(C, \Pi) = 2 < R = \sqrt{10}$$

Aleshores, el plànel i l'esfera són secants.



Considerem la circumferència intersecció de l'esfera i el plànel. Siga O el centre de la circumferència. Siga la secció de l'esfera que passa pel centre C i perpendicular al plànel Siga $r = \overline{OM}$ el radi de la circumferència intersecció.

$$\overline{CO} = 2, \overline{CM} = \sqrt{10}$$

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\triangle COM$

$$r^2 = (\sqrt{10})^2 - 2^2 = 6 \quad r = \sqrt{6}$$

Per calcular el centre de la circumferència intersecció de E, Π , determinem la intersecció de la recta perpendicular a Π que passa pel centre $C(1, 0, -3)$ de l'esfera i el plànel Π

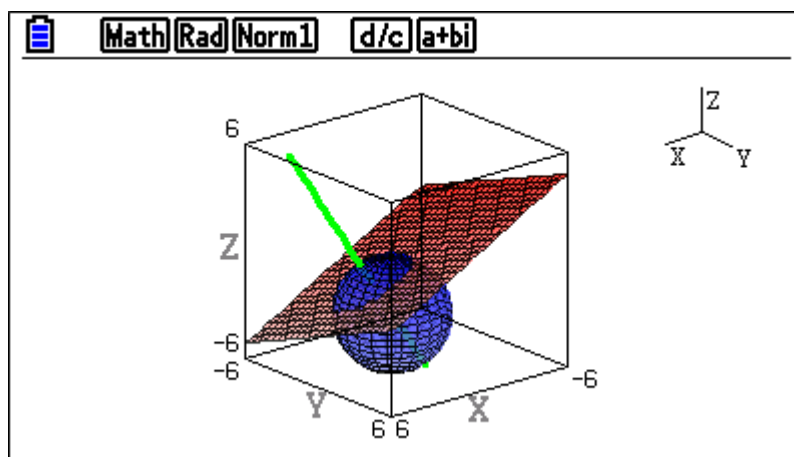
El vector director de la recta perpendicular al plànel que passa per C és el vector característic del plànel $v = (3, -2, 6)$.

La seua equació vectorial és:

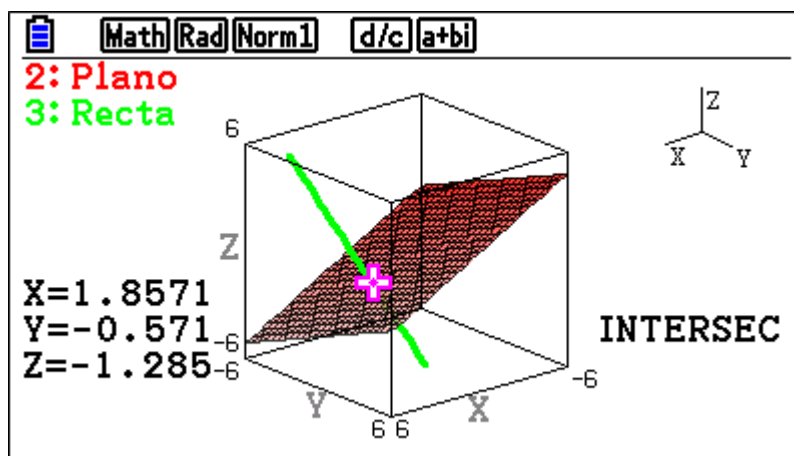
$$r \equiv (x, y, z) = (1, 0, -3) + (3, -2, 6)\alpha$$

Obrim el *Menú Gráfico 3D*.

Dibuixem la recta r :



Amb la funció *G-Solv* determinem la intersecció de la recta r i el plànel Π .



El centre de la circumferència és:

$$P(1.8571, -0.571, -1.285)$$

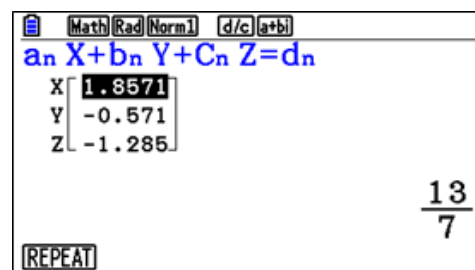
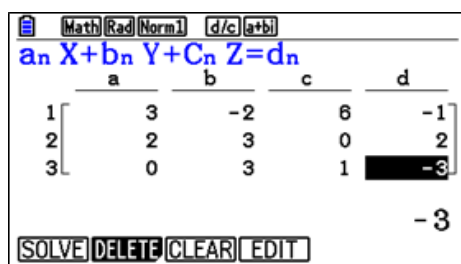
Analíticament, per calcular el punt intersecció resoldrem el sistema format per la recta r i el plànel Π .

$$r \equiv \begin{cases} 2x + 3y = 2 \\ 3y + z = -3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3x - 2y + 6z = -1 \\ 2x + 3y = 2 \\ 3y + z = -3 \end{cases}$$

Obrim el Menú Ecuación:

Resolem el sistema d'equacions lineals format per la recta r i el plànel Π .



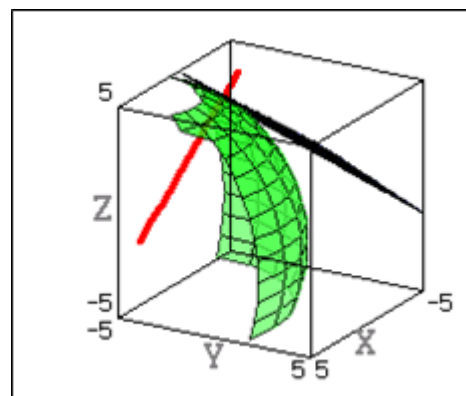
$$\begin{cases} x = \frac{13}{7} \\ y = -\frac{4}{7} \\ z = -\frac{9}{7} \end{cases}$$

Aleshores, el centre de la circumferència és:

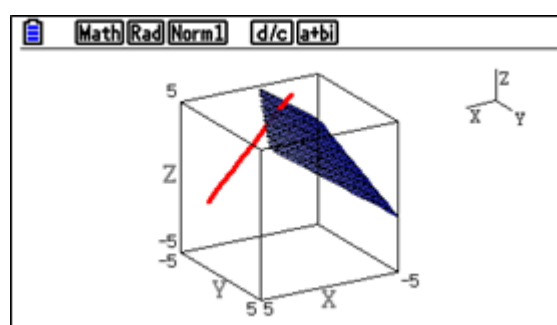
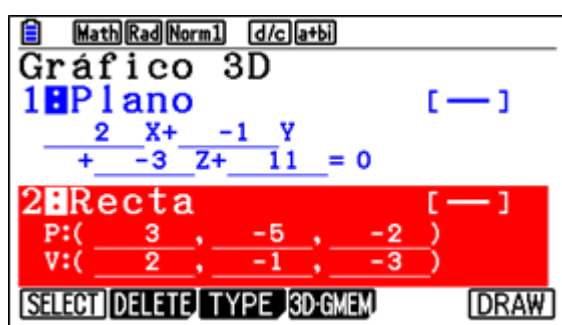
$$P\left(\frac{13}{7}, -\frac{4}{7}, -\frac{9}{7}\right)$$

Abril 4: Determineu l'equació de l'esfera de centre $C(3, -5, -2)$ i tangent al plànel

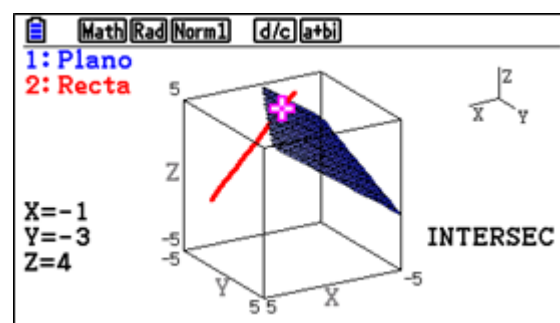
$$2x - y - 3z + 11 = 0$$



Solució: Obrim el *Menú Gráfico 3D*. Definim el plànel i la recta que passa pel punt $C(3, -5, -2)$ i té vector director el característic del plànel $a = (2, -1, -3)$. Recta perpendicular al plànel. La intersecció de la recta i el plànel ens dóna el punt de tangència de l'esfera i el plànel.



Amb la funció *G-Solv*, determinem la intersecció de la recta i el plànel.



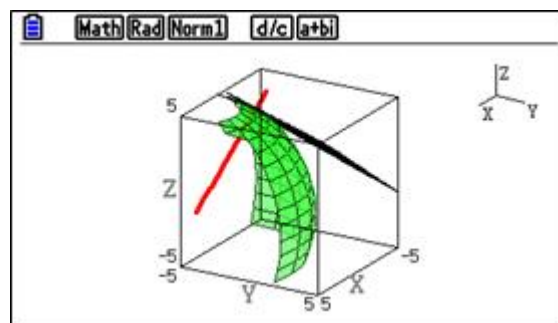
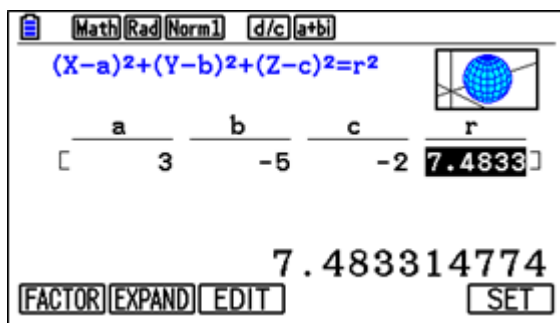
El punt de tangència és $T(-1, 3, 4)$. El radi de l'esfera és la distància entre el centre i el punt de tangència:

$$r = \sqrt{(-4)^2 + 2^2 + 6^2} = 2\sqrt{14}$$

L'equació de l'esfera és:

$$E \equiv (x - 3)^2 + (y + 5)^2 + (z + 2)^2 = (2\sqrt{14})^2$$

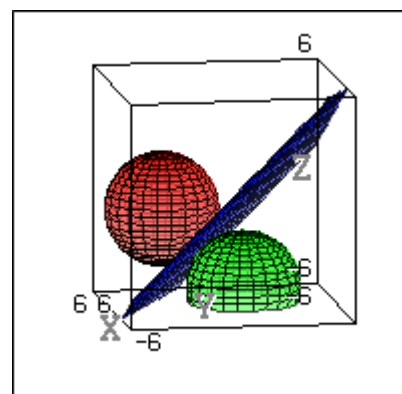
Definim l'equació de l'esfera i la representem gràficament.



Abril 5: Determineu l'equació de l'esfera de radi $r = 3$, que és tangent al plànel

$$x + 2y + 2z + 3 = 0$$

en el punt $A(1, 1, -3)$



Solució: El centre de l'esfera pertany a la recta perpendicular al plànel en el punt $A(1, 1, -3)$. La recta té per vector director el característic del plànel, $a = (1, 2, 2)$. La seua equació paramètrica és:

$$r \equiv \begin{cases} x = 1 + \alpha \\ y = 1 + 2\alpha \\ z = -3 + 2\alpha \end{cases}$$

Un punt qualsevol de la recta r és:

$$P(1 + \alpha, 1 + 2\alpha, -3 + 2\alpha) \quad \overrightarrow{AP} = (\alpha, 2\alpha, 2\alpha)$$

El radi de l'esfera és:

$$r = \|\overrightarrow{AP}\| = 3 \quad \sqrt{\alpha^2 + 4\alpha^2 + 4\alpha^2} = 3$$

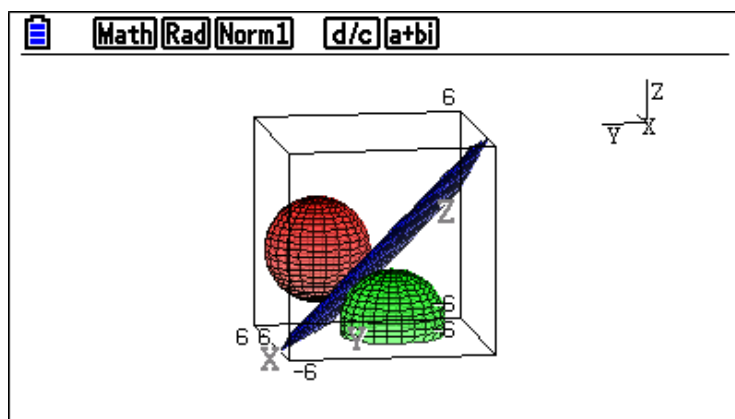
Resolent l'equació: $\alpha = 1, -1$. El problema de dues solucions.

Si $\alpha = 1$. L'esfera de centre $O_1(2, 3, -1)$. La seua equació és:

$$C_1 \equiv (x - 2)^2 + (y - 3)^2 + (z + 1)^2 = 3^2$$

Si $\alpha = -1$. L'esfera de centre $O_1(0, -1, -5)$. La seua equació és:

$$C_2 \equiv x^2 + (y + 1)^2 + (z + 5)^2 = 3^2$$



Obrim el Menú Gráfico 3D. Definim el plànel
 $x + 2y + 2z + 3 = 0$ i les esferes

$$C_1 \equiv (x - 2)^2 + (y - 3)^2 + (z + 1)^2 = 3^2$$

$$C_2 \equiv x^2 + (y + 1)^2 + (z + 5)^2 = 3^2$$

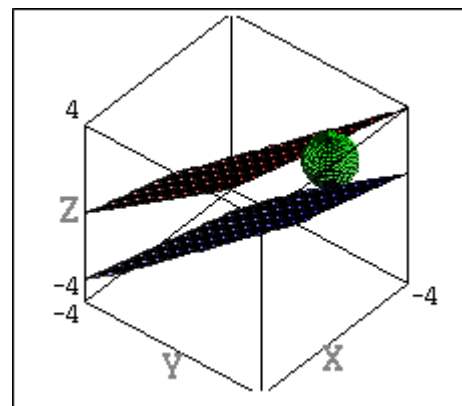
Abril 6-13: Una esfera té el centre en la recta

$$r \equiv \begin{cases} 2x + 4y - z - 7 = 0 \\ 4x + 5y + z - 14 = 0 \end{cases}$$

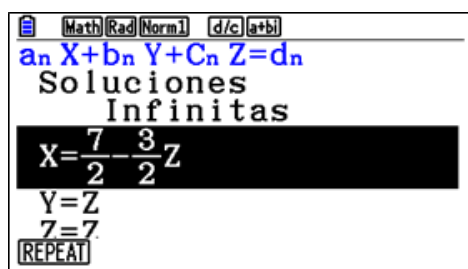
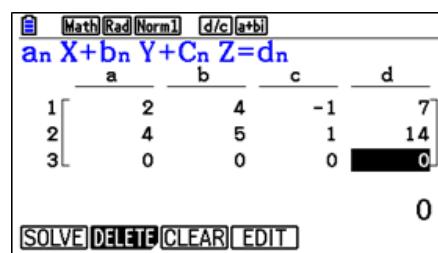
i és tangent als plànols

$$\Pi \equiv x + 2y - 2z - 2 = 0, \quad \Omega \equiv x + 2y - 2z + 4 = 0.$$

Determineu la seua equació.



