

SOLUCIONS JULIOL 2022

PROBLEMES PER A NO PERDRE “EL TOC”. AUTOR: RICARD PEIRÓ I ESTRUCH. IES “Abastos”. València

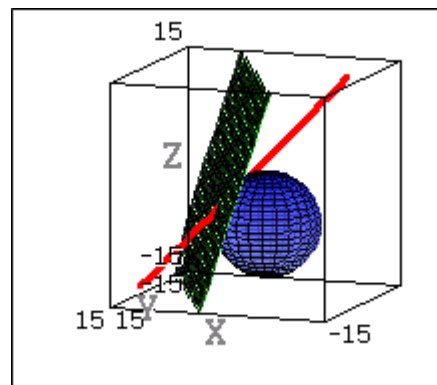
Juliol 1-2: Pels punts intersecció de la recta

$$r \equiv \begin{cases} x = -5 + 3t \\ y = -11 + 5t \\ z = 9 - 4t \end{cases}$$

i de l'esfera d'equació

$$E \equiv (x + 2)^2 + (y - 1)^2 + (z + 5)^2 = 49$$

s'han traçat plànols tangents. Determineu les seues equacions



Solució: El centre de l'esfera és $O(-2, 1, -5)$ i e radi $R = 7$. Determinem els punts intersecció de la recta i l'esfera. Un punt qualsevol de la recta

$$r \equiv \begin{cases} x = -5 + 3t \\ y = -11 + 5t \\ z = 9 - 4t \end{cases}$$

és $P(-5 + 3t, -11 + 5t, 9 - 4t)$. Substituïm les seues coordenades en l'equació de l'esfera:

$$(-3 + 3t)^2 + (-12 + 5t)^2 + (14 - 4t)^2 = 49$$

Simplificant:

$$t^2 - 5t + 6 = 0$$

Resolent l'equació: $t = 2, 3$. Les coordenades dels punts intersecció són:

$$P_1(1, -1, 1), P_2(4, 4, -3)$$

Els vector del plànol característic del plànol tangent a l'esfera en el punt $P_1(1, -1, 1)$ és:

$$\overrightarrow{OP_1} = (3, -2, 6)$$

L'equació del plànol és:

$$\pi_1 \equiv 3(x - 1) - 2(y + 1) + 6(z - 1) = 0$$

Simplificant:

$$\pi_1 \equiv 3x - 2y + 6z - 11 = 0$$

Els vector del plànol característic del plànol tangent a l'esfera en el punt $P_2(4, 4, -3)$ és:

$$\overrightarrow{OP_2} = (6, 3, 2)$$

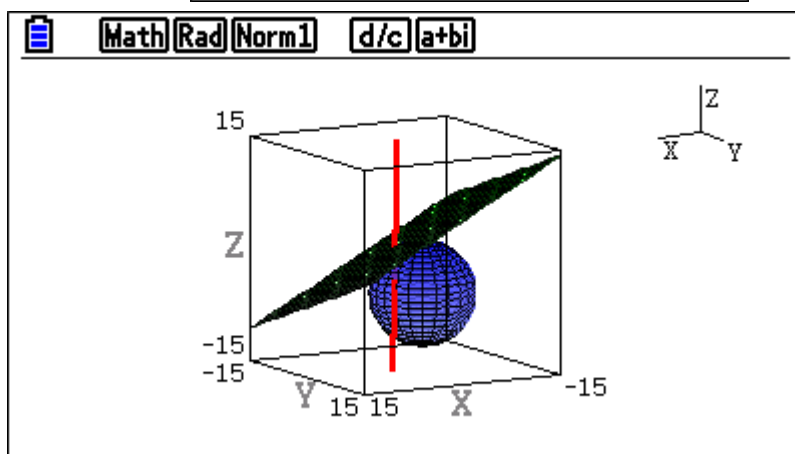
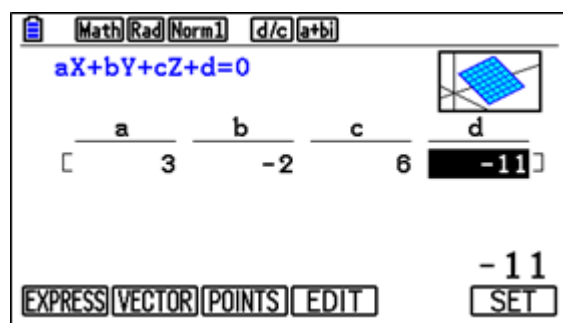
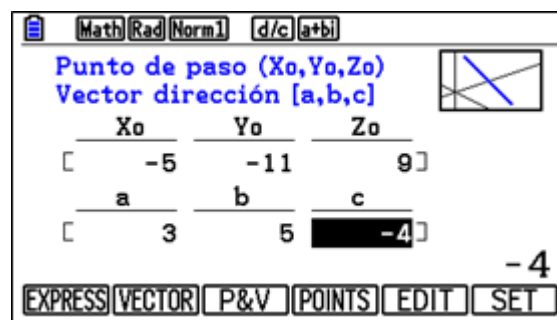
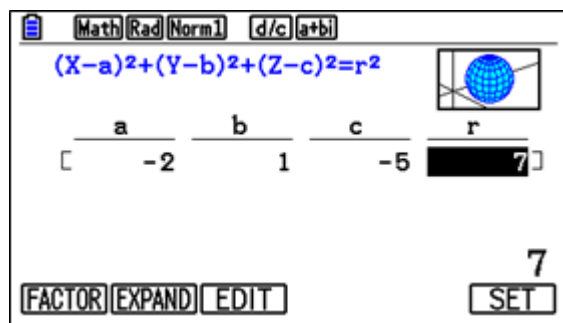
L'equació del plànol és:

$$\pi_2 \equiv 6(x - 4) + 3(y - 4) + 2(z + 3) = 0$$

Simplificant:

$$\pi_2 \equiv 6x + 3y + 2z - 30 = 0$$

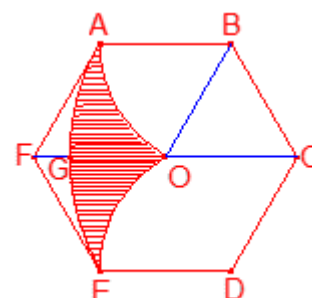
Obrim el *Menú Gráfico 3D*. Definim les equacions de l'esfera, la recta i el plànol $\pi_1 \equiv 3x - 2y + 6z - 11 = 0$



Juliol 4-5: Siga ABCDEF l'hexàgon regular de centre O i costat c. Des dels punts B i D com centres i amb radi c es dibuixen dos arcs de circumferència.

