CALENDARI MATEMÀTIC
2022-2023

La Societat d'Educació Matemàtica de la Comunitat Valenciana Al-Khwarizmi és una societat de professores i professors de Matemàtiques. Els objectius de la Societat són, d'acord amb els seus estatuts:

1. Difondre les matemàtiques i els diversos corrents de pensament matemàtic.
2. Transmetre innovacions educatives en l'ensenyament i aprenentatge de les matemàtiques.
3. Impulsar el desenvolupament i difusió d'investigacions en Educació Matemàtica.
4. Fomentar totes aquelles activitats encaminades a superar els obstacles a la difusió de les matemàtiques generats per motius culturals o de gènere.
5. Col·laborar i intercanviar informació amb Associacions i Societats de similar caràcter i finalitat.
6. Col·laborar amb institucions i entitats per a la realització d'estudis i activitats relacionats amb les Matemàtiques i l'Educació Matemàtica.
7. Realitzar estudis, crítiques i propostes curriculars per a qualsevol dels nivells educatius.

Si consideres que aquests objectius són importants posa't en contacte amb nosaltres en la pàgina

http://www.semcv.org/.

DIPUTACIÓ DE CASTELLÓ

CONCURS DE RESOLUCIÓ D'ACTIVITATS

CONVOCATORIA

1. **A LA SOLUCIÓ MÉS ENGINYOSA:** Podrà participar qualsevol estudiant d'ESO, Batxillerat o F. P. que done resposta (solució/comentari) a una activitat plantejada un dia qualsevol. Cada centre seleccionarà les millors solucions dels seus alumnes enviant només una per cada dia i incloent: nom complet de l'estudiant, curs i nivell, centre, adreça, telèfon i correu electrònic. Els premiats rebran el corresponent diploma acreditatiu.

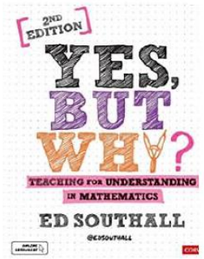
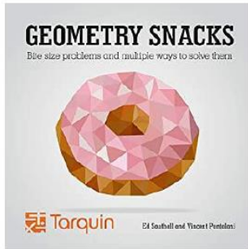
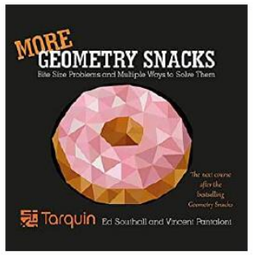
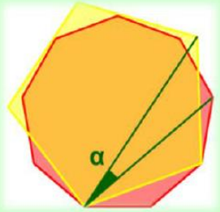
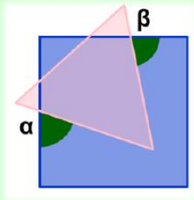
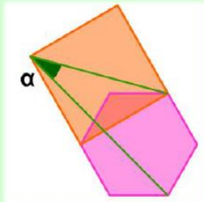
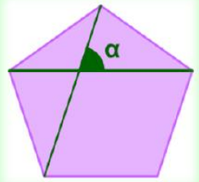
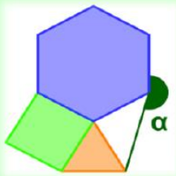
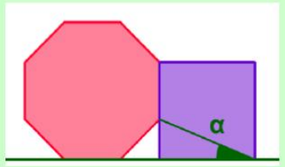
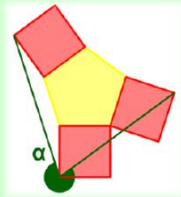
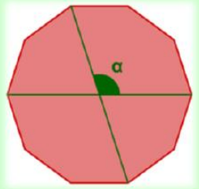
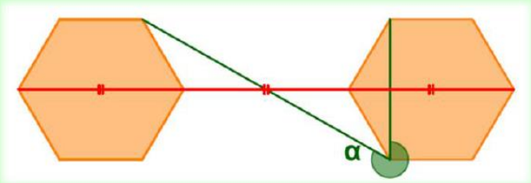
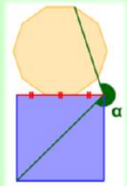
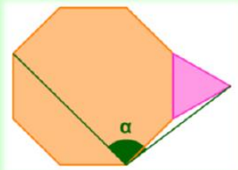
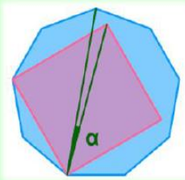
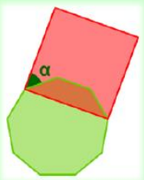
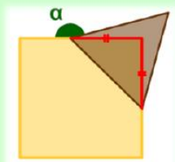
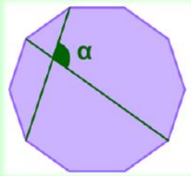
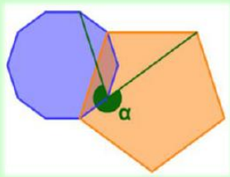
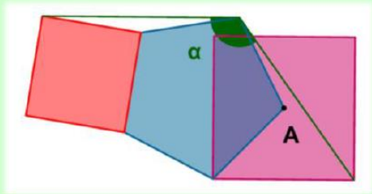
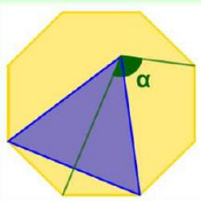
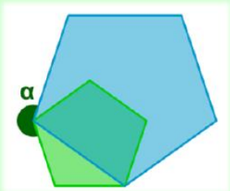
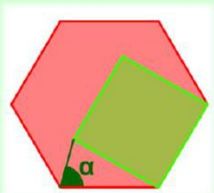
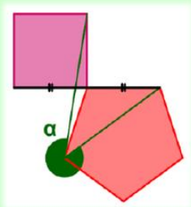
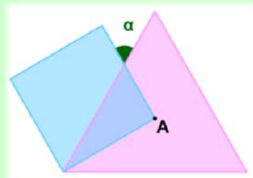
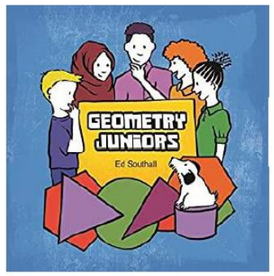
2. **AL TREBALL EN GRUP:** Podrà participar un sol grup de qualsevol centre d'ESO i/o Batxillerat i/o F. P. que done resposta (solució/comentari) a totes les activitats plantejades un mes qualsevol. Haurà d'indicar-se el nom complet del centre, adreça, telèfon i correu electrònic, així com el nom de tots els estudiants que l'integren i del professor/a que el coordina. Els agraciats rebran el corresponent diploma acreditatiu.