Solució: Determinem l'equació paramètrica de la recta r . Obrim el *Menú Ecuación*

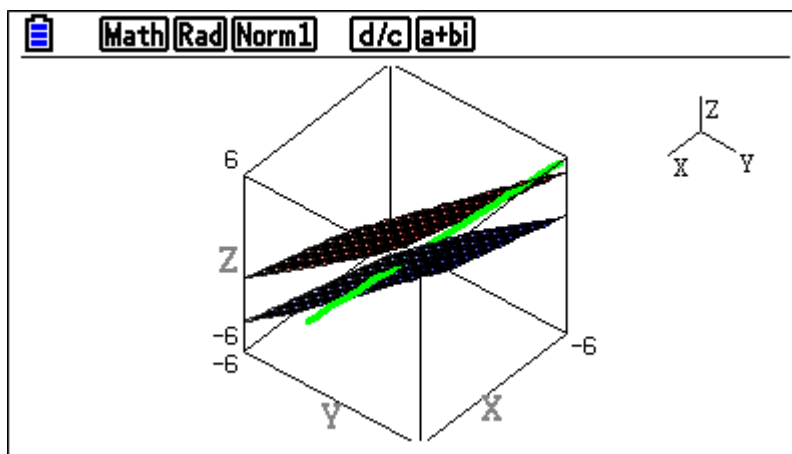
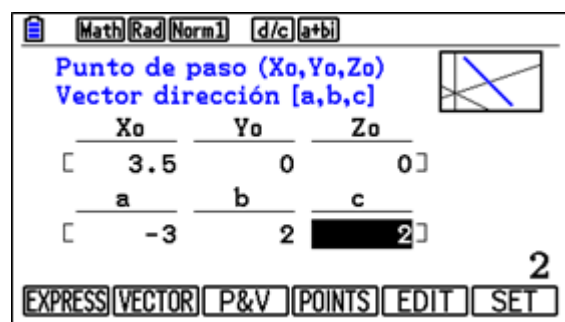
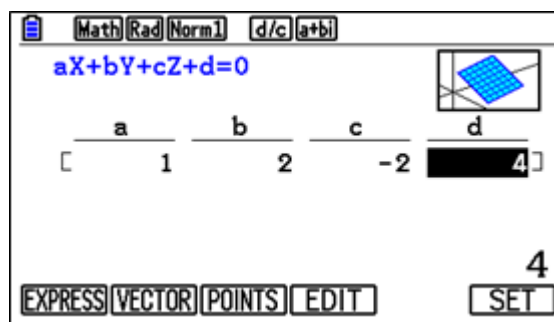
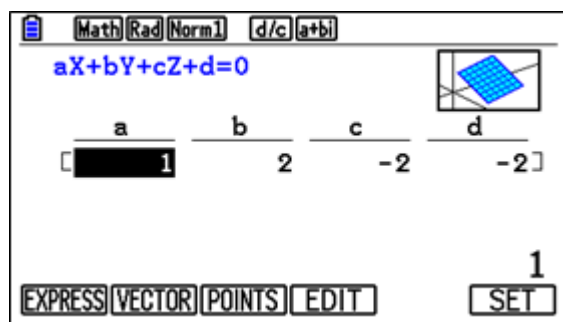


L'equació paramètrica de la recta r és:

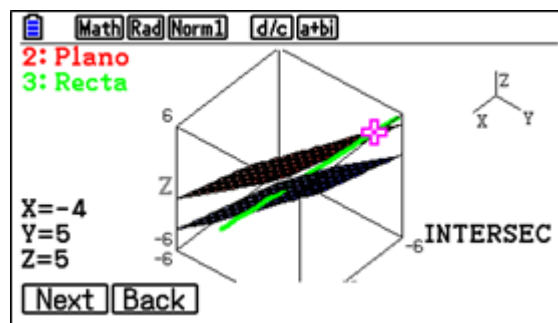
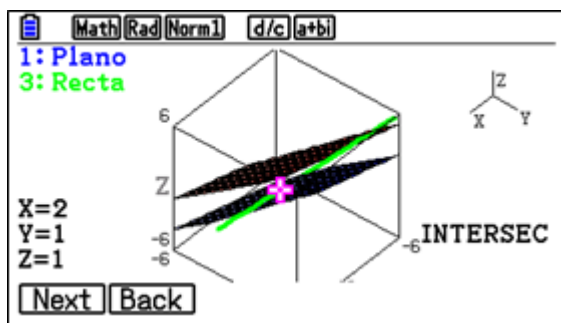
$$r \equiv \begin{cases} x = \frac{7}{2} - 3\alpha \\ y = 2\alpha \\ z = 2\alpha \end{cases}$$

Els dos plànols són paral·lels ja que $\frac{1}{1} = \frac{2}{2} = \frac{-2}{-2} \neq \frac{-2}{4}$

Obrim el *Menú Gráfico 3D*. Definim els dos plànols i la recta



Amb la funció *G-Solv*, determinem la intersecció de la recta i cadascun dels plànols.



Les coordenades del punt intersecció del plànel $\Pi \equiv x + 2y - 2z - 2 = 0$ i la recta

$$r \equiv \begin{cases} 2x + 4y - z - 7 = 0 \\ 4x + 5y + z - 14 = 0 \end{cases} \text{ és: } P(2, 1, 1)$$

Les coordenades del punt intersecció del plànel $\Omega \equiv x + 2y - 2z + 4 = 0$ i la recta

$$r \equiv \begin{cases} 2x + 4y - z - 7 = 0 \\ 4x + 5y + z - 14 = 0 \end{cases} \text{ és: } Q(-4, 5, 5)$$

El centre de l'esfera és el punt mig del segment $\overline{PQ}$. Les seues coordenades són: $O(-1, 3, 3)$

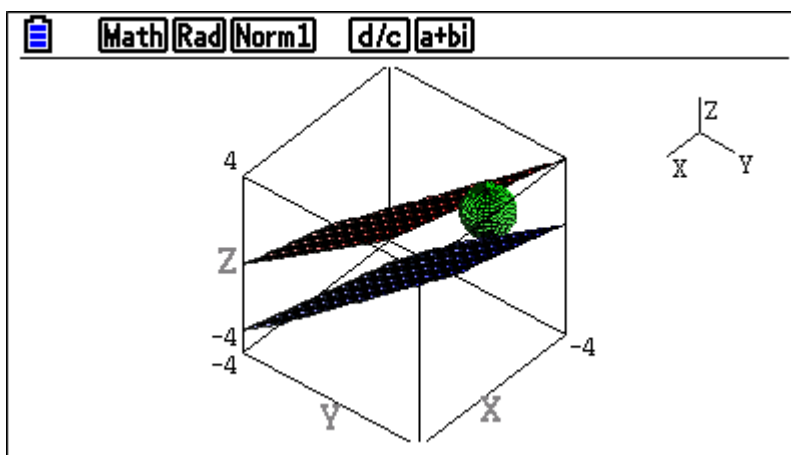
El radi és igual a la distància del centre $O(-1, 3, 3)$ al plànel $\Pi \equiv x + 2y - 2z - 2 = 0$

$$r = \left| \frac{-1 + 2 \cdot 3 - 2 \cdot 3 - 2}{\sqrt{1^2 + 2^2 + (-2)^2}} \right| = 1$$

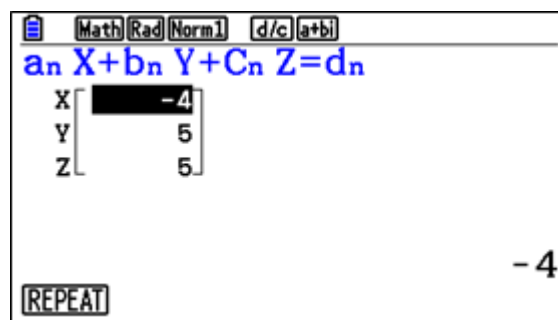
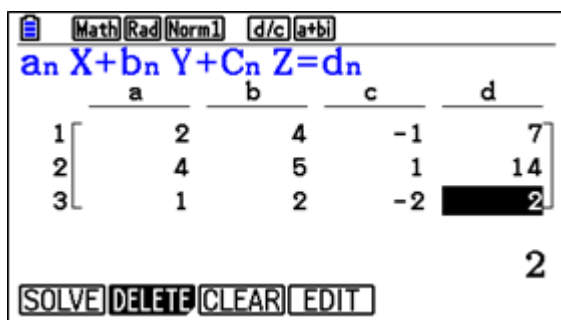
L'equació de l'esfera és:

$$(x + 1)^2 + (y - 3)^2 + (z - 3)^2 = 1^2$$

Definim i representem l'esfera:



Per calcular els punts intersecció de la recta r i cadascun dels plànol es poden resoldre els sistemes format per la recta i cadascun dels plànols: Obrim el *Menú Ecuación*:

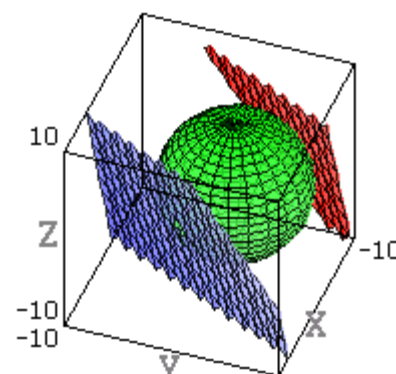


Les coordenades del punt intersecció del plànel $\Omega \equiv x + 2y - 2z + 4 = 0$ i la recta

$$r \equiv \begin{cases} 2x + 4y - z - 7 = 0 \\ 4x + 5y + z - 14 = 0 \end{cases} \text{ és: } Q(-4, 5, 5)$$

Abril 7-8: Determineu l'equació de l'esfera que és tangent als plànols

$\Pi \equiv 6x - 3y - 2z - 35 = 0$, $\Omega \equiv 6x - 3y - 2z + 63 = 0$,
sabent que el punt $M(5, -1, -1)$ és un punt de tangència en un dels plànols.



Solució: Els dos plànols són paral·lels ja que $\frac{6}{6} = \frac{-2}{-2} = \frac{-2}{-2} \neq \frac{-35}{63}$. Notem que $M(5, -1, -1)$ pertany al plànel $\Pi \equiv 6x - 3y - 2z - 35 = 0$ ja que satisfà la seua equació:

$$6 \cdot 5 - 3 \cdot (-1) - 2 \cdot (-1) - 35 = 0$$

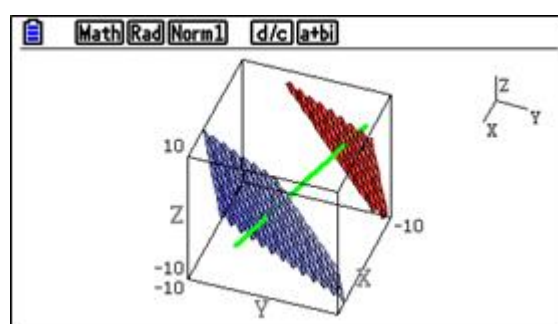
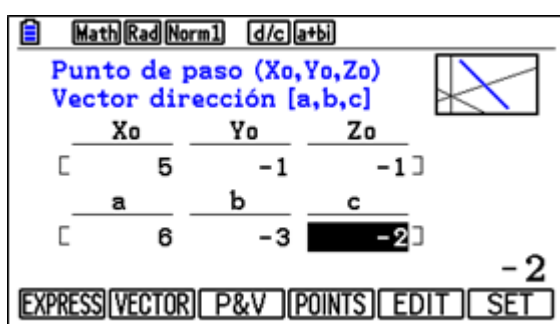
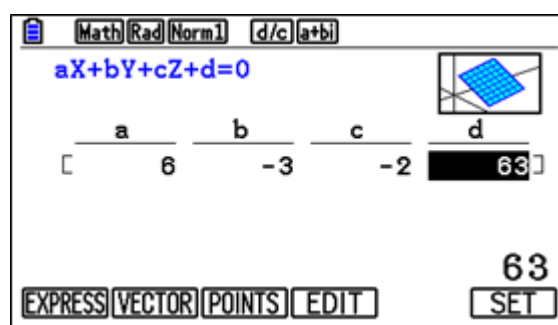
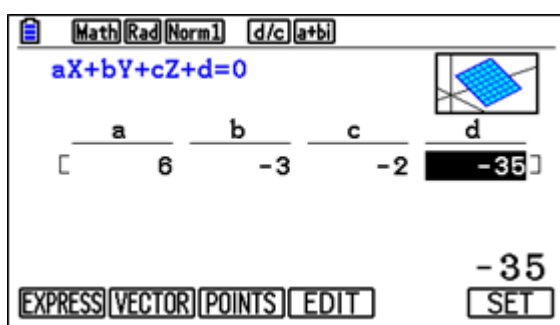
El diàmetre de l'esfera és la distància del punt $M(5, -1, -1)$ al plànel $\Omega \equiv 6x - 3y - 2z + 63 = 0$

$$2r = \left| \frac{6 \cdot 5 - 3 \cdot (-1) - 2 \cdot (-1) + 63}{\sqrt{6^2 + (-3)^2 + (-2)^2}} \right| = 14$$

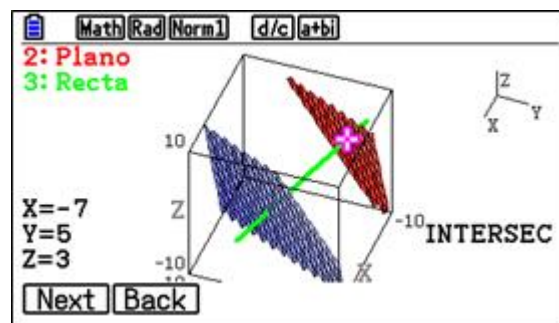
Aleshores, el radi de l'esfera és $r = 7$. El centre de l'esfera és el punt mig del segment format pel punt M i la projecció de M sobre el plànel $\Omega \equiv 6x - 3y - 2z + 63 = 0$. Calculem l'equació de la recta perpendicular al plànel $\Omega \equiv 6x - 3y - 2z + 63 = 0$ que passa per M que té vector director el característic del plànel $a = (6, -3, -2)$. La seua equació és:

$$r \equiv (x, y, z) = (5, -1, -1) + \alpha(6, -3, -2)$$

Obrim el *Menú Gráfico 3D*. Definim i representem els dos plànols i la recta.