Des del punt C com centre és dibuixa l'arc AGE.

Determineu l'àrea de la zona ombrejada.

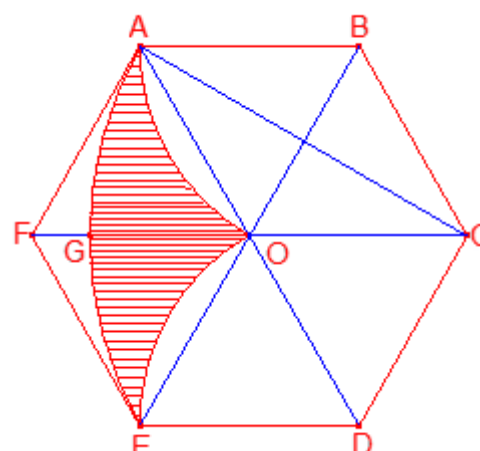


Solució: Tindrem

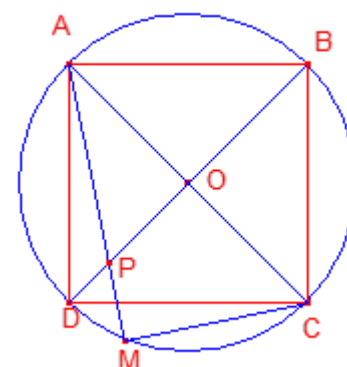
$$\overline{AE} = \sqrt{3}c$$

L'àrea d'una de les lúnules grans és igual a l'àrea del sector de 60° i radi $\sqrt{3}c$ menys l'àrea de dos sectors circulars de 60° de radi c:

$$S_{\text{ombrejada}} = \frac{1}{6}\pi(\sqrt{3}c)^2 - 2\left(\frac{1}{6}\pi c^2\right) = \frac{\pi}{6}c^2.$$



Juliol 6-13: El quadrat ABCD està inscrit en una circumferència de radi 30. La corda $\overline{AM}$ mesura 50 i talla la diagonal $\overline{BD}$ en el punt P. Determineu la mesura del segment $\overline{AP}$.



Solució 1: Aplicant la potencia del punt P respecte de la circumferència:

$$\overline{AP} \cdot \overline{MP} = \overline{DP} \cdot \overline{BP}. \quad \overline{AP} \cdot (30 - \overline{AP}) = \overline{DP} \cdot (60 - \overline{DP}). \quad \overline{AP} \cdot (30 - \overline{AP}) = -\overline{DP}^2 + 60\overline{DP} \quad (1)$$

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\triangle ABD$:

$$\overline{AD} = 30\sqrt{2}$$

Aplicant el teorema del cosinus al triangle $\triangle ADP$:

$$\overline{AP}^2 = (30\sqrt{2})^2 + \overline{DP}^2 - 2(30\sqrt{2})\overline{DP} \frac{\sqrt{2}}{2}. \quad \overline{AP}^2 = (30\sqrt{2})^2 + \overline{DP}^2 - 60\overline{DP} \quad (2)$$

Sumant les expressions (1) i (2):

$$\overline{AP} \cdot (30 - \overline{AP}) + \overline{AP}^2 = 1800. \quad 30\overline{AP} = 1800. \quad \overline{AP} = 36.$$

Solució 2: Tindrem:

$$\overline{OA} = 30, \quad \overline{AC} = 60.$$

Siga O el centre del quadrat. Els triangles rectangles $\triangle APO$, $\triangle ACM$ són semblants. Aplicant el teorema de Tales:

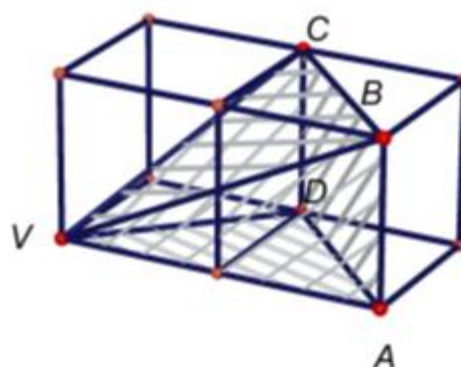
$$\frac{\overline{AP}}{\overline{AC}} = \frac{\overline{OA}}{\overline{AM}}. \quad \frac{\overline{AP}}{60} = \frac{30}{50}.$$

Resolent l'equació:

$$\overline{AP} = 36$$

Juliol 7: Siguen dos cub iguals ajuntats per una cara comuna (veure figura).

Determineu la proporció entre el volum de la piràmide ABCDV i la suma dels volums dels dos cubs.



Solució: Siga $\overline{CD} = a$, aresta dels dos cubs. La suma dels volums dels dos cubs és:

$$V_{2c} = 2a^3$$

El rectangle ABCD és la base de la piràmide ABCDV.

$$\overline{VC} = a\sqrt{3}, \overline{CD} = a, \overline{VD} = a\sqrt{2}$$

Aplicant el teorema invers de Pitàgores, el triangle $\triangle VDC$ és rectangle $\angle VDC = 90^\circ$

$$\overline{VD} = a\sqrt{2}, \overline{AD} = a\sqrt{2}, \overline{VA} = 2a$$

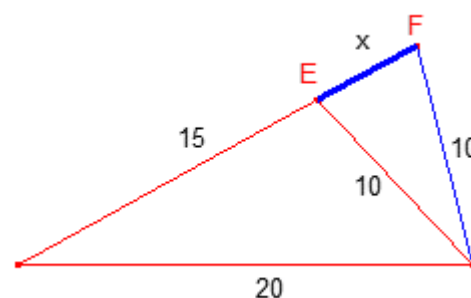
Aplicant el teorema invers de Pitàgores, el triangle $\triangle VDA$ és rectangle $\angle VDA = 90^\circ$. Aleshores, $\overline{VD}$ és perpendicular a la base, altura de la piràmide. El volum de la piràmide és:

$$V_{ABCDV} = \frac{1}{3} \overline{DA} \cdot \overline{DC} \cdot \overline{VD} = \frac{1}{3} a\sqrt{2} \cdot a \cdot a\sqrt{2} = \frac{2}{3} a^3$$

La proporció entre els volums és:

$$\frac{V_{ABCDV}}{V_{2c}} = \frac{\frac{2}{3} a^3}{2a^3} = \frac{1}{3}$$

Juliol 8: En la figura, calculeu la mesura del segment $\overline{EF}$.