3. **PRESENTACIÓ I SELECCIÓ:** El termini de recepció acabarà l'últim dia del mes següent al qual corresponguen les activitats. Les solucions han de dirigir-se calendari@semcv.org

   Les solucions presentades poden publicar-se quan la comissió seleccionadora ho considere oportú

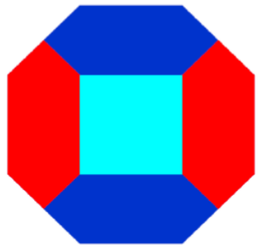
calendari@semcv.org

SETEMBRE

DILLUNS	DIMARTS	DIMECRES	DIJOUS	DIVENDRES	DISSABTE	DG.
			**1** Pentàgon i enneàgon regular. Trobeu raonadament α 	**2** Quadrat i triangle equilàter. Trobeu raonadament α + β 	**3** Hexàgon regular i quadrat. Trobeu raonadament α 	**4**
5 Pentàgon regular. Trobeu raonadament α 	**6** Triangle equilàter, quadrat i hexàgon regular. Trobeu raonadament α 	**7** Octàgon regular i triangle equilàter. Trobeu raonadament α	**8** Octàgon regular i quadrat. Trobeu raonadament α 	**9** Pentàgon regular i tres quadrats. Trobeu raonadament α 	**10** Decàgon regular. Trobeu raonadament α 	**11**
12 Hexàgons regulars 	**13** Trobeu raonadament α	**14** Decàgon regular i quadrat. Trobeu raonadament α 	**15** Octàgon regular i triangle equilàter. Trobeu raonadament α 	**16** Enneàgon regular i quadrat. Trobeu raonadament α 	**17** Tres pentàgons regulars. Trobeu raonadament α	**18**
19 Enneàgon regular i quadrat. Trobeu raonadament α 	**20** Quadrat i triangle equilàter. Trobeu raonadament α 	**21** Decàgon regular. Trobeu raonadament α 	**22** Decàgon i pentàgon regulars. Trobeu raonadament α 	**23** 	**24** Dos quadrats i un pentàgon regular. El vèrtex A és el centre del quadrat. Trobeu raonadament α	**25**
26 Octàgon regular i triangle equilàter. Trobeu raonadament α 	**27** Dos pentàgons regulars. Trobeu raonadament α 	**28** Hexàgon regular i quadrat. Trobeu raonadament α 	**29** Quadrat i pentàgon regular. Trobeu raonadament α 	**30** Triangle equilàter de baricentre A i quadrat. Trobeu raonadament α 	 solvemymaths ·	

OCTUBRE

DILLUNS	DIMARTS	DIMECRES	DIJOUS	DIVENDRES	DISSABTE	DG.