Per determinar la intersecció del plànel $\Omega \equiv 6x - 3y - 2z + 63 = 0$ i la recta $r \equiv (x, y, z) = (5, -1, -1) + \alpha(6, -3, -2)$ s'utilitza la funció *G-Solv*:



Les coordenades del punt projecció són:

$$M'(-7, 5, 3)$$

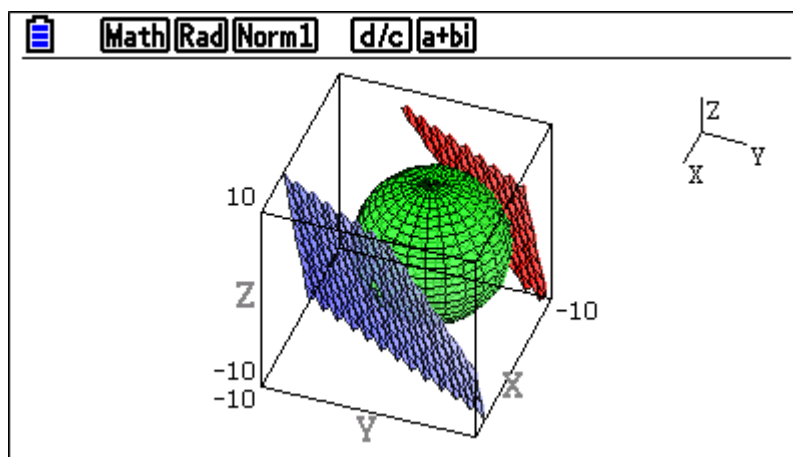
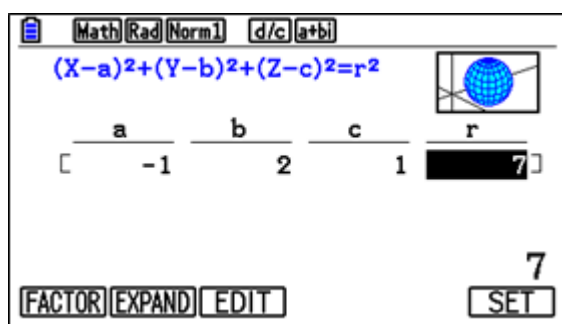
El centre de l'esfera és el punt mig del segment $\overline{MM'}$. Les seues coordenades són:

$$O(-1, 2, 1)$$

L'equació de l'esfera és:

$$(x + 1)^2 + (y - 2)^2 + (z - 1)^2 = 7^2$$

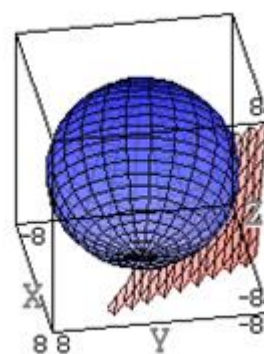
Obrim el *Menú Gráfico 3D*. Definim l'equació de l'esfera i la representem



Abril 9: Determineu l'equació del plànel tangent a l'esfera

$$x^2 + y^2 + z^2 = 49$$

en el punt $M(6, -3, -2)$



Solució: L'esfera té centre el punt $O(0, 0, 0)$ i radi $r = 7$. El punt $M(6, -3, -2)$ pertany a l'esfera ja que $6^2 + (-3)^2 + (-2)^2 = 49$. El vector característic del plànel tangent a l'esfera en el punt M és:

$$\overrightarrow{OM} = (6, -3, -2)$$

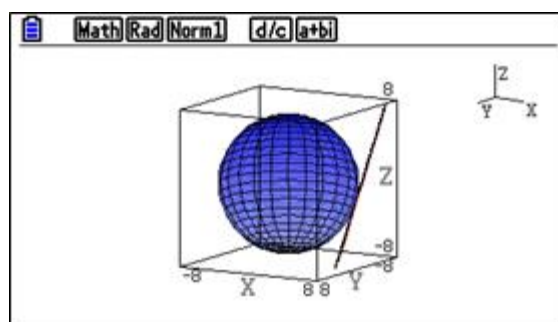
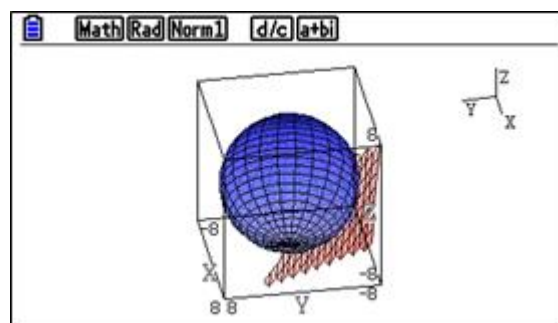
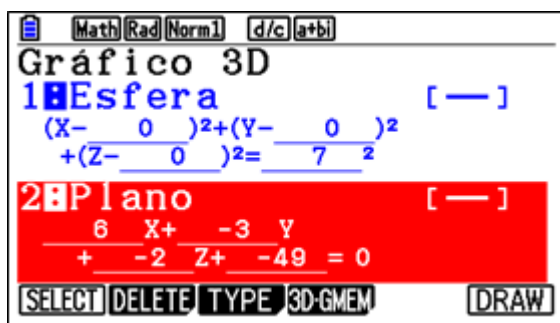
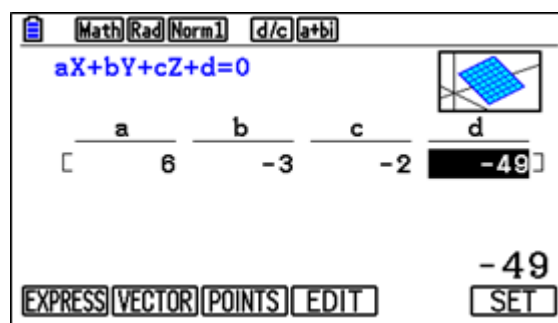
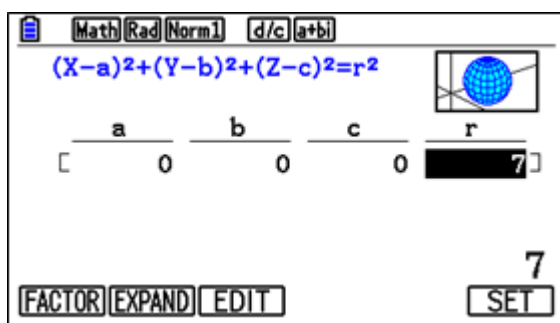
L'equació del plànel és:

$$6(x - 6) - 3(y + 3) - 2(z + 2) = 0$$

Simplificant:

$$6x - 3y - 2z - 49 = 0$$

Obrim el *Menú Gráfico 3D*. Definim l'esfera i el plànel i els representem:

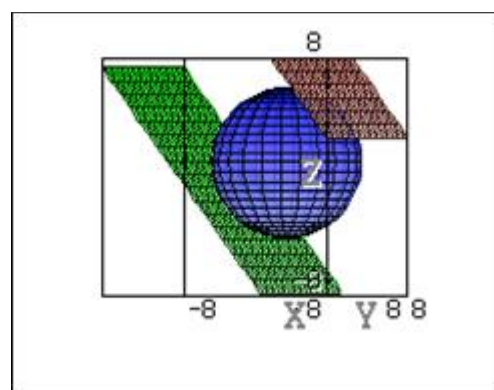


Abril 11: Determineu les equacions dels plànols tangents a l'esfera

$$(x - 3)^2 + (y + 2)^2 + (z - 1)^2 = 25$$

paral·lels al plànel

$$4x + 3z - 17 = 0$$



Solució: L'esfera té centre $O(3, -2, 1)$ i radi $r = 5$. El vector característic del plànel $4x + 3z - 17 = 0$ és $a = (4, 0, 3)$. La recta perpendicular al plànel $4x + 3z - 17 = 0$ que passa pel centre de l'esfera té direcció el vector característic del plànel:

$$(x, y, z) = (3, -2, 1) + \alpha(4, 0, 3)$$

Amb la intersecció de la recta i l'esfera calculem els punts de tangència:

$$\begin{cases} (x - 3)^2 + (y + 2)^2 + (z - 1)^2 = 25 \\ (x, y, z) = (3, -2, 1) + \alpha(4, 0, 3) \end{cases}$$

$$(4\alpha)^2 + 0^2 + (3\alpha)^2 = 25$$

Aleshores, $\alpha = 1, -1$

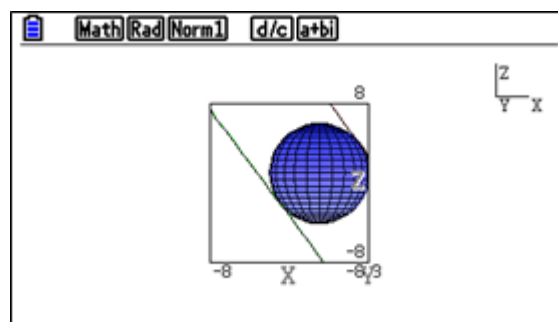
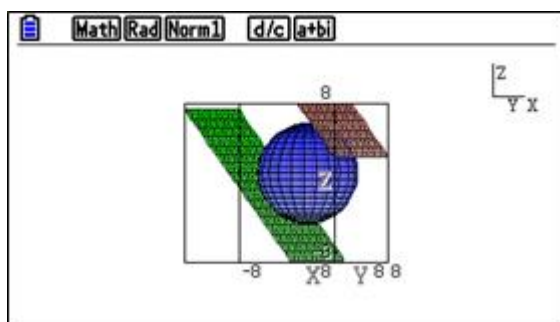
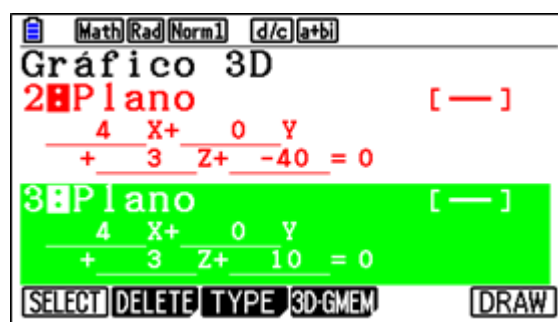
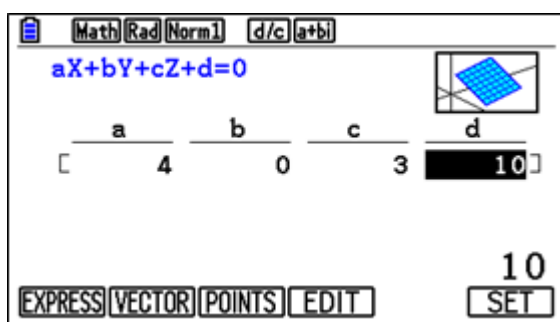
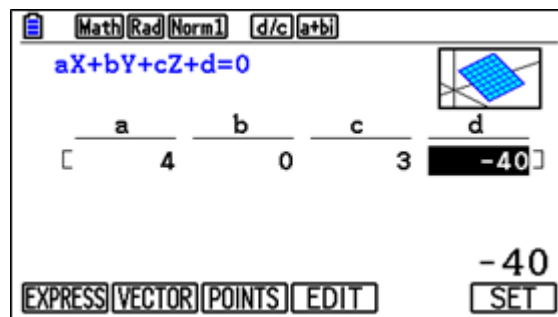
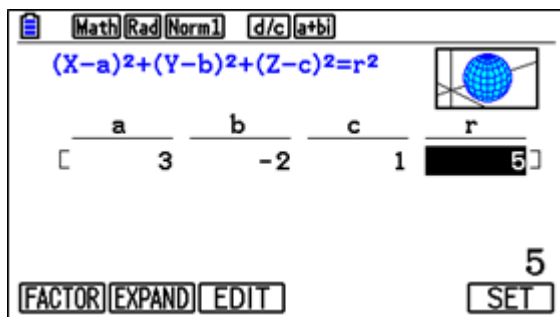
Si $\alpha = 1$, el punt de tangència és $T_1(7, -2, 4)$. L'equació del plànel és:

$$\pi_1 \equiv 4(x - 7) + 3(z - 4) = 0 \quad \pi_1 \equiv 4x + 3z - 40 = 0$$

Si $\alpha = -1$ el punt de tangència és $T_2(-1, -2, -2)$. L'equació del plànel és:

$$\pi_2 \equiv 4(x + 1) + 3(z + 2) = 0 \quad \pi_2 \equiv 4x + 3z + 10 = 0$$

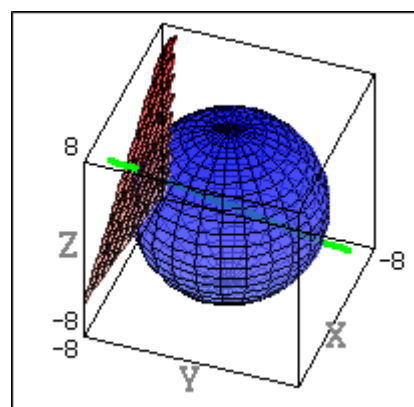
Obrim el *Menú Gráfico 3D*. Definim l'esfera i els dos plànols i els representem:



Abril 12: Demostreu que el plànel $2x - 6y + 3z - 49 = 0$ és tangent a l'esfera

$$x^2 + y^2 + z^2 = 49$$

Calculeu les coordenades del punt de tangència.