Solució: Siga $\overline{PQ} = 20$, $\overline{PE} = 15$, $\overline{QE} = \overline{QF} = 10$. El triangle $\triangle QEF$ és isòsceles. Siga M el punt mig del segment $\overline{EF}$. $\angle EMQ = 90^\circ$. Siga $\overline{QM} = y$. Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\triangle PMQ$:

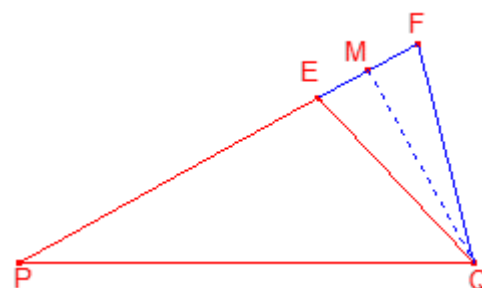
$$20^2 = y^2 + \left(15 + \frac{x}{2}\right)^2.$$

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\triangle EMQ$:

$$10^2 = y^2 + \left(\frac{x}{2}\right)^2.$$

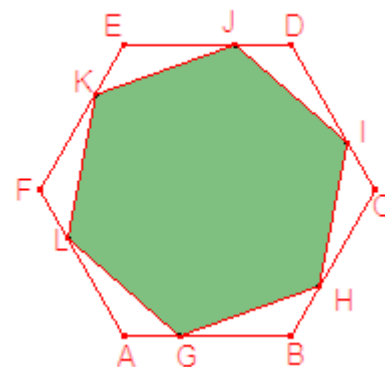
Resolent el sistema format per les dues expressions:

$$x = 5.$$



Juliol 9-16: En un hexàgon regular ABCDEF s'ha inscrit l'hexàgon regular GHIJKL tal que $\overline{AG} = \frac{1}{3} \overline{AB}$.

Calculeu la proporció entre les àrees dels dos hexàgons.



Solució: Siga $\overline{AB} = c$ costat de l'hexàgon ABCDEF.

$$\overline{AG} = \frac{1}{3}c, \overline{AL} = \frac{2}{3}c.$$

$\angle FAG = 120^\circ$, angle interior de l'hexàgon regular. Aplicant el teorema del cosinus al triangle $\triangle LAG$:

$$\overline{LG}^2 = \left(\frac{1}{3}c\right)^2 + \left(\frac{2}{3}c\right)^2 - 2 \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3}c^2 \left(\frac{-1}{2}\right) = \frac{7}{9}c^2.$$

La proporció de les àrees de dos hexàgons regulars és igual al quadrat de la proporció dels costats.

$$\frac{S_{GHIJKL}}{S_{ABCDEF}} = \left(\frac{\overline{LG}}{\overline{AB}}\right)^2 = \frac{7}{9}.$$

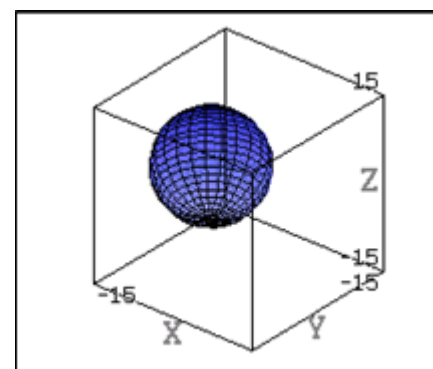
Generalització: En un hexàgon regular ABCDEF s'ha inscrit l'hexàgon regular GHIJKL tal que $\overline{AG} = k \cdot \overline{AB}$.

Calculeu la proporció entre les àrees dels dos hexàgons.

Solució:

$$\frac{S_{GHIJKL}}{S_{ABCDEF}} = k^2 - k + 1.$$

Juliol 11: Determineu l'equació de l'esfera que passa pels punts $A(1, -2, -1), B(-5, 10, -1), C(4, 1, 11), D(-8, -2, 2)$

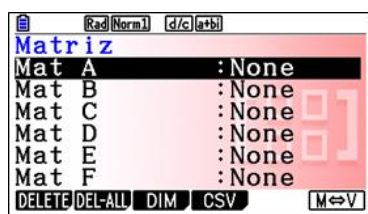


Solució 1: Vegem que els quatre punts no són coplanaris. Obrim el *Menú Ejec-Mat*

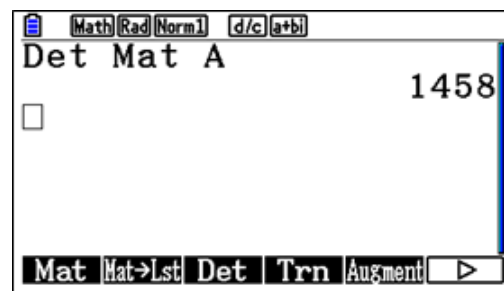
Vegem que el determinant de la matriu

$$M = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 & 1 \\ -5 & 10 & -1 & 1 \\ 4 & 1 & 11 & 1 \\ -8 & -2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

és distint de zero.