1 Siguen m i n imparells amb m > n, quin és el major enter que divideix a $m^2 - n^2$?

2

3 Resolgueu en $\mathbb{N}$:

$$a\log 2 + b\log 3 + c\log 5 = 2022$$

4 Siguen a, b$\in\mathbb{R}$ | a > 1, b $\neq$ 0. Si

$$ab = a^b \text{ y } \frac{a}{b} = a^{3b}$$

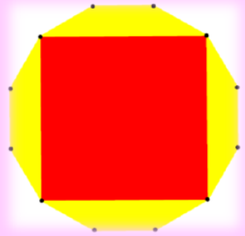
Calculeu b^{-a}

5 En un concurs queden tres qüestions d'opció múltiple amb tres respostes cada qüestió de les quals només una és correcta. Un concursant contesta a l'atzar, quina és la probabilitat que encerte almenys dues?

6 Dos de les mitjanes d'un triangle són ⊥ i mesuren 8 i 12 cm. Trobeu l'àrea del triangle

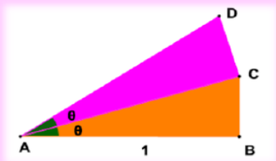
7 Quina és l'àrea del dodecàgon (dotze costats) regular circumscrit a un quadrat d'àrea 2 dm^2?

8



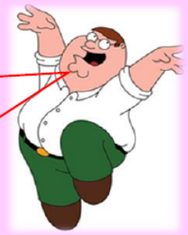
9

10 En la figura adjunta trobeu AD en funció de θ.



11 Dues semirectes que parteixen des d'O formen entre elles un angle de 30°. Els punts A i B estan, cadascun d'ells, en cadascuna de les semirectes, complint-se que AB = 1. Quina és la màxima longitud possible d'OB?

12



13 Resolgueu en $\mathbb{N}$:

$$n^4 + 6n < 6n^3 + n^2$$

14 A Dani li queden per contestar tres preguntes per a acabar un examen. Cada pregunta té cinc alternatives de les quals només una és correcta. Si contesta a l'atzar aquestes tres preguntes quin és el nombre d'encerts més probable?

15 Quants enters positius menors que 2023 verifiquen que alguna de les seues xifres és zero?

16

17 La clau que vaig posar en el pany de la meua taquilla té quatre xifres i només dues són imparells Quantes claus compleixen aquests requisits?

18 Trobeu el major natural menor que 1000, amb quatre divisors primers diferents.

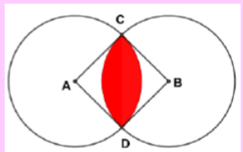
19 Tinc 18 targetes i en cadascuna he escrit un 4 o un 5. La suma de tots els números escrits és divisible per 17. En quantes està escrit el 4?

20 Resolgueu en $\mathbb{R}$:

$$\left.\begin{array}{l} ab = 26 \\ ac = 128 \\ bc = 52 \end{array}\right\}$$

21

22

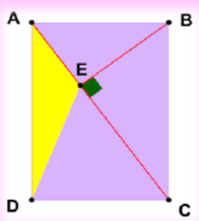


Dues circumferències de radi 2 i centres A i B es tallen en C i D. Si ACBD és un quadrat, trobar l'àrea de la zona roja

23

24/31 En el rectangle de la figura el segment AB mesura 3 cm i el segment BC mesura 4 cm. Si E és el peu de la perpendicular des del punt B a la diagonal AC, quina és l'àrea del triangle ΔAED?

25



26 Trobeu els números de dues xifres que compleixen que el producte de les seues xifres més la suma d'ambdues.

27 Dues de les altures d'un triangle escalé mesuren 4 i 12 cm. Si la longitud de la tercera altura és un natural, quin és el màxim valor d'ella?