Solució: l'esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 49$ té centre $O(0, 0, 0)$ i radi $r = 7$. El plànel és tangent si la distància del centre de l'esfera al plànel és igual al radi. La distància del centre $O(0, 0, 0)$ al plànel $2x - 6y + 3z - 49 = 0$ és:

$$d = \frac{|2 \cdot 0 - 6 \cdot 0 + 3 \cdot 0 - 49|}{\sqrt{2^2 + (-6)^2 + 3^2}} = 7$$

Aleshores el plànot és tangent a l'esfera. Per calcular el punt de tangència calcularem la intersecció del plànot $2x - 6y + 3z - 49 = 0$ i la recta perpendicular al plànot que passa pel centre de l'esfera. La recta passa pel punt $O(0, 0, 0)$ i té direcció el vector característic del plànot,

$$a = (2, -6, 3)$$

La seua equació és

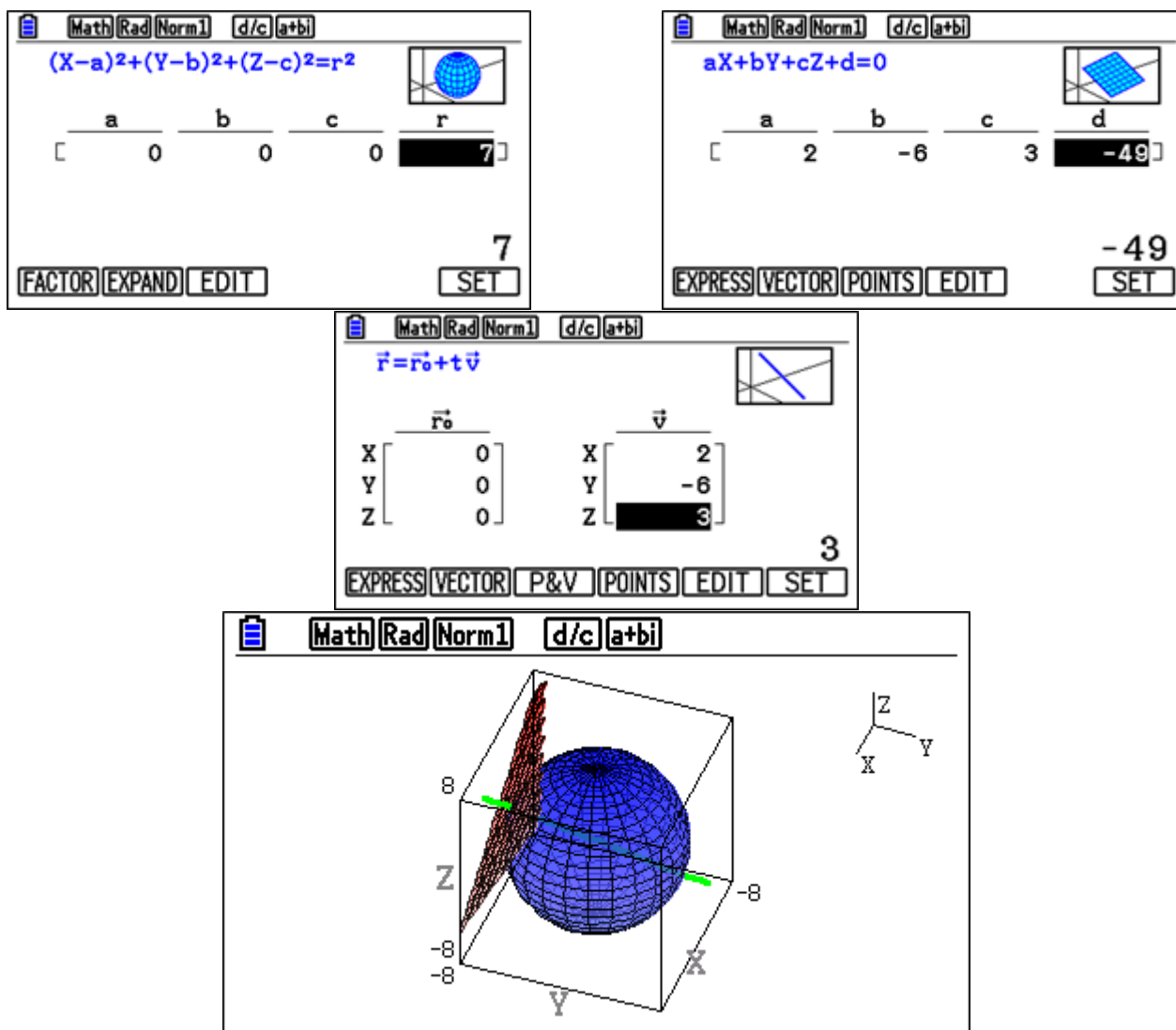
$$r \equiv (x, y, z) = (0, 0, 0) + \alpha(2, -6, 3) \quad (x, y, z) = (2\alpha, -6\alpha, 3\alpha)$$

Substituint les coordenades en l'equació del plànot:

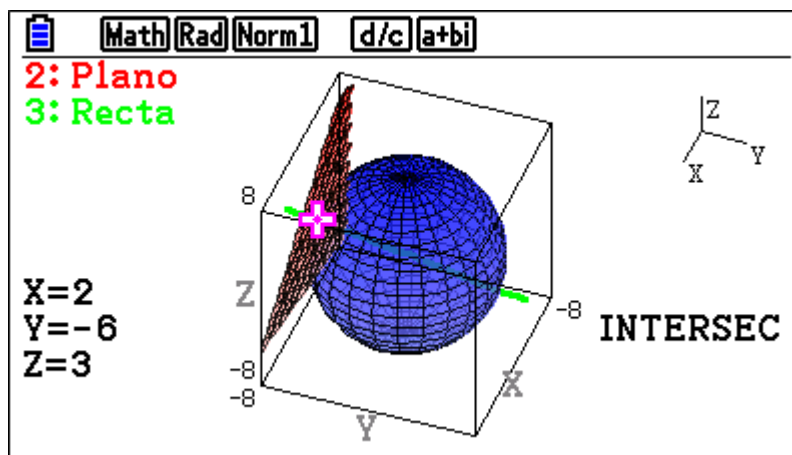
$$2 \cdot (2\alpha) - 6(-6\alpha) + 3(3\alpha) - 49 = 0$$

Resolent l'equació $\alpha = 1$. El punt de tangència de coordenades $P(2, -6, 3)$

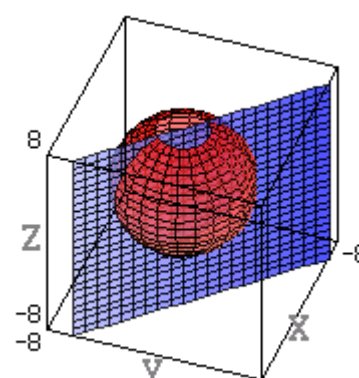
Obrim el *Menú Gráfico 3D*. Definim i representem l'equació de l'esfera, del plànot i de la recta.



Determinem amb la funció *G-Solve*, la intersecció de la recta i el plànot:

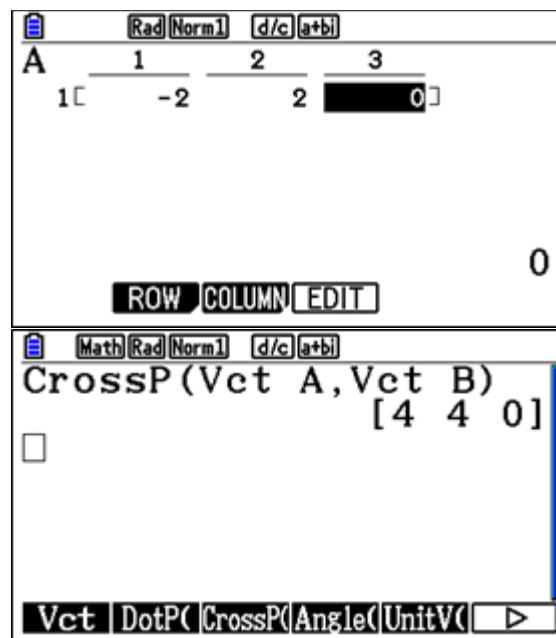
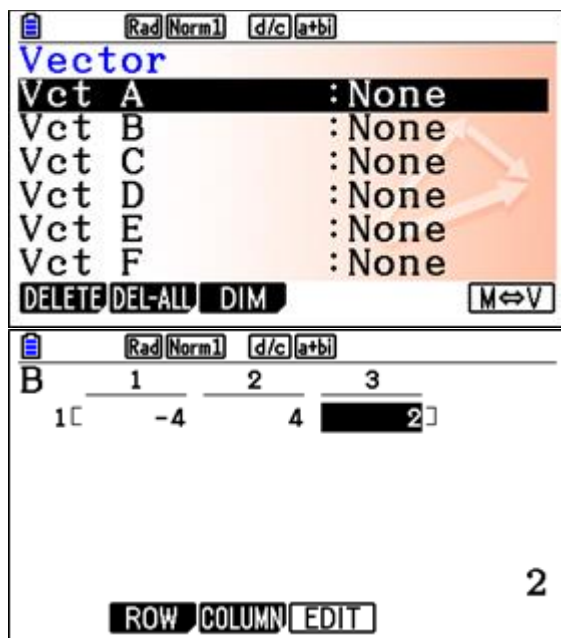


El punt de tangència de coordenades $P(2, -6, 3)$



Abril 14: Determineu l'equació de la circumferència que passa pels punts A (3,-1,-2), B (1,1,-2) y C (-1,3,0)

Solució: Obrim el Menú Ejec-Mat:. Definim els vectors $\overrightarrow{AB} = (-2, 2, 0)$, $\overrightarrow{AC} = (-4, 4, 2)$



El plànol que passa per A, B, C té equació:

$$\pi_{ABC} \equiv x + y + D = 0$$

El punt A(3, -1, -2) pertany al plànol. Aleshores, $3 - 1 + D = 0$, $D = -2$

$$\pi_{ABC} \equiv x + y - 2 = 0$$

Per determinar el centre d'una de les esferes que passen pels punts A, B, C determinarem els plànols mediadors dels segments $\overline{AB}$, $\overline{AC}$ i calcularem la intersecció d'aquests dos plànols i del plànol que passa per

A, B, C. El punt mig C_1 del segment $\overline{AB}$ té coordenades: $C_1(2, 0, -2)$. El vector característic del plànel mediador del segment $\overline{AB}$ és $\overrightarrow{AB} = (-2, 2, 0)$. La seua equació és:

$$\pi_1 \equiv -x + y + E = 0$$

El punt $C_1(2, 0, -2)$ pertany al plànel, per tant:

$$-2 + 0 + E = 0 \quad E = 2 \quad \pi_1 \equiv -x + y + 2 = 0$$

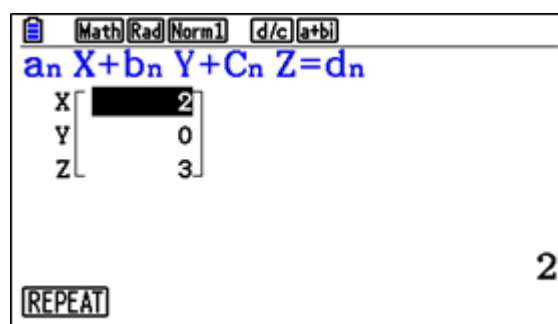
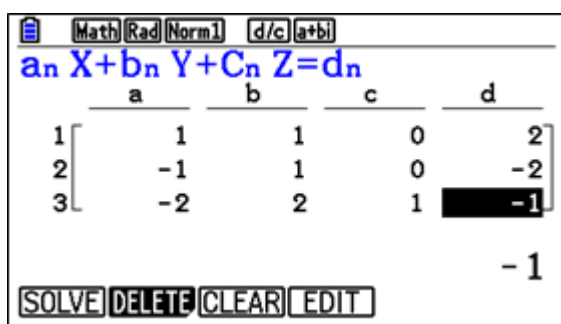
El punt mig B_1 del segment $\overline{AC}$ té coordenades: $B_1(1, 1, -1)$. El vector característic del plànel mediador del segment $\overline{AC}$ és $\overrightarrow{AC} = (-4, 4, 2)$. La seua equació és:

$$\pi_2 \equiv -2x + 2y + z + F = 0$$

El punt $B_1(1, 1, -1)$ pertany al plànel, per tant $-2 + 2 - 1 + F = 0$, $F = 1$, $\pi_2 \equiv -2x + 2y + z + 1 = 0$

El centre és la intersecció dels tres plànols. Obrim el *Menú Ecuación*: Resolem el sistema:

$$\begin{cases} x + y = 2 \\ -x + y = -2 \\ -2x + 2y + z = -1 \end{cases}$$



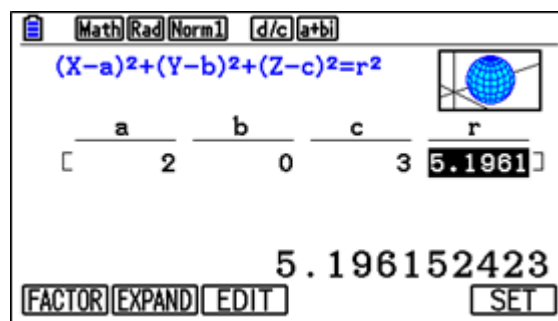
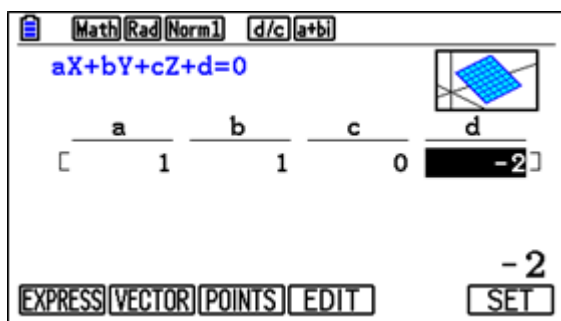
Les coordenades del centre són: $O(2, 0, 3)$. El radi de la circumferència que passa pels punts A, B, C és:

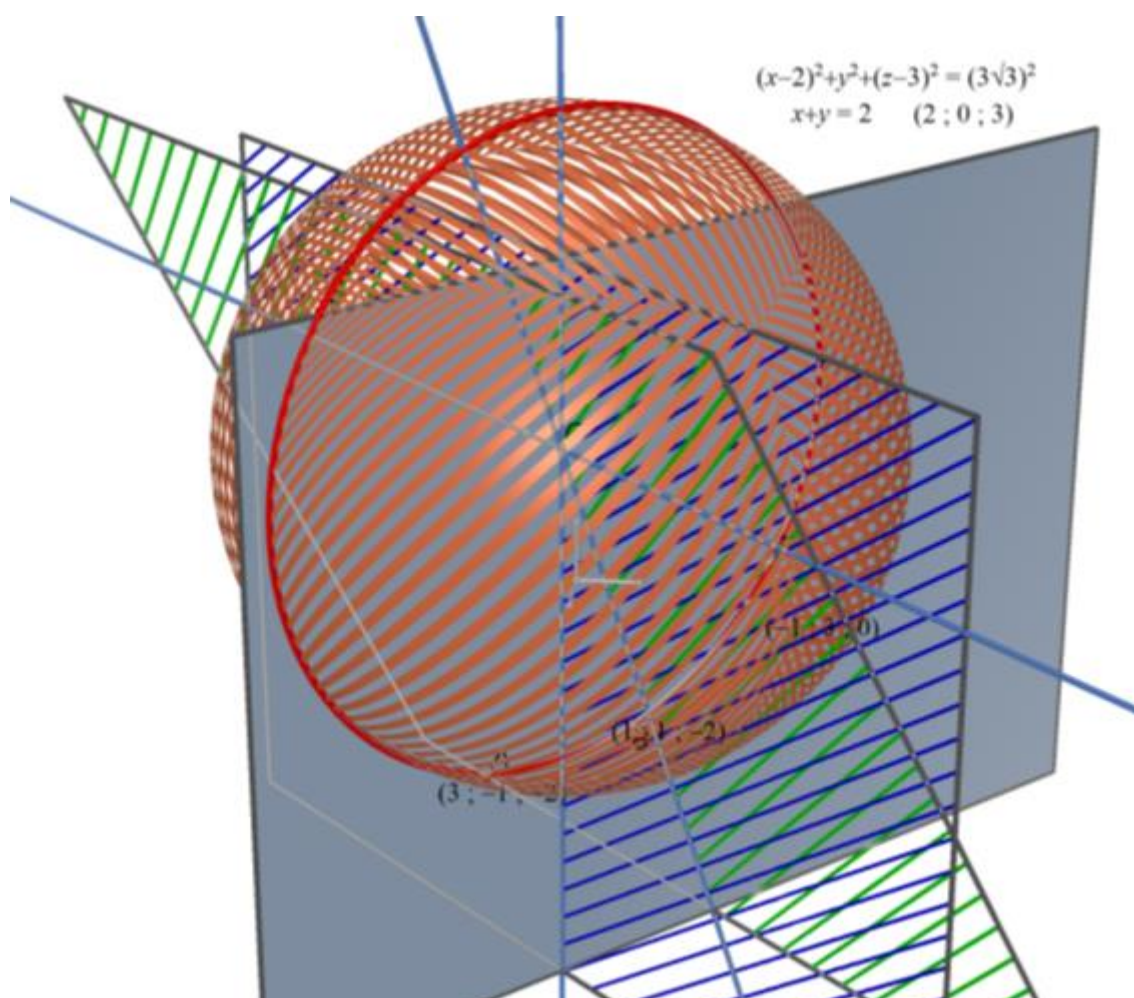
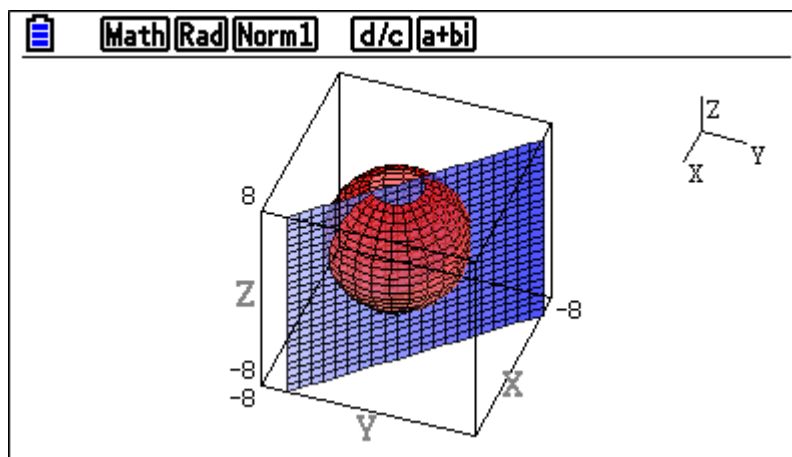
$$r = \sqrt{(3-2)^2 + (-1-0)^2 + (-2-3)^2} = \sqrt{27}$$

