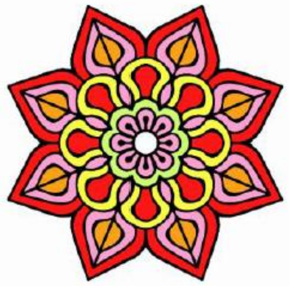
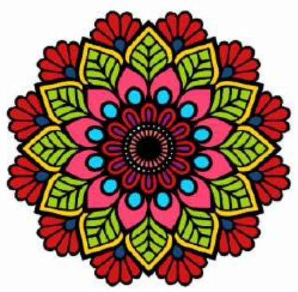
JUNIO

LUNES | MARTES | MIÉRCOLES | JUEVES | VIERNES | SÁBADO | DO.


1 Sea ABCDEFG un heptágono regular de lado 1. Demostrar que se cumple la relación:

$$\frac{1}{AC}+\frac{1}{AD}=1$$

2 Se escriben en la pizarra 5 enteros positivos (no necesariamente distintos) y se calculan todas las posibles sumas de parejas de estos números. Los únicos resultados obtenidos son 31, 38 y 45 (algunos de ellos, varias veces). ¿Cuáles son esos 5 números?

3 Sea S un conjunto de n elementos. Sea $p_n(k)$ el número de permutaciones de los elementos de S que dejan exactamente k elementos fijos. Demostrar:

$$\sum_{k=0}^{n} k p_n(k) = n!$$

IMO, 1987, PROBLEM 1

4

5 Si α, β y γ ∈ℝ son los ángulos de un triángulo no rectángulo, demostrar que:

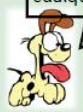
$\tan(\alpha) + \tan(\beta) + \tan(\gamma) = \tan(\alpha)\cdot\tan(\beta)\cdot\tan(\gamma)$

6 ¿Cuántos divisores impares tiene 20!?

7 Encontrar todos los polinomios P(x) y Q(x) con coeficientes reales que cumplen:

$P(Q(x)) = (x-1)\cdot(x-2)\cdot(x-3)\cdot(x-4)$

8 En cada casilla de un tablero mxn se encuentra un número real. Se permite cambiar todos los números de una fila o columna tantas veces como queramos. Demostrar que puede conseguirse que las sumas de los elementos de cada fila y cada columna sean no negativas para cualquier configuración inicial



ALL SOVIET UNION COMPETITION 1961. P 7

9 Sea a_1, a_2, …. una PA no constante de números reales: Supongamos que existen enteros primos entre si p, q > 1 para los que a_1^2, a_{p+1}^2 y a_{q+1}^2 son también elementos de la misma sucesión. Demostrar que todos los términos de la sucesión son enteros

Indian National Mathematical Olympiad, 2016, problem 6

10 Sean x, y y z reales distintos y distintos de 1 y además:

$$\frac{yz-x^2}{1-x}=\frac{xz-y^2}{1-y}$$

demostrar que ambas fracciones son iguales a x + y + z

Olimpiada Iberoamericana, 1985, problema 4

11

12 Consideremos un polígono convexo de área A y perímetro P. Demostrar que existe un círculo de radio A/P contenido en el interior del polígono

ALL SOVIET UNION COMPETITION 1966, P 7

13 Sea n∈ℕ. Demostrar que la suma de todas las fracciones 1/(pq) donde p y q son primos relativos tales que 1≤p<q≤n y p+q > n es 1/2

14 Sobre una mesa hay 100 tarjetas numeradas desde el 1 al 100. Se eligen 25 de ellas al azar, ¿cuál es la probabilidad de que la suma de los números elegidos sea par?

15 Demostrar que si x, y ∈]-1, 1[, entonces:

$$\left|\frac{x-y}{1-xy}\right| \le \frac{|x|+|y|}{1+|xy|}$$

OME, fase local 2004, problema 7

16 Consideremos el conjunto:

S = {1, ½, 1/3, ¼, ⋯⋯ , 1/1000}

Repetimos el siguiente proceso hasta que solo quede un elemento en S: elegimos dos números x, y∈S y los sustituimos por el número x + y + xy. Demostrar que el último número no depende de los números elegidos en cada paso y calcularlo.

17 Hallar todas las formas de expresar 2003 como suma de los cuadrados de dos enteros.

OME, fase local 2004, problema 9

18

19 Dado un conjunto M de 1985 enteros positivos, ninguno de los cuales tiene un divisor primo mayor que 26, demostrar que podemos encontrar 4 elementos distintos de M cuya media geométrica es un entero

IMO, 1985, P 4

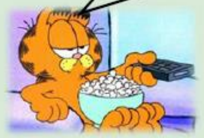
20 Diremos que una circunferencia es un separador de un conjunto de 5 puntos en el plano si pasa por 3 de ellos y los otros dos, uno está dentro y otro está fuera. Demostrar que todo conjunto de 5 puntos que no contiene 3 puntos alienados ni 4 concíclicos tiene exactamente 4 separadores

IMO, SHORTLIST GEOMETRY, 1999, P 2

21 Hallar el valor del real m para que el polinomio

$$x^4-\frac{3\sqrt{2}}{2}x^3+3x^2+mx+2$$

tenga dos raíces reales, una inversa de la otra

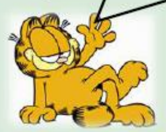


22 En un cuadrado ABCD se traza una circunferencia que pasa por el vértice A y por los puntos medios de BC y CD. Determinar si es mayor la longitud de la circunferencia o el perímetro del cuadrado.

23 Sea P un punto interior de un triángulo equilátero ΔABC tal que PA = 5, PB = 7 y PC = 8. Hallar la longitud de un lado del ΔABC.

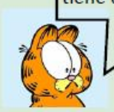
Olimpiada Iberoamericana, 1985, problema 2

24 Sea P(x) un polinomio con coeficientes enteros tal que la ecuación P(x) = 7 tiene al menos cuatro soluciones enteras. Demostrar que la ecuación P(x) = 14 no tiene soluciones enteras.



25

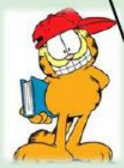
26 Dado k∈ℕ, sea A_k el subconjunto de {k+1, k+2,..,2k} formado por los números que en base 2 tienen exactamente tres unos y sea f(k) el número de elementos de A_k. Demostrar que f(k)=m tiene al menos una solución ∀m∈ℕ. Hallar los m∈ℕ para los que la ecuación tiene una única solución.



27 Sean p y q enteros tales que:

$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots-\frac{1}{1318}+\frac{1}{1319}=\frac{p}{q}$$

Demostrar que 1979|p



IMO, 1979, PROBLEM 1

28 Se considera un triángulo cuyos lados son los lados de un pentágono, hexágono y decágono regulares inscritos en circunferencias de radio 1. Demostrar que el triángulo es rectángulo

29 Supongamos que α y β son reales que cumplen las ecuaciones:

$$\alpha^3-3\alpha^2+5\alpha-17=0$$
$$\beta^3-3\beta^2+5\beta+11=0$$

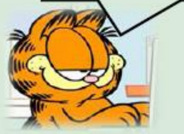
Calcular α + β

30 Sean x, y y z tres reales tales que:

$$0<x<y<z<\frac{\pi}{2}$$

Demostrar que:

$$\frac{\pi}{2}+2\sin x\cos y+2\sin y\cos z>\sin 2x+\sin 2y+\sin 2z$$



Olimpiada Iberoamericana, 1989, problema 2