	1	2	3	4
1	1	-2	-1	1
2	-5	10	-1	1
3	4	1	11	1
4	-8	-2	2	1



Calculem els punts migs dels segments $\overline{AB}$, $\overline{AC}$, $\overline{AD}$

El punt mig del segment $\overline{AB}$ és $E(-2, 4, -1)$

El punt mig del segment $\overline{AC}$ és $F\left(\frac{5}{2}, \frac{-1}{2}, 5\right)$

El punt mig del segment $\overline{AD}$ és $G\left(\frac{-7}{2}, -2, \frac{1}{2}\right)$

Calculem les components dels vectors $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AD}$

$$\overrightarrow{AB} = (-6, -12, 0)$$

$$\overrightarrow{AC} = (3, 3, 12)$$

$$\overrightarrow{AD} = (-9, 0, 3)$$

El plànel medidor del segment $\overline{AB}$ té equació:

$$\Pi_1 \equiv (x + 2) + 2(y - 4) = 0$$

$$\Pi_1 \equiv x + 2y = 6$$

El plànel medidor del segment $\overline{AC}$ té equació:

$$\Pi_2 \equiv \left(x - \frac{5}{2}\right) + \left(y + \frac{1}{2}\right) + 4(z - 5) = 0$$

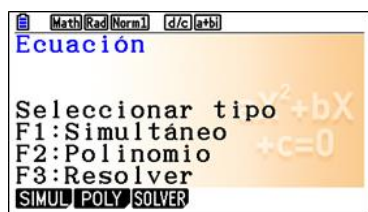
$$\Pi_2 \equiv x + y + 4z = 22$$

El plànel medidor del segment $\overline{AD}$ té equació:

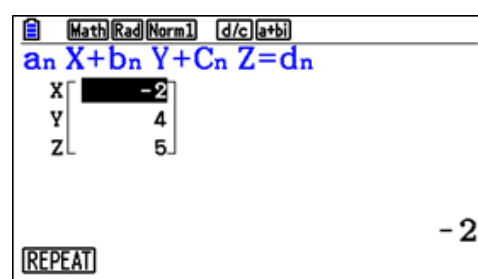
$$\Pi_3 \equiv -3\left(x + \frac{7}{2}\right) + \left(z - \frac{1}{2}\right) = 0$$

$$\Pi_3 \equiv -3x + z = 11$$

El centre de l'esfera és igual al punt intersecció dels tres plànol. Obrim el *Menú Ecuación*:

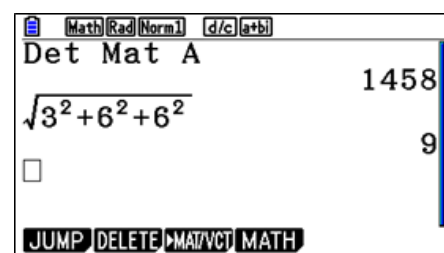


	a	b	c	d
1	1	2	0	6
2	1	1	4	22
3	-3	0	1	11



El centre de l'esfera és el punt $O(-2, 4, 5)$. El radi de l'esfera és:

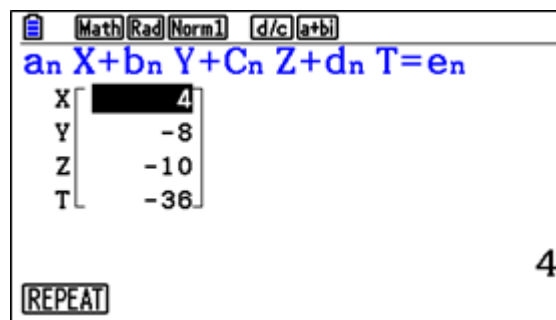
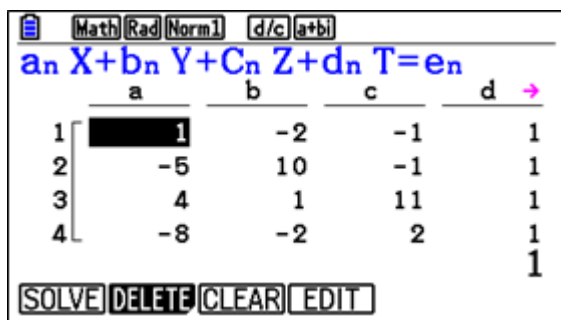
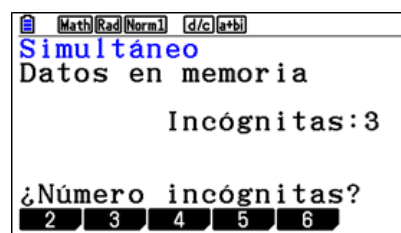
$$r = \overline{OA} = \sqrt{(1 + 2)^2 + (-2 - 4)^2 + (-1 - 5)^2}$$



Solució 2: L'equació general de l'esfera és:

$$x^2 + y^2 + z^2 + Ax + By + Cz + D = 0$$

Substituïm les coordenades dels quatre punts en l'equació general i resollem el sistema format per les 4 equacions amb les incògnites A, B, C, D. Obrim el *Menú Ecuación*:



La solució és:

$$\begin{cases} A = 4 \\ B = -8 \\ C = -10 \\ D = -36 \end{cases}$$

L'equació general de l'esfera és:

$$x^2 + y^2 + z^2 + 4x - 8y - 10z + 36 = 0$$

Completant quadrats:

$$(x + 2)^2 + (y - 4)^2 + (z - 5)^2 = 36 + 2^2 + 4^2 + 5^2; \quad (x + 2)^2 + (y - 4)^2 + (z - 5)^2 = 9^2$$

El centre de l'esfera és el punt $O(-2, 4, 5)$ i el radi $r = 9$

Juliol 12: La figura està formada per un cub d'aresta a i dues piràmides quadrangulars regulars d'altura a .

Determineu l'àrea i el volum de la figura.



Solució: El volum és igual al volum del cub d'aresta a i de dues piràmides de base quadrada d'aresta a i altura a .

$$V = a^3 + 2 \left(\frac{1}{3} a^2 \cdot a \right) = \frac{5}{3} a^3$$

L'apotema x d'una cara de les piràmides és la hipotenusa d'un triangle rectangle de catets $\frac{1}{2}a$, a . Aplicant el teorema de Pitàgores:

$$x = \frac{\sqrt{5}}{2} a$$

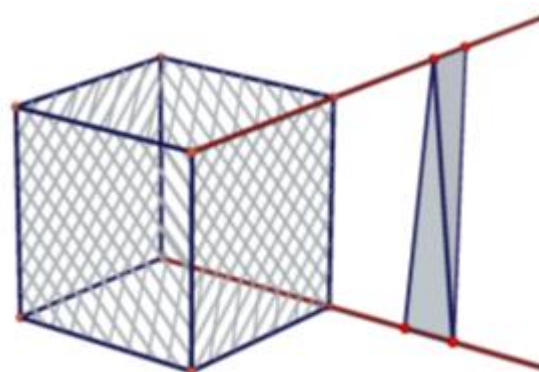
L'àrea de la figura és igual a la suma de 4 quadrats de costat a i 8 triangles de base a i altura l'apotema $x = \frac{\sqrt{5}}{2} a$.

$$S = 4 \cdot a^2 + 8 \cdot \left(\frac{1}{2} a \cdot \frac{\sqrt{5}}{2} a \right) = (4 + 2\sqrt{5})a^2$$

Juliol 14-15: Dues arestes que es creuen d'un cub s'estenen.