L'equació de la circumferència és igual a la intersecció del plànel $\pi_{ABC} \equiv x + y - 2 = 0$ i l'esfera de centre $O(2, 0, 3)$ i radi $r = \sqrt{27}$

$$\begin{cases} x + y = 2 \\ (x-2)^2 + y^2 + (z-3)^2 = 27 \end{cases}$$

Obrim el *Menú Gráfico 3D*. Definim i representem les equacions del plànel $\pi_{ABC} \equiv x + y - 2 = 0$ i l'esfera $(x-2)^2 + y^2 + (z-3)^2 = 27$



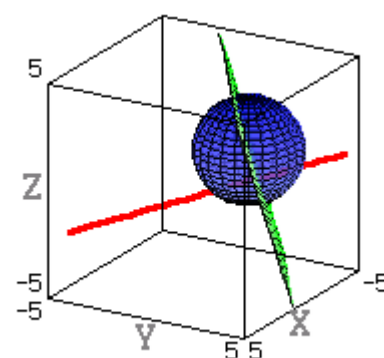


Abril 15-16: Determineu la posició relativa de la recta

$$\mathbf{r} \equiv \begin{cases} x = 2 - 2\alpha \\ y = -\frac{7}{2} + 3\alpha \\ z = -2 + \alpha \end{cases}$$

i l'esfera

$$E \equiv x^2 + y^2 + z^2 + x - 4y - 3z + \frac{1}{2} = 0$$



Solució: Completant quadrats l'equació de l'esfera és:

$$\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + (y - 2)^2 + \left(z - \frac{3}{2}\right)^2 = 6$$

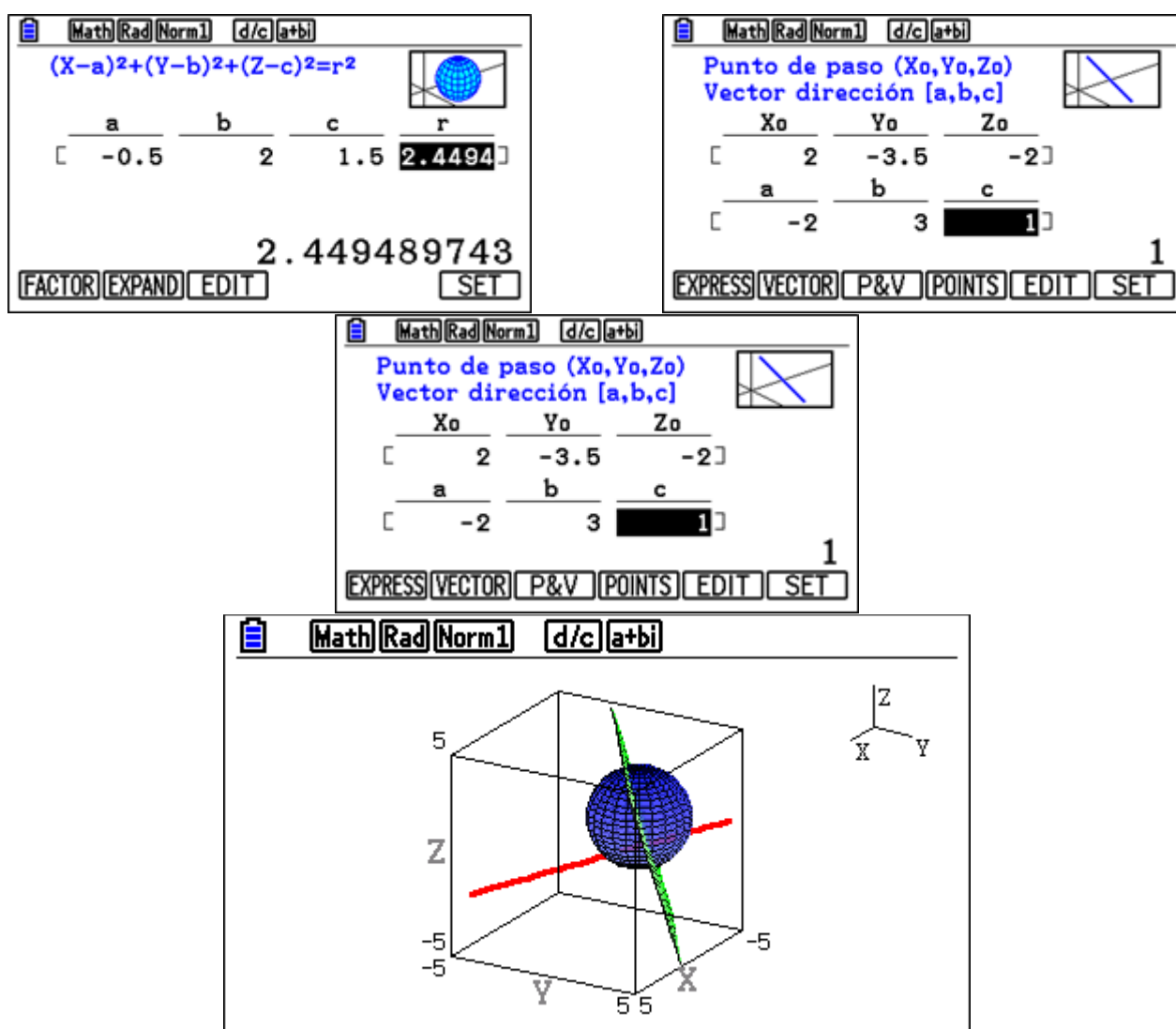
El centre de l'esfera és el punt $O\left(-\frac{1}{2}, 2, \frac{3}{2}\right)$ el radi és $r = \sqrt{6}$. Calculem la projecció del centre O sobre la recta r . Considerem el plànol perpendicular a la recta r que passa per $O\left(-\frac{1}{2}, 2, \frac{3}{2}\right)$ i vector característic el director de la recta $v = (-2, 3, 1)$. La seua equació és:

$$\Pi \equiv -2\left(x + \frac{1}{2}\right) + 3(y - 2) + \left(z - \frac{3}{2}\right) = 0$$

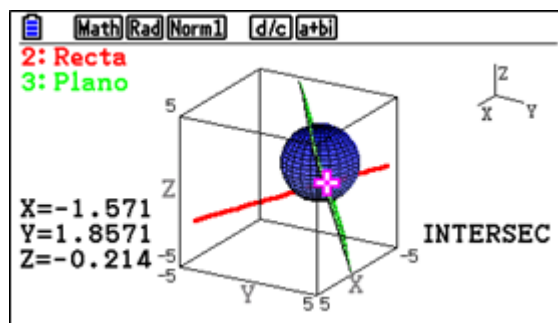
Simplificant:

$$\Pi \equiv -2x + 3y + z - \frac{17}{2} = 0$$

Obrim el *Menú Gráfico 3D*. Definim i representem l'esfera la recta i el plànol.

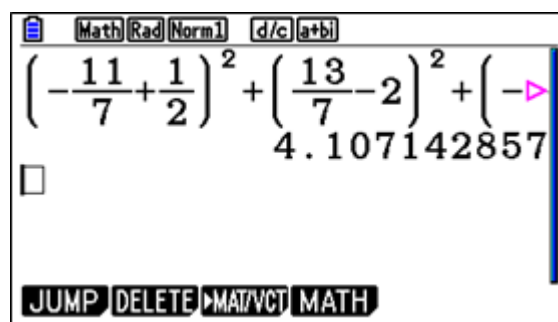
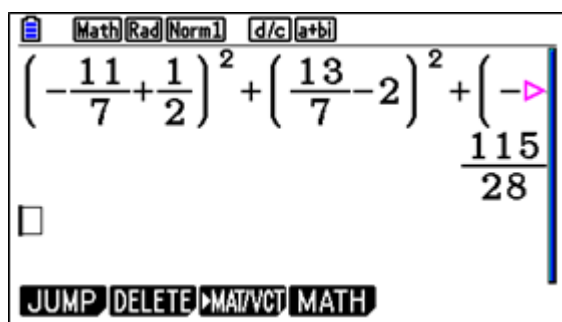


Amb la funció $G-So/v$, determinem la intersecció de la recta i el plànol (punt projecció)



El punt projecció té coordenades $P\left(-\frac{11}{7}, \frac{13}{7}, -\frac{3}{14}\right)$. Calculem el quadrat de la distància entre el centre O i la projecció P.

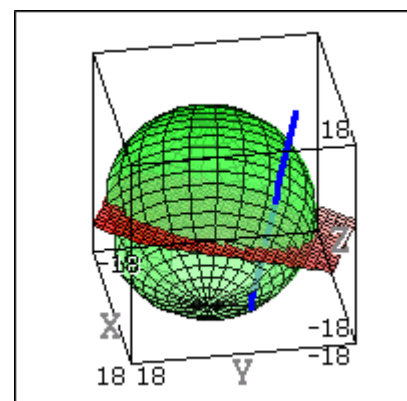
$$(d(OP))^2 = \left(-\frac{11}{7} + \frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{13}{7} - 2\right)^2 + \left(-\frac{3}{14} - \frac{3}{2}\right)^2$$



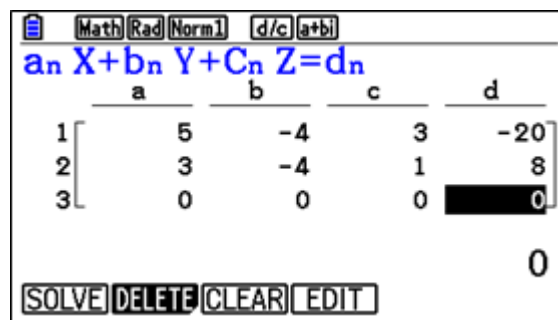
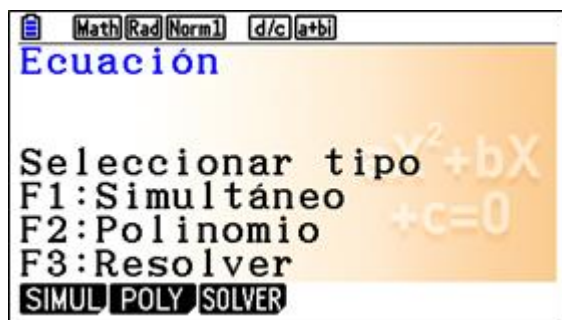
Aleshores, la recta talla l'esfera ja que $(d(OP))^2 < r^2 = 6$

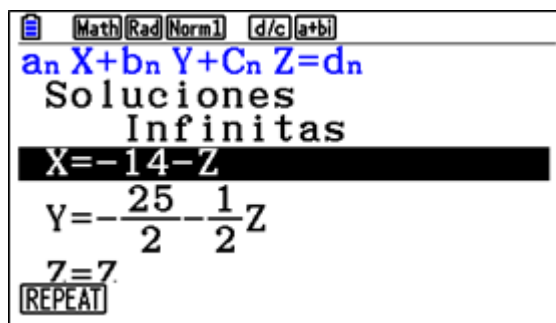
Abril 18: Determineu l'equació de l'esfera de centre $O(2, 3, -1)$ que talla la recta

$$s \equiv \begin{cases} 5x - 4y + 3z + 20 = 0 \\ 3x - 4y + z - 8 = 0 \end{cases} \text{ amb una corda de longitud igual a 16.}$$



Solució: Obrem el *Menú Ecuación*. Resolem el sistema format per la recta per determinar la forma paramètrica:





L'equació paramètrica de la recta és:

$$s \equiv \begin{cases} x = -14 - \alpha \\ y = -\frac{25}{2} - \frac{1}{2}\alpha \\ z = \alpha \end{cases}$$

Un punt de la recta s és $A\left(-14, -\frac{25}{2}, 0\right)$ i el vector director $v = (-2, -1, 2)$. Determinem el punt projecció del centre O sobre la recta s . El plànel que passa per $O(2, 3, -1)$ i és perpendicular a la recta $s \equiv$

$$\begin{cases} x = -14 - \alpha \\ y = -\frac{25}{2} - \frac{1}{2}\alpha \\ z = \alpha \end{cases} \text{ té vector característic el vector director de la recta } s, v = (-2, -1, 2)$$