28 Un polígon convex té exactament tres angles obtusos. Quin és el màxim nombre de costats d'aquest polígon?

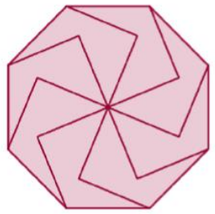
29 Resolgueu en $\mathbb{R}$:

$$|x - |2x + 1|| = 3$$

30

NOVEMBRE

DILLUNS	DIMARTS	DIMECRES	DIJOUS	DIVENDRES	DISSABTE	DG.



1

2

Dani té seixanta boles i les seues germanes Laia i Aitana cap. Dani decideix agafar sis boles i donar tres a cadascuna. El creu que repetint aquesta operació diverses vegades arribarà un moment en què cadascun dels tres tindrà la mateixa quantitat de boles. Té raó o cal fer algun xicotet arranjament?

3

La mitjana de huit imparells consecutius és 42. Calcular la mitjana de tots els naturals que hi ha entre l'imparell més xicotet i el més gran

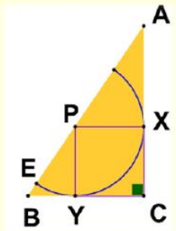
4

5

La qualificació de Laia en una determinada assignatura és la mitjana aritmètica de dotze controls que realitza al llarg del curs. Després dels primers huit controls té una nota mitjana de 4. Quina mitjana ha d'obtindre en els quatre últims controls perquè la mitjana de tots els dotze controls siga major o igual a cinc? Si en els controls nové i dècim trau un sis i un cinc, quina mitjana ha de traure en els dos últims controls per a traure una mitjana en tots els controls major o igual a cinc?

6

7



8

Siga ΔABC un triangle rectangle en C. Siga P un punt d'AB tal que PXCY és un quadrat de costat 8 cm. Amb centre en P es traça una circumferència de radi 8 que talla al segment PB en E. Si BE = 2 cm, trobeu l'àrea i el perímetre de ΔABC

9

Siga

$$R = \underbrace{8888..88}_{200} - \underbrace{4343...43}_{140}$$

És R un quadrat perfecte?

10

11

En una divisió entera el divisor és 49 unitats major que el residu i el quocient és 182. Si augmentem 2372 unitats el dividend i mantenim inalterat el divisor el quocient augmenta 28 unitats i el residu és el màxim permés. Trobar la primera divisió entera

12

Calculeu quants capicues de cinc o menys xifres existeixen. Si s'ordenaren de menor a major, quin capicua ocuparia la posició 195?

13

14

Donat un natural n, es defineix S_n (P_n) com la suma (producte) dels dígits de n. Trobeu els naturals n tals que:

$$P_n \cdot S_n = 3 + P_n$$

15

16

Dani, Laia i Aitana participen en una de les activitats de les festes patronals del seu poble: la volta al voltant de Benirredrà. Una carrera camp a través de 5,3 km. Aitana ix a les 10.00 hores a una velocitat de 3 km/h. Deu minuts més tard ix Laia que corre a una velocitat de 5 km/h. Vint minuts més tard ix Dani a una velocitat de 6 km/h. Si cap d'ells es para ni altera la seua velocitat, esbrina l'ordre d'arribada dels tres germans i el temps que transcorre entre l'arribada d'ells.

17

Donat un natural n, es defineix S_n (P_n) com la suma (producte) dels dígits de n. Trobeu els naturals n tals que:

$$P_n \cdot S_n = 30$$

18

19

Considerem el natural R:

$$R = \underbrace{999 \cdots 999}_{200} - 1\underbrace{333 \cdots 333}_{x}$$

Trobeu els valors de x que fan que R siga múltiple de tres

20

21

			37
			38
			25
33	55	12	

22

Col·loqueu en la reixeta adjunta els primers nou nombres primers sense repetir-ne cap perquè el total de cada línia (fila o columna) siga l'indicat al marge de la reixeta. És única la solució?

23

Dani va nàixer quan, Rafael, el seu pare tenia 32 anys. Ara, l'edat de Dani més la del seu pare excedeix en 20 anys la de Gregori, que és 52 anys. Quina edat té ara Laia que va nàixer quan la suma d'edats de Dani, Rafael i Gregori era 79 anys?

24

25

Leo és aficionat al camp través amb bicicleta. Tres vegades per setmana puja des del cementeri fins a l'ermita carregant amb la bicicleta i baixa pel mateix camí, però pedalant amb la bicicleta. Si Leo puja a 12 Km/h:

1.- a quina velocitat ha de baixar per a tindre una velocitat mitjana en tot el trajecte de 15 km/h.

2.- quina velocitat mitjana en tot el trajecte és la màxima que pot aconseguir?