En cada extensió s'agafa un segment d'una unitat.

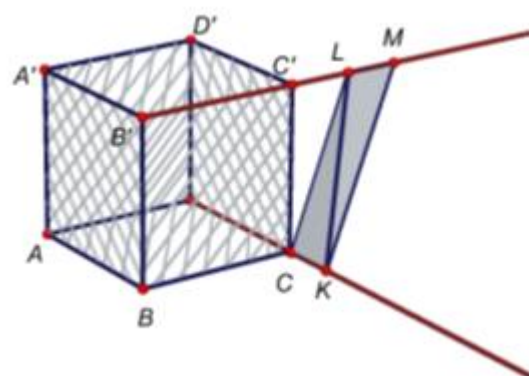
On han d'estar situats els segments a fi que el volum del tetraedre format pels 4 extrems del segment siga màxim.



Solució: Siga el cub $ABCD A' B' C' D'$ d'aresta $\overline{AB} = a$ amb les següents coordenades cartesianes:

$$A(0, 0, 0), B(0, a, 0), C(a, a, 0), D(a, 0, 0), A'(0, 0, a), \\ B'(0, a, a), C'(a, a, a), D'(a, 0, a)$$

Podem suposar sense perdre generalitat que C és un vèrtex del tetraedre. Siga $K(a, a+1, 0)$, $L(x, a, a)$, $M(x+1, a, a)$. Calculem el volum del tetraedre $CKLM$:

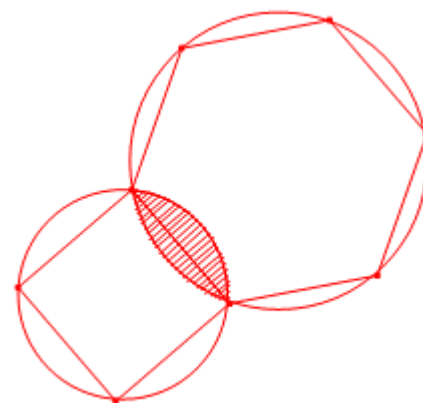


$$V_{CKLM} = \frac{1}{6} \left| \begin{bmatrix} \overrightarrow{CK} & \overrightarrow{CL} & \overrightarrow{CM} \end{bmatrix} \right|. \quad V_{CKLM} = \frac{1}{6} \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ x-a & 0 & a \\ x+1-a & 0 & a \end{vmatrix} = \frac{a}{6}.$$

El volum no depèn de la posició dels dos segments

Juliol 18-25: Sobre un costat d'un hexàgon regular de costat c s'ha dibuixat un quadrat (veure figura).

Calculeu l'àrea de la intersecció de les circumferències circumscrites als dos polígons regulars.



Solució: L'àrea és igual a la suma de les àrees de dos segments circulars, un de radi c i angle 60° i un de radi $\frac{\sqrt{2}}{2}c$ i radi 90° .

$$S = \left(\frac{1}{6} \pi c^2 - \frac{\sqrt{3}}{4} c^2 \right) + \left(\frac{1}{4} \pi \left(\frac{\sqrt{2}}{2} c \right)^2 - \frac{1}{4} c^2 \right) = \frac{7\pi - 6\sqrt{3} - 6}{24} c^2.$$

Juliol 19-20: Donades les esferes

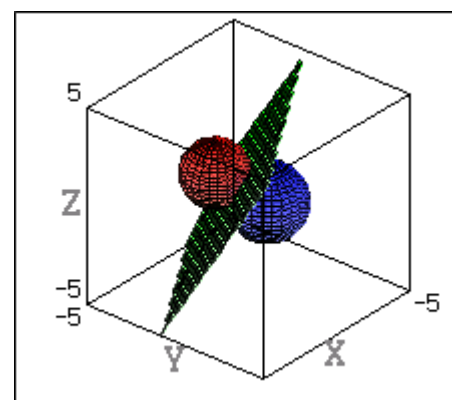
$$E_1 \equiv 2x^2 + 2y^2 + 2z^2 + 3x - 2y + z - 5 = 0,$$

$$E_2 \equiv x^2 + y^2 + z^2 - x + 3y - 2z + 1 = 0$$

Determineu la posició relativa de les dues esferes.

Si són secants, determineu el pla on es tallen.

Determineu el centre i el radi de la circumferència intersecció de les dues esferes.



Solució: Completant quadrats:

$$E_1 \equiv \left(x + \frac{3}{4} \right)^2 + \left(y - \frac{1}{2} \right)^2 + \left(z + \frac{1}{4} \right)^2 = \frac{5}{2} + \frac{3}{16} + \frac{1}{4} + \frac{1}{16} = \frac{54}{16}$$

El centre té coordenades, $O_1 \left(-\frac{3}{4}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{4} \right)$ i el radi és $R_1 = \frac{3}{4}\sqrt{6}$

$$E_2 \equiv \left(x - \frac{1}{2} \right)^2 + \left(y + \frac{3}{2} \right)^2 + (z - 1)^2 = -1 + \frac{1}{4} + \frac{9}{4} + 1 = \frac{10}{4}$$

El centre té coordenades, $O_2 \left(\frac{1}{2}, -\frac{3}{2}, 1 \right)$ i el radi és $R_2 = \frac{1}{2}\sqrt{10}$

$$\overrightarrow{O_1 O_2} = \left(\frac{5}{4}, 2, \frac{5}{4} \right)$$

La distància entre els centres és:

$$\overline{O_1 O_2} = \frac{\sqrt{114}}{4} \quad \overline{O_1 O_2} = \frac{\sqrt{114}}{4} < R_1 + R_2 = \frac{3\sqrt{6} + 2\sqrt{10}}{4}$$

$$\overline{O_1 O_2} = \frac{\sqrt{114}}{4} > |R_1 - R_2| = \frac{3\sqrt{6} - 2\sqrt{10}}{4}$$

$\frac{3\sqrt{6}}{4} \rightarrow A$
 $\frac{\sqrt{10}}{2} \rightarrow B$
 JUMP DELETE MAT/VCT MATH

$\frac{\sqrt{114}}{4} \rightarrow C$
 JUMP DELETE MAT/VCT MATH

$\frac{\sqrt{114}}{4}$
 $A+B-C$
 0.7489865742
 JUMP DELETE MAT/VCT MATH

$\frac{\sqrt{114}}{4}$
 $A+B-C$
 0.7489865742
 $|A-B|-C$
 -2.413291086
 Abs Int Frac Rnd Intg

Aleshores, les dues esferes són secants.