L'equació és

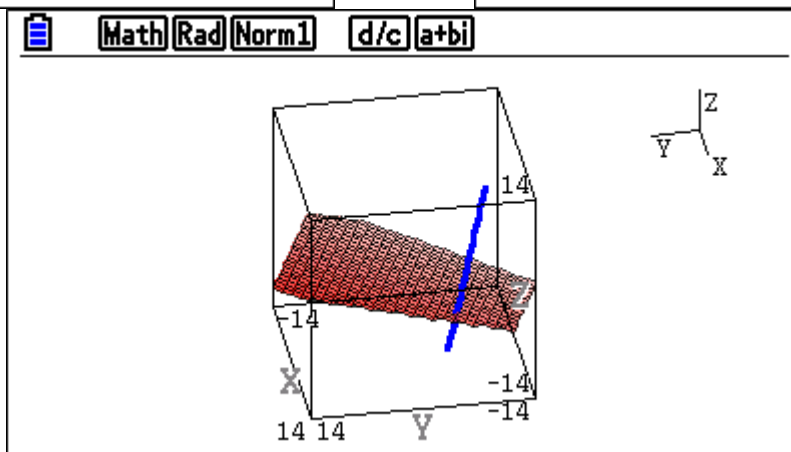
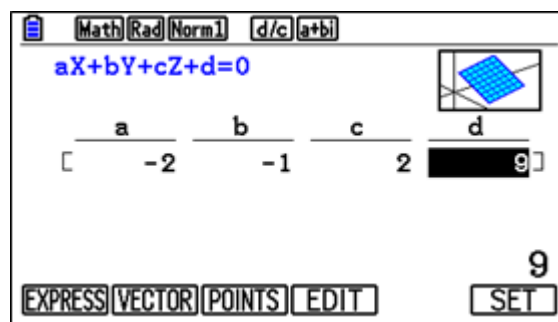
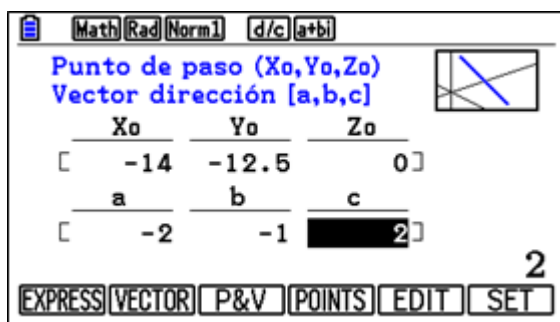
$$\Pi \equiv -2(x - 2) - (y - 3) + 2(z + 1) = 0$$

Simplificant:

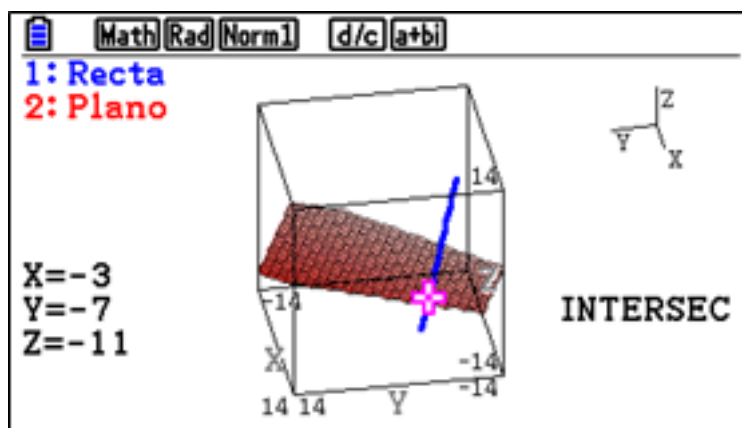
$$\Pi \equiv -2x - y + 2z + 9 = 0$$

Obrim el *Menú Gráfico 3D*.

Definim i representem la recta $s \equiv \begin{cases} x = -14 - \alpha \\ y = -\frac{25}{2} - \frac{1}{2}\alpha \\ z = \alpha \end{cases}$ i el plànel $\Pi \equiv -2x - y + 2z + 9 = 0$.



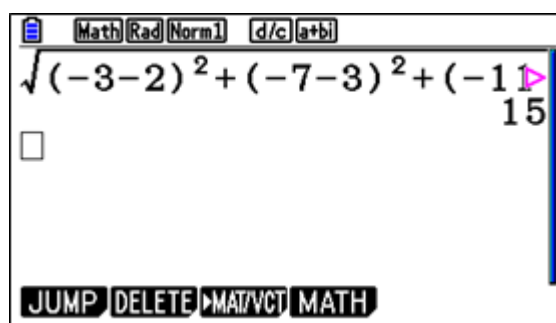
Amb la funció *G-Solv*, determinem el punt intersecció, punt mig de la corda.



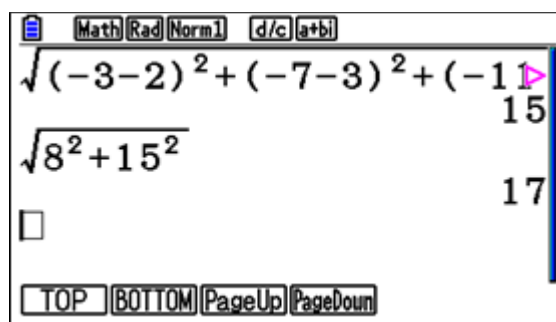
Les coordenades del punt mig de la corda són: $M(-3, -7, -11)$

Obrim el *Menú Ejec-Mat*. Calculem la distància del centre O al punt M

$$d(O, M) = \sqrt{(-3-2)^2 + (-7-3)^2 + (-11+1)^2}$$



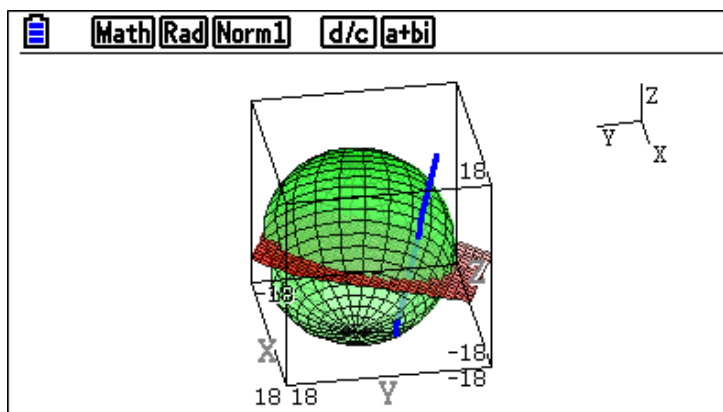
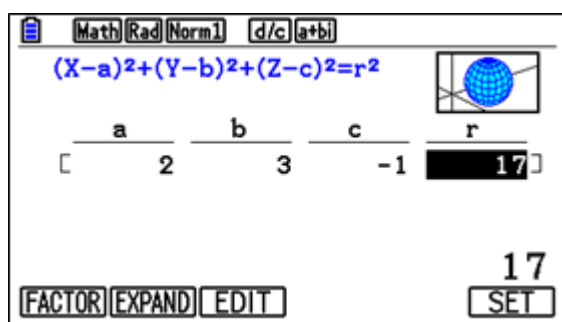
Siga r el radi de l'esfera. Aplicant el teorema de Pitàgores: $r^2 = 8^2 + 15^2$

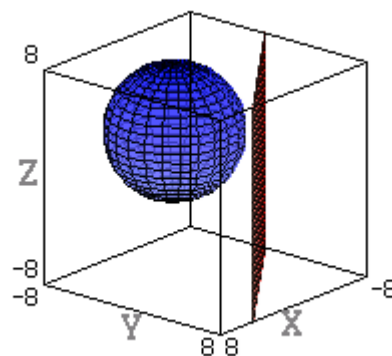


El radi de l'esfera és $r = 17$. L'equació de l'esfera és:

$$(x-2)^2 + (y-3)^2 + (z+1)^2 = 17^2$$

Obrim el *Menú Gráfico 3D*. Definim i representem l'esfera.





Abril 19-20: En l'esfera d'equació $E \equiv (x - 1)^2 + (y + 2)^2 + (x - 3)^2 = 25$ determineu el punt M més pròxim al plànel $\Pi \equiv 3x - 4y + 19 = 0$ i calculeu la distància del punt M a aquest plànel.

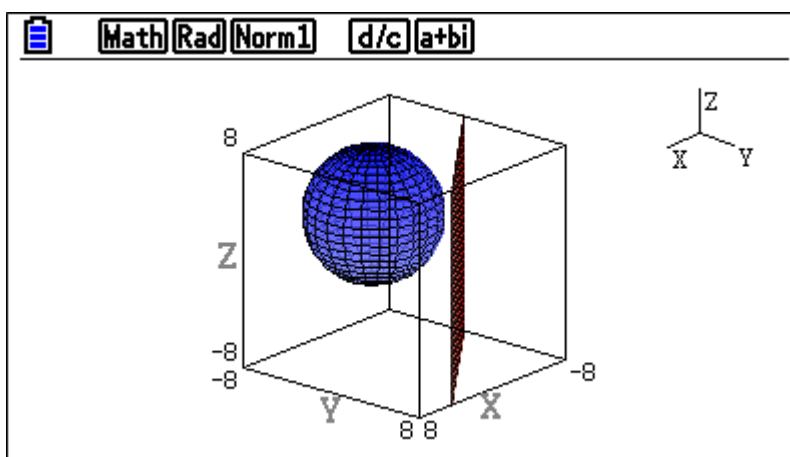
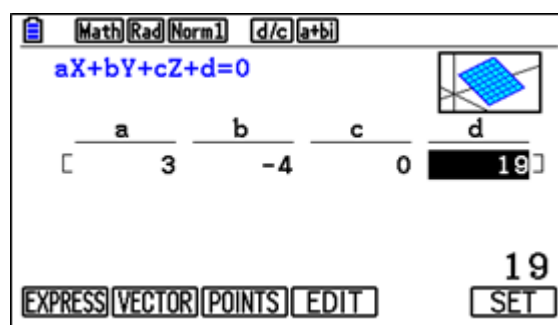
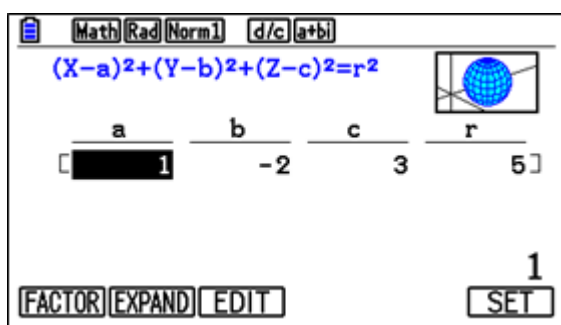
Solució: L'esfera té centre el punt $O(1, -2, 3)$ i radi $r = 5$. Vegem que el plànel és exterior a l'esfera.

Calculem la distància del centre $O(1, -2, 3)$ al plànel $\Pi \equiv 3x - 4y + 19 = 0$

$$d(O, \Pi) = \left| \frac{3 \cdot 1 - 4 \cdot (-2) + 0 \cdot 3 + 19}{\sqrt{3^2 + (-4)^2 + 0^2}} \right| = 6, \quad d(O, \Pi) = 6 > r = 5$$

Aleshores, el plànel és exterior a l'esfera.

Obrim el *Menú Gráfico 3D*. Definim i representem l'esfera i el plànel.



La recta perpendicular al plànel $\Pi \equiv 3x - 4y + 19 = 0$ que passa pel centre $O(1, -2, 3)$ té vector director el característic del plànel $a = (3, -4, 0)$. La seua equació és:

$$r \equiv (x, y, z) = (1, -2, 3) + \alpha(3, -4, 0)$$

Un punt qualsevol de la recta té coordenades:

$$M(1 + 3\alpha, -2 - 4\alpha, 3)$$

Substituint les coordenades del punt en l'equació del plànel:

$$(3\alpha)^2 + (-4\alpha)^2 = 25$$

Resolent l'equació:

$$\alpha = 1, -1$$

Si $\alpha = 1$ el punt intersecció té coordenades $M_1(4, -6, 3)$. Si $\alpha = -1$ el punt intersecció té coordenades $M_2(-2, 2, 3)$

Calculem la distància del punt $M_1(4, -6, 3)$ al plànel $\Pi \equiv 3x - 4y + 19 = 0$

$$d(M_1, \Pi) = \left| \frac{3 \cdot 4 - 4 \cdot (-6) + 0 \cdot 3 + 19}{\sqrt{3^2 + (-4)^2 + 0^2}} \right| = 11$$

Calculem la distància del punt $M_2(-2, 2, 3)$ al plànel $\Pi \equiv 3x - 4y + 19 = 0$

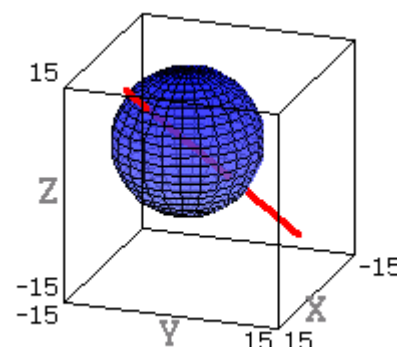
$$d(M_2, \Pi) = \left| \frac{3 \cdot (-2) - 4 \cdot 2 + 0 \cdot 3 + 19}{\sqrt{3^2 + (-4)^2 + 0^2}} \right| = 1$$

El punt més pròxim al plànel $\Pi \equiv 3x - 4y + 19 = 0$ és $M_2(-2, 2, 3)$

Abril 21-22: Calculeu la distància més curta del punt A (1,-1,3) a l'esfera

$$E \equiv x^2 + y^2 + z^2 - 6x + 4y - 10z - 62 = 0$$

En quin punt de l'esfera s'assoleix la distància més curta.



