

J U N Y	DILLUNS		DIMARTS		DIMECRES		DIJOUS		DIVENDRES		DISSABTE		DG.	
							1 Siga ABCDEFG un heptàgon regular de costat 1. Demostreu que es compleix la relació: $\frac{1}{AC} + \frac{1}{AD} = 1$ 		2 S'escriuen en la pissarra 5 enters positius (no necessàriament diferents) i es calculen totes les possibles sumes de parelles d'aquests números. Els únics resultats obtinguts són 31, 38 i 45 (alguns d'ells, diverses vegades). Quins són aquests 5 números? 		3 Siga S un conjunt de n elements. Siga $p_n(k)$ el nombre de permutacions dels elements de S que deixen exactament k elements fixos. Demostreu: $\sum_{k=0}^n k p_n(k) = n!$  IMO, 1987, PROBLEM 1		4	
	5 Si $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ són els angles d'un triangle no rectangle, demostreu que: $\tan(\alpha) + \tan(\beta) + \tan(\gamma) = \tan(\alpha) \cdot \tan(\beta) \cdot \tan(\gamma)$ 		6 Quants divisors imparells té 20!? 		7 Trobeu tots els polinomis $P(x)$ i $Q(x)$ amb coeficients reals que compleixen: $P(Q(x)) = (x-1) \cdot (x-2) \cdot (x-3) \cdot (x-4)$ 		8 En cada casella d'un tauler $m \times n$ es troba un nombre real. Es permet canviar tots els números d'una fila o columna tantes vegades com vulguem. Demostreu que pot aconseguir-se que les sumes dels elements de cada fila i cada columna siguin no negatives per a qualsevol configuració inicial  ALL SOVIET UNION COMPETITION 1961. P 7		9 Siga $a_1, a_2, \dots$ una PA no constant de nombres reals. Suposem que existeixen enters primers entre si $p, q > 1$ per a els que a_1^2, a_{p+1}^2 i a_{q+1}^2 són també elements de la mateixa successió. Demostreu que tots els termes de la successió són enters  Indian National Mathematical Olympiad, 2016, problem 6		10 Siguen x, y i z reals distints i distints d'1 i a més: $\frac{yz - x^2}{1 - x} = \frac{xz - y^2}{1 - y}$ demostreu que les dues fraccions són iguals a $x + y + z$  Olimpiada Iberoamericana, 1985, problema 4		11	
	12 Considerem un polígon convex d'àrea A i perímetre P. Demostrar que existeix un cercle de radi A/P contingut a l'interior del polígon  ALL SOVIET UNION COMPETITION 1966, P 7		13 Siga $n \in \mathbb{N}$. Demostreu que la suma de totes les fraccions $1/(pq)$ on p i q són primers relatius tals que $1 \leq p < q \leq n$ i $p+q > n$ és $1/2$ 		14 Sobre una taula hi ha 100 targetes numerades des de l'1 al 100. Es trien 25 d'elles a l'atzar, quina és la probabilitat que la suma dels números triats siga parell? 		15 Demostreu que si $x, y \in]-1, 1[$, aleshores: $\left \frac{x - y}{1 - xy} \right = \frac{ x + y }{1 + xy }$  OME, fase local 2004, problema 7		16 Considerem el conjunt: $S = \{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots, \frac{1}{1000}\}$ Repetim el següent procés fins que sols quede un element en S: elegim dos números $x, y \in S$ i els substituïm pel número $x + y + xy$. Demostreu que el últim número no depèn dels números elegits en cada pas i calcular-lo. 		17 Trobeu totes les maneres d'expressar 2003 com a suma dels quadrats de dos enters.  OME, fase local 2004, problema 9		18	
	19 Donat un conjunt M de 1985 enters positius, cap dels quals té un divisor primer major que 26, demostreu que podem trobar 4 elements diferents de M la mitjana geomètrica dels quals és un enter  IMO, 1985, P 4		20 Direm que una circumferència és un separador d'un conjunt de 5 punts en el pla si passa per 3 d'ells i els altres dos, un està dins i un altre està fora. Demostreu que tot conjunt de 5 punts que no conté 3 punts alienats ni 4 concíclics té exactament 4 separadors  IMO, SHORTLIST GEOMETRY, 1999, P 2		21 Trobeu el valor del real m perquè el polinomi $x^4 - \frac{3\sqrt{2}}{2}x^3 + 3x^2 + mx + 2$tinga dues arrels reals, una inversa de l'altra 		22 En un quadrat ABCD es traça una circumferència que passa pel vèrtex A i pels punts mitjans de BC i CD. Determineu si és major la longitud de la circumferència o el perímetre del quadrat. 		23 Siga P un punt interior d'un triangle equilàter $\triangle ABC$ tal que $PA = 5$, $PB = 7$ i $PC = 8$. Trobeu la longitud d'un costat del $\triangle ABC$.  Olimpiada Iberoamericana, 1985, problema 2		24 Siga $P(x)$ un polinomi amb coeficients enters tal que l'equació $P(x) = 7$ té almenys quatre solucions enters. Demostreu que l'equació $P(x) = 14$ no té solucions enters. 		25	
	26 Donat $k \in \mathbb{N}$, siga A_k el subconjunt de $\{k+1, k+2, \dots, 2k\}$ format per els números que en base 2 tenen exactament tres uns i siga $f(k)$ el nombre d'elements de A_k. Demostreu que $f(k)=m$ té al menys una solució $\forall m \in \mathbb{N}$. Trobeu els $m \in \mathbb{N}$ per a els que l'equació té una única solució. 		27 Siguen p i q enters tals que: $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots - \frac{1}{1318} + \frac{1}{1319} = \frac{p}{q}$ Demostreu que $1979 p$  IMO, 1979, PROBLEM 1		28 Es considera un triangle els costats del qual són els costats d'un pentàgon, hexàgon i decàgon regulars inscrits en circumferències de radi 1. Demostrar que el triangle és rectangle 		29 Suposem que α i β són reals que compleixen les equacions: $\alpha^3 - 3\alpha^2 + 5\alpha - 17 = 0$$\beta^3 - 3\beta^2 + 5\beta + 11 = 0$ Calculeu $\alpha + \beta$ 		30 Siguen x, y i z tres reals tals que: $0 < x < y < z < \frac{\pi}{2}$ Demostreu que: $\frac{\pi}{2} + 2\sin x \cos y + 2\sin y \cos z > \sin 2x + \sin 2y + \sin 2z$  Olimpiada Iberoamericana, 1989, problema 2					