Calculem $E_1 - 2 \cdot E_2$ que ens dona el plànel intersecció de les dues esferes.

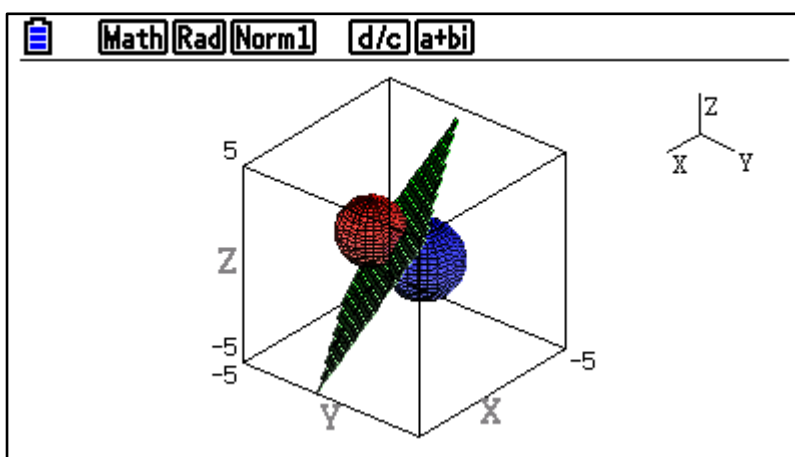
$$E_1 - 2 \cdot E_2 \equiv 5x - 8y + 5z - 7 = 0$$

Obrim el *Menú Gráfico 3D*. Definim i representem les dues esferes i el plànel intersecció.

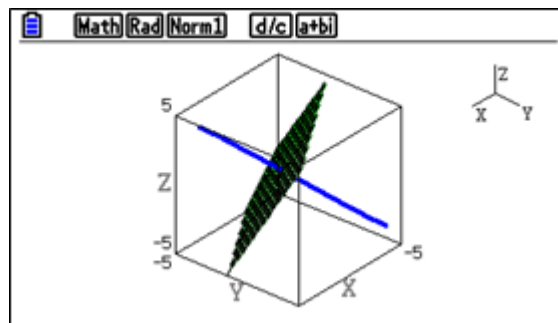
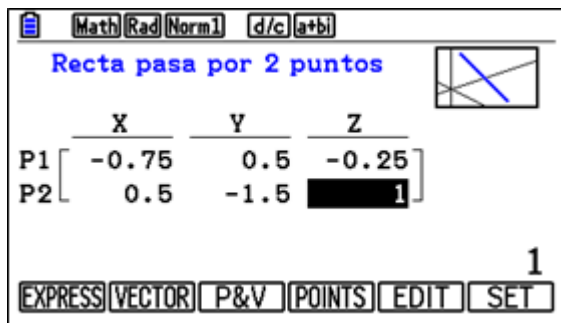
$(X-a)^2+(Y-b)^2+(Z-c)^2=r^2$
 $\frac{a}{-0.75} \quad \frac{b}{0.5} \quad \frac{c}{-0.25} \quad \frac{r}{1.8371}$
 1.837117307
 FACTOR EXPAND EDIT SET

$(X-a)^2+(Y-b)^2+(Z-c)^2=r^2$
 $\frac{a}{0.5} \quad \frac{b}{-1.5} \quad \frac{c}{1} \quad \frac{r}{1.5811}$
 1.58113883
 FACTOR EXPAND EDIT SET

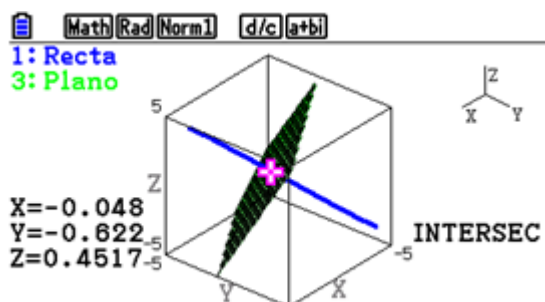
$aX+bY+cZ+d=0$
 $\frac{a}{5} \quad \frac{b}{-8} \quad \frac{c}{5} \quad \frac{d}{-7}$
 -7
 EXPRESS VECTOR POINTS EDIT SET



Definim i representem la recta que passa pels centres $O_1 \left(-\frac{3}{4}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{4}\right)$, $O_2 \left(\frac{1}{2}, -\frac{3}{2}, 1\right)$



El centre de la circumferència intersecció és calcula efectuant la intersecció de la recta i el plànol. Amb la funció *G-Solv*, determinem la intersecció:



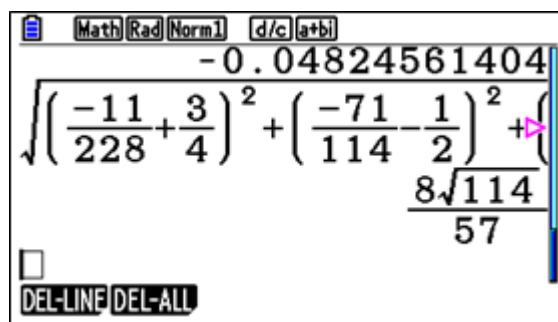
El centre de la circumferència es:

$$O\left(\frac{-11}{228}, \frac{-71}{114}, \frac{103}{228}\right)$$

Calculem

$$\overline{O_1O} = \sqrt{\left(\frac{-11}{228} + \frac{3}{4}\right)^2 + \left(\frac{-71}{114} + \frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{103}{228} + \frac{1}{4}\right)^2}$$