Solució: Completant quadrats:

$$E \equiv (x - 3)^2 + (y + 2)^2 + (z - 5)^2 = 62 + 9 + 4 + 25 = 10^2$$

Les coordenades del centre de l'esfera és $O(3, -2, 5)$ i el radi $R = 10$

Estudiem la posició relativa del punt $A(1, -1, 3)$ respecte de l'esfera.

$$(1 - 3)^2 + (-1 + 2)^2 + (3 - 5)^2 = 9 < 10^2$$

El punt $A(1, -1, 3)$ és interior a l'esfera.

$$\overline{OA} = \sqrt{(1 - 3)^2 + (-1 + 2)^2 + (3 - 5)^2} = 3$$

La distància més curta és:

$$d_{\min} = R - \overline{OA} = 10 - 3 = 7$$

La distància més llarga és:

$$d_{\max} = R + \overline{OA} = 10 + 3 = 13, \quad \overrightarrow{OA} = (-2, 1, -2)$$

L'equació de la recta que passa pels punts O i A és:

$$r_{OA} \equiv (x, y, z) = (3, -2, 5) + \alpha(-2, 1, -2)$$

Un punt qualsevol de la recta $r_{OA} \equiv (x, y, z) = (3, -2, 5) + \alpha(-2, 1, -2)$ té coordenades:

$$P(3 - 2\alpha, -2 + \alpha, 5 - 2\alpha)$$

Determinem la intersecció de la recta i l'esfera. Substituïm les coordenades del punt $P(3 - 2\alpha, -2 + \alpha, 5 - 2\alpha)$ en l'equació de l'esfera:

$$(-2\alpha)^2 + \alpha^2 + (-2\alpha)^2 = 100$$

Resolent l'equació:

$$\alpha = \frac{10}{3}, -\frac{10}{3}$$

Si $\alpha = \frac{10}{3}$

$$P_1\left(\frac{-11}{3}, \frac{4}{3}, \frac{-5}{3}\right), \quad \overline{AP_1} = \sqrt{\left(\frac{-11}{3} - 1\right)^2 + \left(\frac{4}{3} + 1\right)^2 + \left(\frac{-5}{3} - 3\right)^2} = 7$$

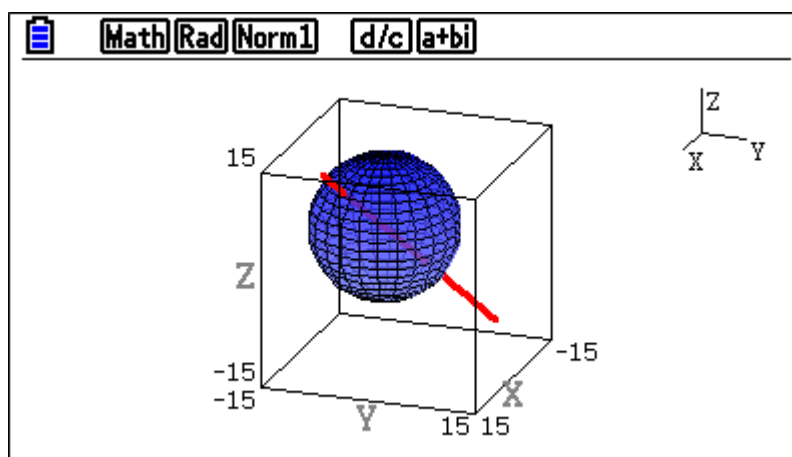
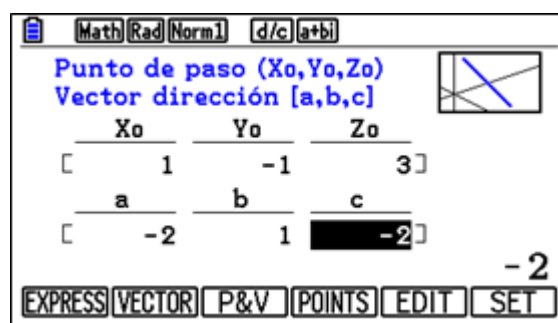
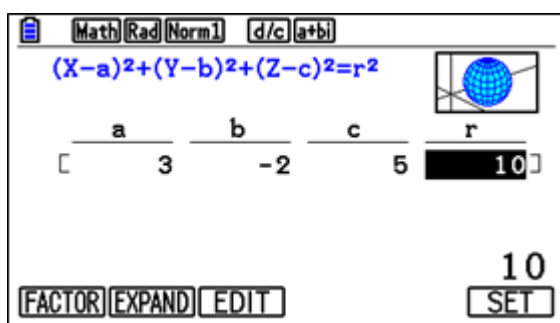
$P_1\left(\frac{-17}{3}, \frac{7}{3}, \frac{11}{3}\right)$ és el punt més proper de A.

Si $\alpha = -\frac{10}{3}$

$$P_2\left(\frac{29}{3}, \frac{-16}{3}, \frac{35}{3}\right), \quad \overline{AP_2} = \sqrt{\left(\frac{29}{3} - 1\right)^2 + \left(\frac{-16}{3} + 1\right)^2 + \left(\frac{35}{3} - 3\right)^2} = 13$$

$P_2\left(\frac{29}{3}, \frac{-16}{3}, \frac{35}{3}\right)$ és el punt més allunyat de A.

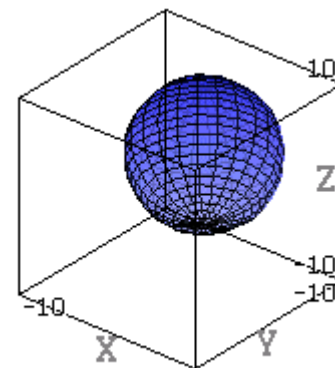
Obrim el *Menú Gráfico 3D*. Definim i representem l'esfera i la recta



Abril 23: Determineu l'equació de l'esfera que passa pels punts

$A(3,1,-3)$; $B(-2,4,1)$; $C(-5,0,0)$ i té el centre en el plànel

$$\Pi \equiv 2x + y - z + 3 = 0$$



Solució: Calculem les components dels vectors $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$

$$\overrightarrow{AB} = (-5, 3, 4), \quad \overrightarrow{AC} = (-8, -1, 3)$$

Els vectors són linealment independents ja que les components no són proporcionals

$$\frac{-5}{-8} \neq \frac{3}{-1}$$

Calculem els punts migs dels segments $\overline{AB}$, $\overline{AC}$

El punt mig del segment $\overline{AB}$ és $D\left(\frac{1}{2}, \frac{5}{2}, -1\right)$

El punt mig del segment $\overline{AC}$ és $E\left(-1, \frac{1}{2}, \frac{-3}{2}\right)$

El plànel medidor del segment $\overline{AB}$ té equació:

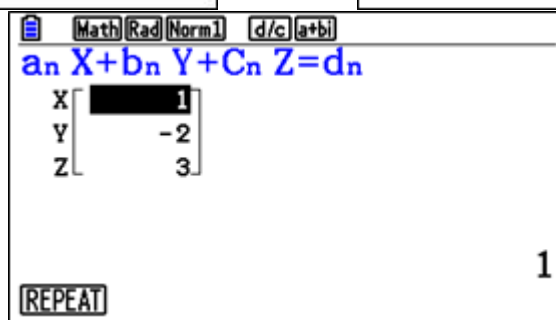
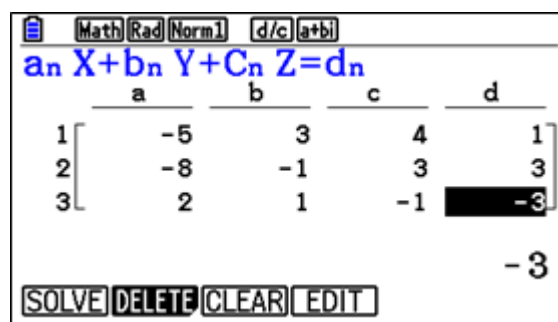
$$\Pi_1 \equiv -5\left(x - \frac{1}{2}\right) + 3\left(y - \frac{5}{2}\right) + 4(z + 1) = 0, \quad \Pi_1 \equiv -5x + 3y + 4z = 1$$

El plànel medidor del segment $\overline{AC}$ té equació:

$$\Pi_2 \equiv -8\left(x + 1\right) - \left(y - \frac{1}{2}\right) + 3\left(z + \frac{3}{2}\right) = 0, \quad \Pi_2 \equiv -8x - y + 3z = 3$$

El centre de l'esfera és igual al punt intersecció dels tres plànol.

Obrim el *Menú Ecuación*:

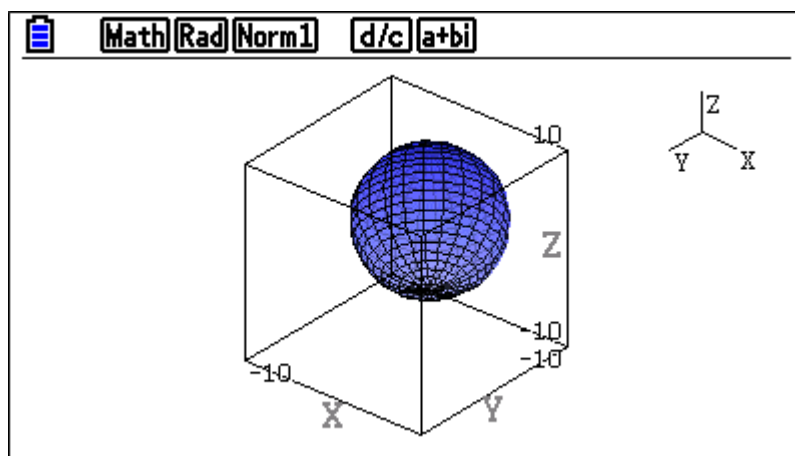
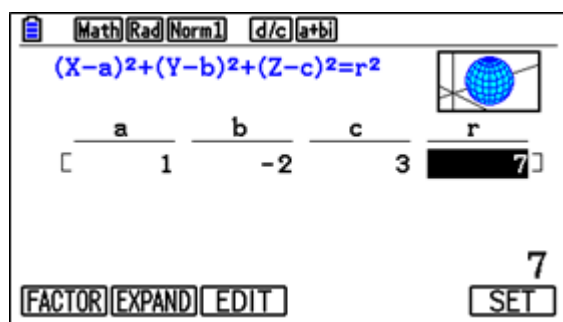


El centre de l'esfera és el punt $O(1, -2, 3)$. El radi de l'esfera és:

$$r = \overline{OA} = \sqrt{(3-1)^2 + (1+2)^2 + (-3-3)^2} = 7$$

El radi de l'esfera és $r = 7$. L'equació de l'esfera és $(x-1)^2 + (y+2)^2 + (z-3)^2 = 7^2$

Obrim el *Menú Gráfico 3D*. Definim i representem l'esfera.



Abril 25-26: Siguen les esferes d'equacions

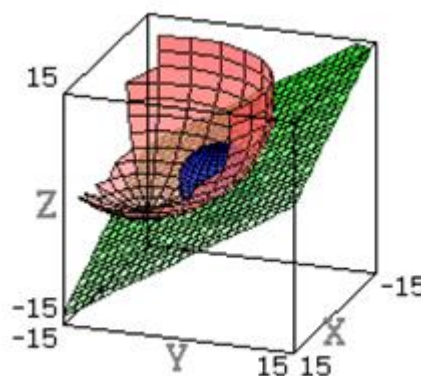
$$E_1 \equiv x^2 + y^2 + z^2 = 25,$$

$$E_2 \equiv x^2 + y^2 + z^2 - 10x + 15y - 25z = 0$$

Proveu que les dues esferes són secants.

Determineu el plànol que conté la intersecció de les dues esferes.

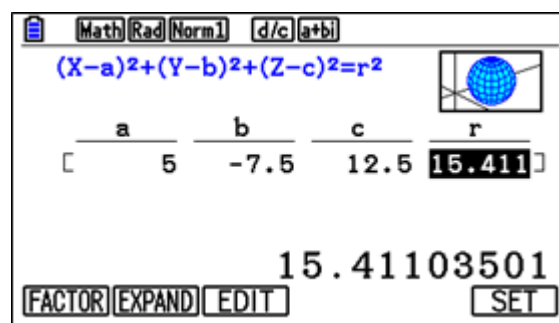
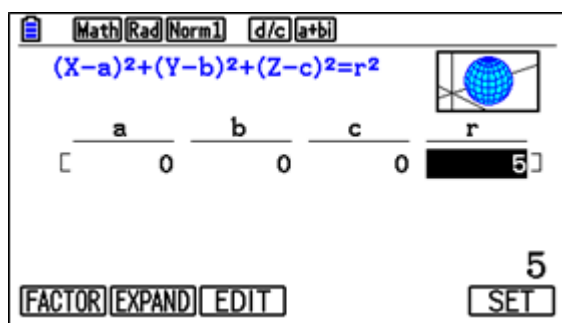
Determineu el centre i el radi de la circumferència intersecció

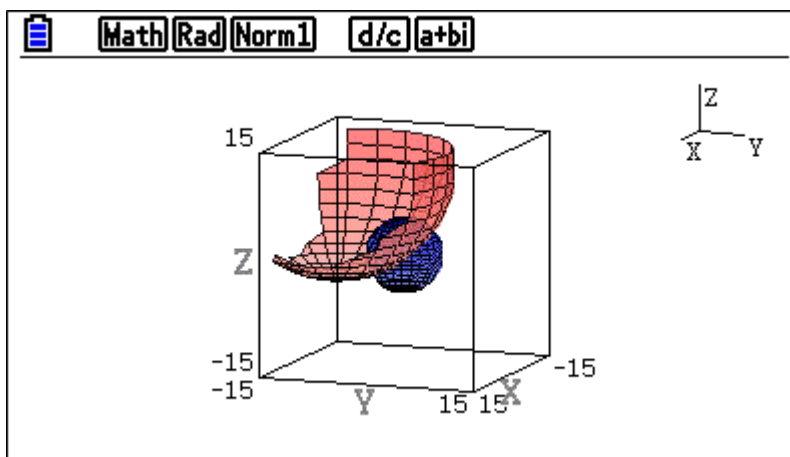


Solució: L'esfera $E_1 \equiv x^2 + y^2 + z^2 = 25$ té centre $O_1(0, 0, 0)$ i radi $R_1 = 5$. Completant quadrat en l'esfera $E_2 \equiv x^2 + y^2 + z^2 - 10x + 15y - 25z = 0$

$$(x-5)^2 + \left(y + \frac{15}{2}\right)^2 + \left(z - \frac{25}{2}\right)^2 = 25 + \frac{225}{4} + \frac{625}{4} = \left(\frac{5}{2}\sqrt{38}\right)^2$$

El centre de l'esfera és $O_2\left(5, -\frac{15}{2}, \frac{25}{2}\right)$ i radi $R_2 = \frac{5}{2}\sqrt{38}$. Obrim el *Menú Gráfico 3D*. Definim i representem les dues esferes.





Vegem analíticament que les dues esferes són secants. Calculem la distància entre els dos centres.

$$\overline{O_1O_2} = \sqrt{(5-0)^2 + \left(-\frac{15}{2}-0\right)^2 + \left(\frac{25}{2}-0\right)^2} = \frac{5}{2}\sqrt{38}$$

La suma dels radis és:

$$R_1 + R_2 = 5 + \frac{5}{2}\sqrt{38} > \overline{O_1O_2}$$

La diferència dels radis és:

$$R_2 - R_1 = \frac{5}{2}\sqrt{38} - 5 > \overline{O_1O_2}$$

Aleshores, les dues esferes són secants.

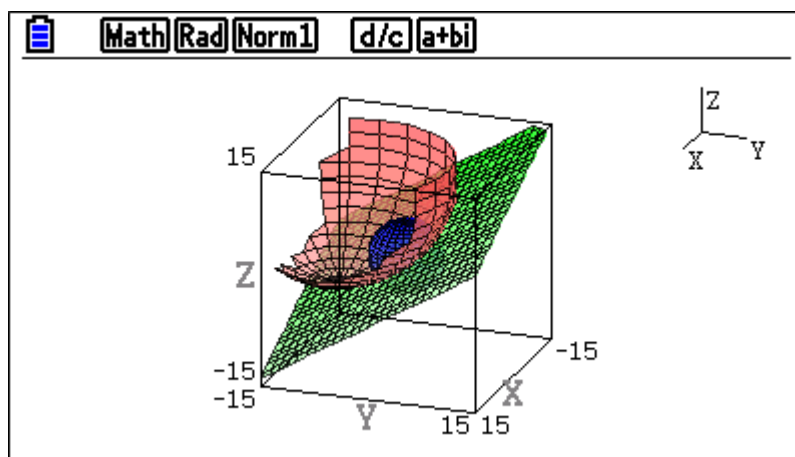
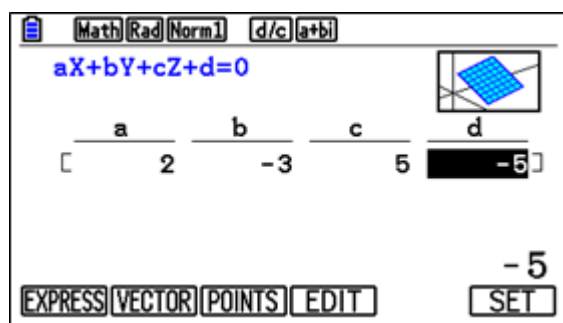
El plànol intersecció de les dues esferes és el plànol format per la diferència de les equacions de les dues esferes:

$$\Pi \equiv 10x - 15y + 25z = 25$$

Simplificant:

$$\Pi \equiv 2x - 3y + 5z - 5 = 0$$

Representem el plànol.