26

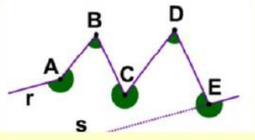
Siga donat el número:

$$N = \left(\underbrace{66 \cdot\cdot 66}_{n}\right)^2 + \left(\underbrace{33 \cdot\cdot 33}_{n}\right)^2$$

És N múltiple de 3? És un quadrat perfecte?

27

28 (dedicated to Professor Smudge)



Si r//s, trobeu el valor de la suma dels angles en A, B, C, D i E

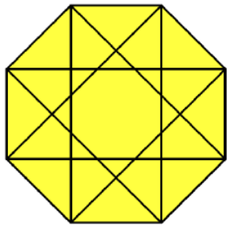
29

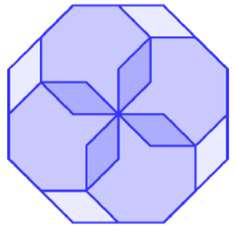
30

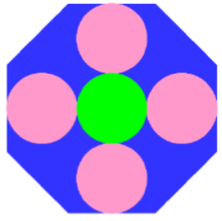
De tres dígits, no necessàriament diferents, a, b i c se sap:

$$\overline{abc} + \overline{acb} + \overline{bac} + \overline{bca} = 633$$

on $\overline{xyz}$ representa el número amb el dígit x en les centenes, el dígit y en les desenes i el dígit z en les unitats. Trobar a, b i c

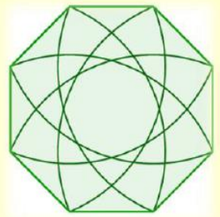


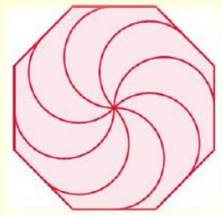




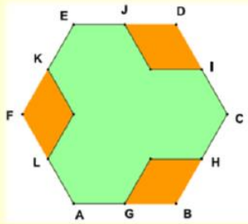
DESEMBRE

DILLUNS	DIMARTS	DIMECRES	DIJOUS	DIVENDRES	DISSABTE	DG.





1



2

Siguen G, H, I, J, K i L els punts mitjans dels costats de l'hexàgon regular ABCDEF, amb àrea 36 cm². Trobeu l'àrea del dodecàgon de color verd amb costats paral·lels quatre a quatre

3

A quin exponent cal elevar 8 per a obtindre 16^{21}?

4

5

6

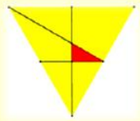
Una escala de 25 m de longitud està recolzada en una paret vertical, de manera que el peu de l'escala dista 7 m de la paret. Si la tornem a col·locar, estant ara el punt més alt de l'escala, 4 m més baix que abans, a quina distància estarà ara el peu de l'escala, de la paret?

7

En la figura hi ha un hexàgon regular ABCDEF d'àrea 180 cm². M i N són els punts mitjans de AF i ED, respectivament.
A més, MO||AB; OP||BC; PN||CD i MO = MF = PN. Trobeu l'àrea de l'octàgon ABCDNPOM

8

En el triangle equilàter de la figura, hem marcat els punts mitjans dels costats. Quina fracció del triangle ocupa el triangle roig?



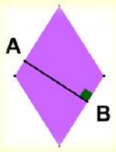
9

10

Dani juga amb 5 cartes ABCDE a desordenar-les de la següent manera. Canvi 1: agafa la carta del centre i la posa la primera: CABDE. Canvi 2: agafa l'última carta i la posa al mig: CAEBD. El canvi 3 és igual al canvi 1. El canvi 4 és igual al canvi 2, i així successivament. En fer el canvi 2022, com han quedat ordenades les cartes?

11

12

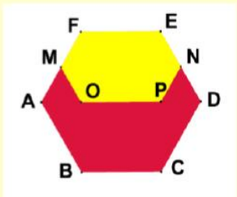


El perímetre i àrea del rombe és 24 cm i 24 cm². Calculeu la longitud del segment AB

13

Calculeu el menor $n \in \mathbb{N}$ tal que $2^8 + 2^{11} + 2^n$ és un quadrat perfecte.

14

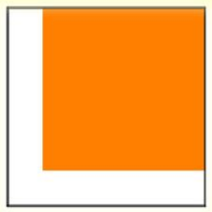


15

16

Inscrivim en un hexàgon regular un altre hexàgon regular els vèrtexs del qual són els punts mitjans dels costats del primer. Quin és el quocient entre les àrees dels hexàgons?