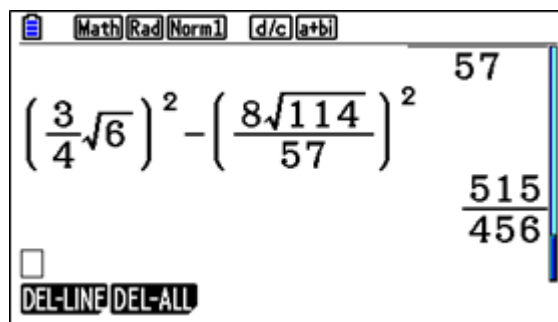
$$= \frac{8\sqrt{114}}{57}$$



Siga R el radi de la circumferència intersecció de les dues esferes. Per calcular el radi R aplicarem el teorema de Pitàgores al triangle rectangle de catets, R, $\overline{O_1O} = \frac{8\sqrt{114}}{57}$ i hipotenusa $R_1 = \frac{3}{4}\sqrt{6}$

$$\left(\frac{3}{4}\sqrt{6}\right)^2 = R^2 + \left(\frac{8\sqrt{114}}{57}\right)^2 ; R^2 = \frac{515}{456}$$

El radi de la circumferència és $R = \sqrt{\frac{515}{456}}$

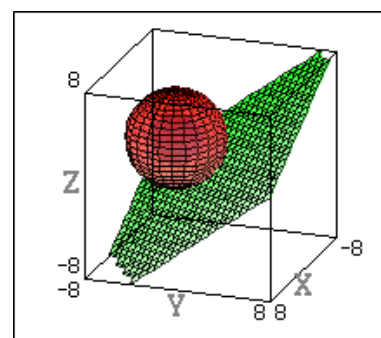


Juliol 21-28: Siga l'esfera

$$x^2 + y^2 + z^2 + 6y - 4z + 9 = 0$$

Determineu l'equació de l'esfera concèntrica amb ella que és tangent al plànol

$$2x - 3y + 2z + 4 = 0$$



Solució: Completant quadrats en l'esfera $x^2 + y^2 + z^2 + 6y - 4z + 9 = 0$

$$x^2 + (y + 3)^2 + (z - 2)^2 = 2^2$$

El centre de l'esfera és el punt $O(0, -3, 2)$ i el radi $r = 2$

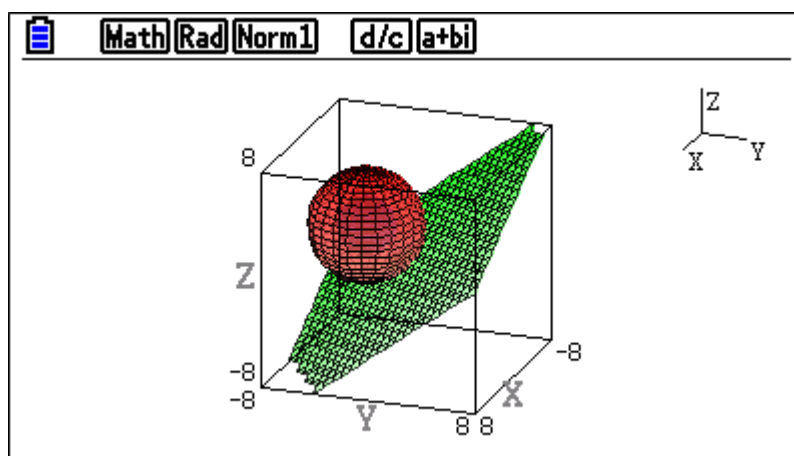
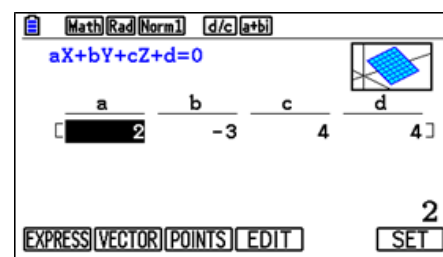
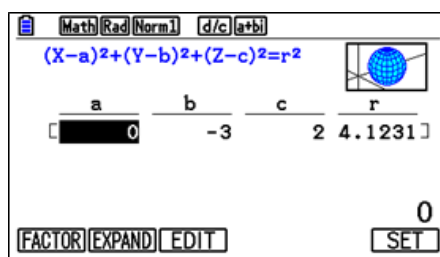
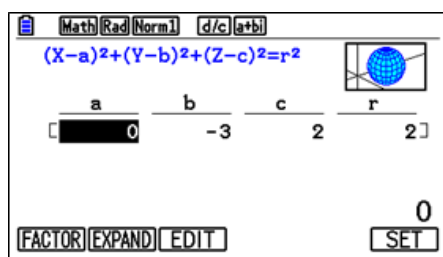
El radi de l'esfera concèntrica tangent al plànel $\Pi \equiv 2x - 3y + 2z + 4 = 0$ té radi

$$R = d(O, \Pi); \quad R = d(O, \Pi) = \left| \frac{2 \cdot 0 - 3 \cdot (-3) + 2 \cdot 2 + 4}{\sqrt{2^2 + (-3)^2 + 2^2}} \right| = \sqrt{17}$$

L'equació de l'esfera:

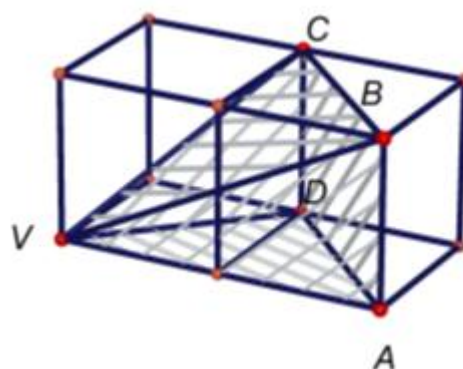
$$x^2 + (y + 3)^2 + (z - 2)^2 = 17$$

Obrim el *Menú Gráfico 3D*. Definim i representem les dues esferes i el plànel



Juliol 22: Siguen dos cub iguals ajuntats per una cara comuna (veure figura).