El centre de la circumferència intersecció de les dues esferes és la projecció del centre $O_1(0, 0, 0)$ sobre el plànol $\Pi \equiv 2x - 3y + 5z - 5 = 0$. La recta r perpendicular al plànol que passa per $O_1(0, 0, 0)$ té vector director el característic del plànol $a = (2, -3, 5)$ la seua equació és:

$$r \equiv (x, y, z) = \alpha(2, -3, 5)$$

Substituïm les coordenades d'un punt qualsevol de la recta r , $(2\alpha, -3\alpha, 5\alpha)$ en l'equació del plànel:

$$2(2\alpha) - 3(-3\alpha) + 5(5\alpha) - 5 = 0$$

Resolent l'equació:

$$\alpha = \frac{5}{38}$$

La intersecció del plànel i la recta és:

$$O\left(\frac{5}{19}, -\frac{15}{38}, \frac{25}{38}\right), \quad \overline{O_1O} = d(O_1, \Pi) = \left| \frac{-5}{\sqrt{38}} \right| = \frac{5}{\sqrt{38}}$$

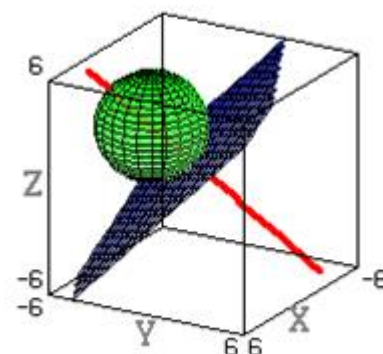
Considerem el triangle rectangle format pels catets $\overline{O_1O}$, O i un punt de la circumferència i d'hipotenusa $R_1 = 5$. Siga R el radi de la circumferència. Aplicant el teorema de Pitàgores:

$$5^2 = R^2 + \left(\frac{5}{\sqrt{38}}\right)^2 \quad R = 5 \cdot \sqrt{\frac{37}{38}} \approx 4.93$$

Abril 27: Proveu que el punt $T(1,0,1)$ pertany al plànel

$$\pi \equiv x - 2y + 2z = 3.$$

Determineu l'equació de l'esfera que passa pel punt $P(1,0,5)$ i és tangent en T al plànel π .



Solució: Substituïm el punt $T(1, 0, 1)$ en l'equació del plànel $\pi \equiv x - 2y + 2z = 3$ i vegeu que es transforma en una igualtat:

$$1 - 2 \cdot 0 + 2 \cdot 1 = 3$$

El centre pertany a la recta r perpendicular al plànel que passa pel punt $T(1, 0, 1)$. El vector director de la recta r és el característic del plànel π , $a = (1, -2, 2)$

$$r \equiv (x, y, z) = (1, 0, 1) + \mu(1, -2, 2)$$

El centre de l'esfera té coordenades:

$$O(1 + \mu, -2\mu, 1 + 2\mu)$$

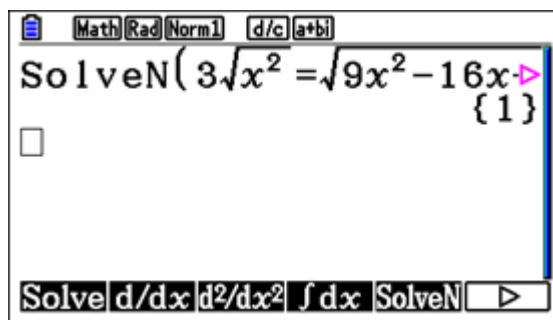
El centre compleix que $d(O, T) = d(O, P) = R$, radi de l'esfera.

$$d(O, T) = \sqrt{(-\mu)^2 + (2\mu)^2 + (-2\mu)^2} = 3\sqrt{\mu^2}$$

$$d(O, P) = \sqrt{(-\mu)^2 + (2\mu)^2 + (4 - 2\mu)^2} = \sqrt{9\mu^2 - 16\mu + 16}$$

$$3\sqrt{\mu^2} = \sqrt{9\mu^2 - 16\mu + 16}$$

Obrim el *Menú Ejec-Mat*: Resolem l'equació:



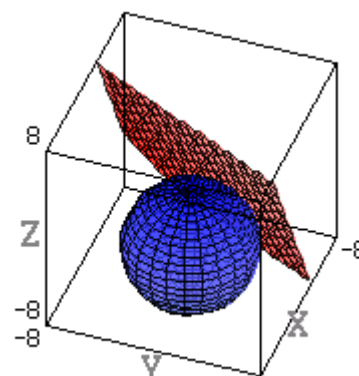
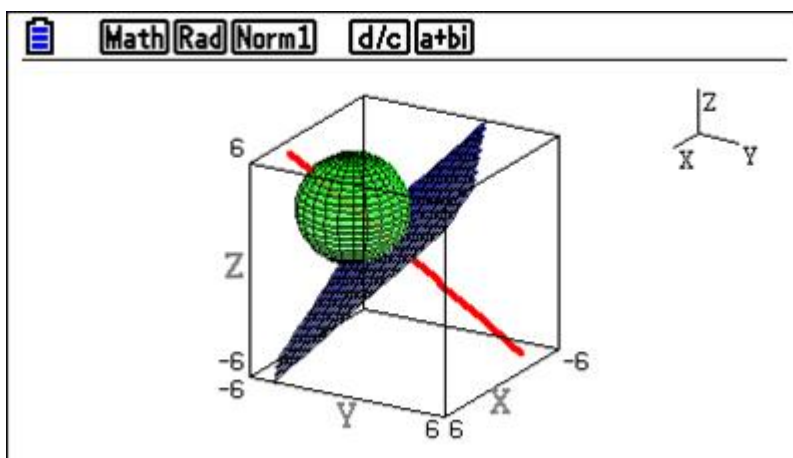
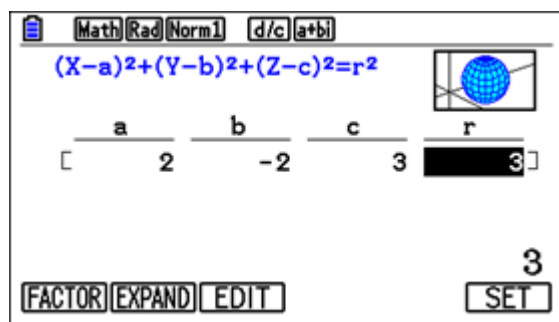
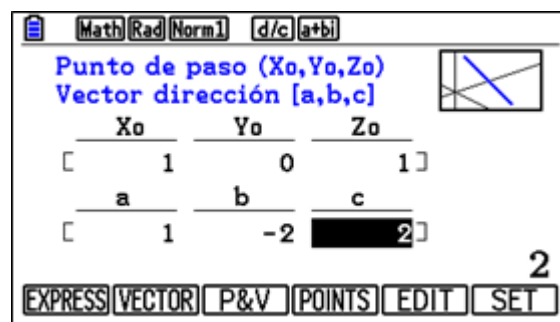
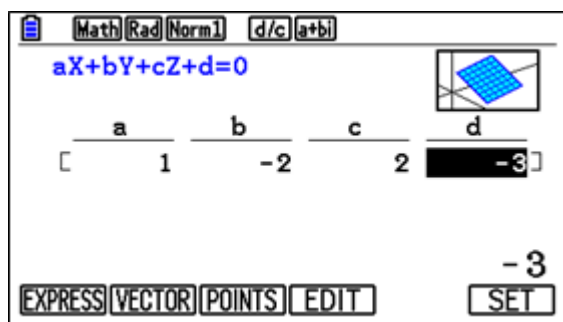
La solució és:

$$\mu = 1$$

El centre de l'esfera és $O(2, -2, 3)$. El radi és $R = 3 \cdot 1 = 3$. L'equació de l'esfera és:

$$(x - 2)^2 + (y + 1)^2 + (z - 3)^2 = 3^2$$

Obrim el *Menú Gráfico 3D*. Definim i representem el plànol $\pi \equiv x - 2y + 2z = 3$ la recta $r \equiv (x, y, z) = (1, 0, 1) + \mu(1, -2, 2)$ i l'esfera $(x - 2)^2 + (y + 1)^2 + (z - 3)^2 = 3^2$



Abril 28: Determineu l'equació del plànol tangent a l'esfera

$$(x - 3)^2 + (y - 1)^2 + (z + 2)^2 = 24$$

que passe pel punt $M(-1, 3, 0)$

Solució: L'esfera $(x-3)^2 + (y-1)^2 + (z+2)^2 = 24$ té centre $O(3,1,-2)$ i radi $r = \sqrt{24}$. El punt $M(-1,3,0)$ pertany a l'esfera ja que $(-1-3)^2 + (3-1)^2 + (0+2)^2 = 24$. El plànel tangent a l'esfera passa pel punt $M(-1,3,0)$ i té vector característic

$$\overrightarrow{OM} = (-4, 2, 2)$$

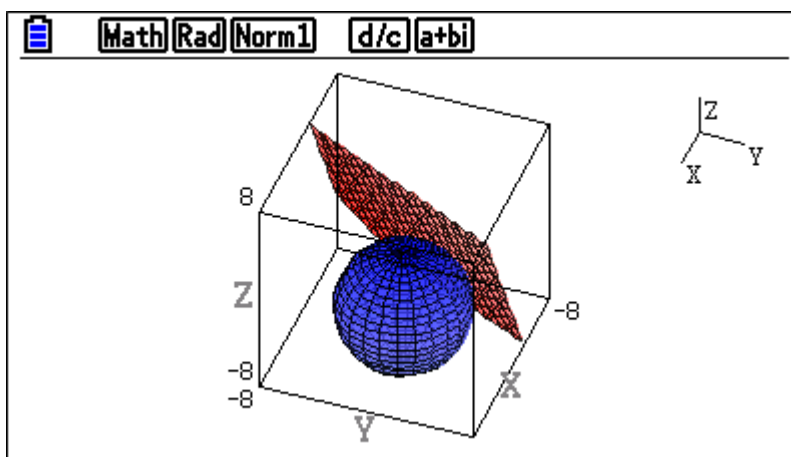
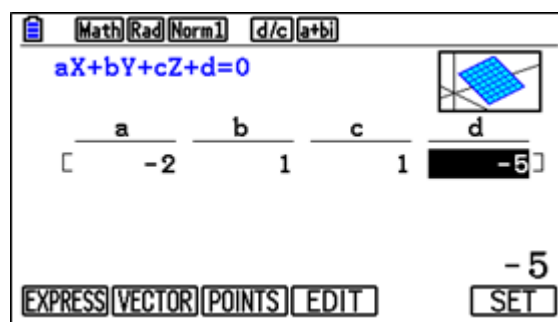
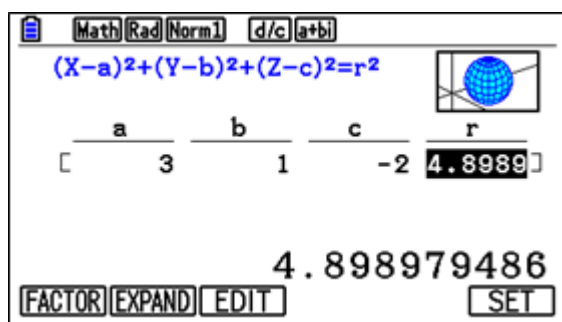
L'equació del plànel és:

$$-4(x+1) + 2(y-3) + 2(z-0) = 0$$

Simplificant:

$$-2x + y + z - 5 = 0$$

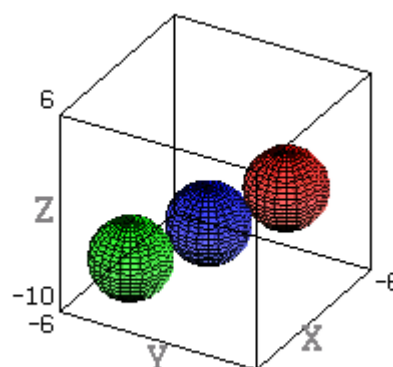
Obrim el *Menú Gráfico 3D*: Definim i representem l'esfera i el plànel.



Abril 29-30: Siga l'esfera

$$x^2 + y^2 + z^2 - 6x - 4y + 8z + 20 = 0$$

Calculeu l'esfera d'igual radi, tangent exterior en el punt $A(1,4,-3)$ de l'esfera. Calculeu l'esfera d'igual radi, tangent exterior en el punt diametralment oposat al punt A l'esfera.



Solució: Completant quadrats:

$$E \equiv (x-3)^2 + (y-2)^2 + (z+4)^2 = 3^2$$

L'esfera E té centre $O(3,2,-4)$ i radi $r = 3$. Notem que el punt $A(1,4,-3)$ pertany a l'esfera E ja que satisfà la seua equació:

$$E \equiv (1-3)^2 + (4-2)^2 + (-3+4)^2 = 3^2$$

El centre O_1 de l'esfera tangent en el punt $A(1, 4, -3)$ compleix: $\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{AO_1}$

$$(-2, 2, 1) = (x - 2, y - 4, z + 3)$$

Resolent l'equació: $O_1(-1, 6, -2)$. L'equació de l'esfera de radi 3 tangent en A a l'esfera E té equació:

$$E_1 \equiv (x + 1)^2 + (y - 6)^2 + (z + 2)^2 = 3^2$$

El punt A' diametralment oposat del punt A compleix: $\overrightarrow{AO} = \overrightarrow{OA'}$

$$(2, -2, -1) = (x - 3, y - 2, z + 4)$$

Resolent l'equació: $A'(5, 0, -5)$.

El centre O_2 de l'esfera tangent en el punt $A'(5, 0, -5)$ compleix:

$$\overrightarrow{O_1O} = \overrightarrow{OO_2}, \quad (4, -4, -2) = (x - 3, y - 2, z + 4)$$

Resolent l'equació: $O_2(7, -2, -6)$

L'equació de l'esfera de radi 3 tangent en A' a l'esfera E té equació:

$$E_1 \equiv (x - 7)^2 + (y + 2)^2 + (z + 6)^2 = 3^2$$

Obrim el *Menú Gráfico 3D*. Definim i representem les tres esferes.