Determineu la proporció entre el volum de la piràmide ABCDV i la suma dels volums dels dos cubs.



Solució: Siga $\overline{CD} = a$, aresta dels dos cubs. La suma dels volums dels dos cubs és:

$$V_{2c} = 2a^3$$

El rectangle ABCD és la base de la piràmide ABCDV.

$$\overline{VC} = a\sqrt{3}, \overline{CD} = a, \overline{VD} = a\sqrt{2}$$

Aplicant el teorema invers de Pitàgores, el triangle $\triangle VDC$ és rectangle $\angle VDC = 90^\circ$

$$\overline{VD} = a\sqrt{2}, \overline{AD} = a\sqrt{2}, \overline{VA} = 2a$$

Aplicant el teorema invers de Pitàgores, el triangle $\triangle VDA$ és rectangle $\angle VDA = 90^\circ$. Aleshores, $\overline{VD}$ és perpendicular a la base, altura de la piràmide. El volum de la piràmide és:

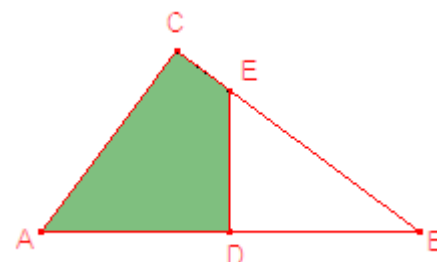
$$V_{ABCDV} = \frac{1}{3} \overline{DA} \cdot \overline{DC} \cdot \overline{VD} = \frac{1}{3} a\sqrt{2} \cdot a \cdot a\sqrt{2} = \frac{2}{3} a^3$$

La proporció entre els volums és:

$$\frac{V_{ABCDV}}{V_{2c}} = \frac{\frac{2}{3} a^3}{2a^3} = \frac{1}{3}$$

Juliol 23: En la figura, $\triangle ABC$ és un triangle rectangle $C = 90^\circ$, $\overline{AD} = \overline{BD}$ i $\overline{DE} \perp \overline{AB}$.

Si $\overline{AC} = 12$ i $\overline{AB} = 20$, calculeu l'àrea del quadrilàter ADEC.



Solució: Tenim:

$$\overline{AD} = \overline{BD} = 10.$$

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\triangle ABC$:

$$\overline{BC} = 16.$$

Els triangles rectangles $\triangle ABC$, $\triangle EBD$ són semblants. Aplicant el teorema de Tales:

$$\frac{\overline{DE}}{10} = \frac{12}{16}. \text{ Aleshores, } \overline{DE} = \frac{15}{2}. \quad \frac{\overline{BE}}{10} = \frac{20}{16}. \text{ Aleshores, } \overline{BE} = \frac{25}{2}. \quad \overline{CE} = \overline{BC} - \overline{BE} = 16 - \frac{25}{2} = \frac{7}{2}.$$

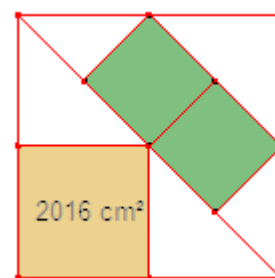
L'àrea del quadrilàter ADEC és igual a la suma de les àrees dels triangles rectangles $\triangle ADE$ i $\triangle ACE$:

$$S_{ADEC} = \frac{1}{2} \cdot 10 \cdot \frac{15}{2} + \frac{1}{2} \cdot 12 \cdot \frac{7}{2} = \frac{117}{2} = 58.5.$$

Juliol 26-27: Un quadrat s'ha partit en dos per la diagonal.

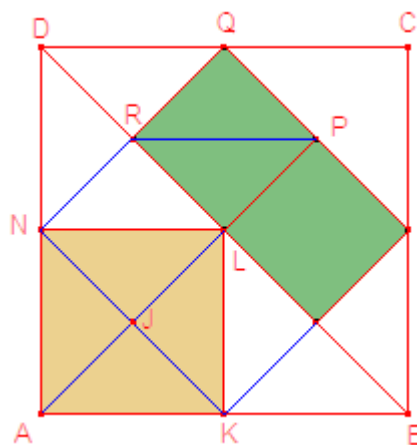
En la part inferior s'ha inscrit un quadrat d'àrea 2016 cm^2 i en la part superior s'ha inscrit dos quadrats menuts idèntics.

Quina és l'àrea de cadascun dels dos quadrats menuts?



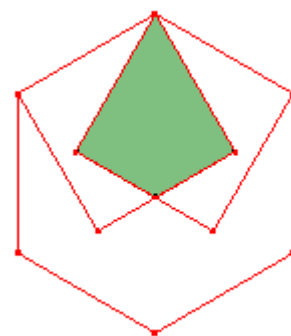
Solució:

$$S_{LPQR} = \frac{1}{2} S_{AKLN} = 1008 \text{ cm}^2.$$



Juliol 29-30: En dos costats consecutius d'un hexàgon regular s'ha dibuixat, cap a l'interior de l'hexàgon, dos quadrats.

Determineu la proporció entre l'àrea de la intersecció dels dos quadrats i l'àrea de l'hexàgon regular.



Solució: Siga ABCDEF l'hexàgon regular de costat 1.

$$\overline{DG} = \overline{AB} = 1$$

Siga DGHI la intersecció dels dos quadrats.

$$\angle EDG = \angle EDC - \angle GDC = 120^\circ - 90^\circ = 30^\circ. \quad \angle GDI = \angle EDC - 2\angle EDG = 60^\circ.$$

$$\angle GDH = \frac{1}{2} \angle GDI = 30^\circ. \quad \overline{GH} = \frac{\sqrt{3}}{3} \overline{DG} = \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

L'àrea de la intersecció dels dos quadrats és:

$$S_{DGHI} = \overline{GH} \cdot \overline{DG} = \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

L'àrea de l'hexàgon regular és:

$$S_{ABCDEF} = 6 \left(\frac{\sqrt{3}}{4} 1^2 \right) = \frac{3\sqrt{3}}{2}.$$

La proporció entre les dues àrees és:

$$\frac{S_{DGHI}}{S_{ABCDEF}} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{3}}{\frac{3\sqrt{3}}{2}} = \frac{2}{9}.$$