17



18

19

El triangle acutangle ΔABC té l'angle en B de 58° i en C de 42°. A més, la bisectriu en A talla al costat oposat en P. En el triangle ΔAPC, la bisectriu en P talla al costat oposat en D. Trobeu la mesura de l'angle ∠PDA

20

21

Dos corredors A i B parteixen, alhora, d'una ciutat X cap a una altra Y, que està a 30 km. El corredor A va a una velocitat de 4 km/h menys que el B. Quan B arriba a Y, dona la volta i troba a A, a 6 km de Y. Quina és la velocitat del corredor A?

22

El pare de Dani té triple edat que Dani. Si sumem les dues xifres de l'edat del pare amb les dues xifres de l'edat de Dani obtenim l'edat de Dani. A més, la suma de les dues xifres de l'edat del pare és igual a la suma de les dues xifres de l'edat de Dani. Calculeu l'edat de tots dos.

23

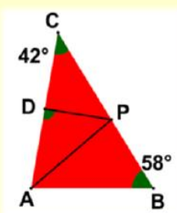
Dels naturals a i b se sap que **a + b** acaba en 1 i que $\mathbf{a^2 + b^2}$ acaba en 3. En quina xifra acaba $\mathbf{a^{2022} + b^{2022}}$?

24

Sobre un quadrat blanc ha caigut damunt un taronja el costat del qual mesura 2 cm menys que el blanc, tal com indica la figura. Si la superfície de la zona blanca de la figura, és de 36 cm², quants cm mesura el quadrat de color taronja?

25

26



27

Les lletres x, y i z representen dígits diferents de zero. Trobeu el número xyz sabent que la suma està ben feta.

$$\begin{array}{r} x\ x \\ y\ y \\ +\ z\ z \\ \hline z\ y\ x \end{array}$$

28

Tenim 8 targetes amb els números 2^0, 2^1, 2^2, 2^3, 2^4, 2^5, 2^6 i 2^7. Laia agafa unes quantes i Aitana la resta. La suma de les de Laia supera en 31 a la suma d'Aitana. Quantes targetes va agafar Laia?

29

30

Aitana tarda 24 minuts a realitzar una determinada tasca, mentre que el seu nebot Noa, tarda 3 hores. Si treballen junts, quant temps tardaren a fer 51 vegades la tasca?

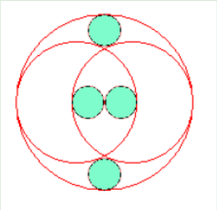
31

Quan un barril està ple al 30%, té 30 litres menys que quan li falta el 30% per a estar ple. Quants litres conté el barril ple?

GENER

DILLUNS	DIMARTS	DIMECRES	DIJOUS	DIVENDRES	DISSABTE	DG.

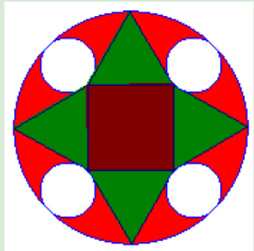
2



3

En una circumferència exterior de ràdio R s'han dibuixat dues circumferències mitjanes iguals i quatre circumferències xicotetes. Calculeu el radi de les circumferències.
Prefectura de Ishikawa

4

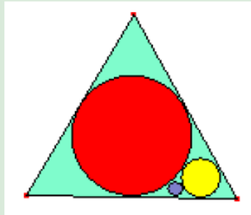


5

Una circumferència de ràdio R conté quatre circumferències iguals i altres dos iguals. Calculeu el radi de totes les circumferències.
Prefectura de Fukushima

6

Φ, φ DAY



7

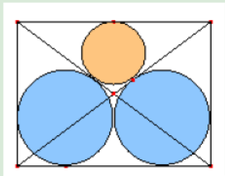
Donat un triangle equilàter s'ha inscrit una circumferència de ràdio r. Una altra circumferència és tangent exterior a la inscrita i a dos costats del triangle. Una tercera circumferència és tangent a un costat i tangent exterior a les dues circumferències anteriors. Calculeu el radi de les circumferències.
Prefectura de Saitama

1/8

9

Dues circumferències d'igual radi r són tangents i cadascuna d'elles és tangent a dos costats d'un rectangle i a una diagonal. Calculeu la mesura dels costats del rectangle i el radi de la circumferència tangent exterior a les anteriors i tangent al rectangle.
Prefectura Fukushima

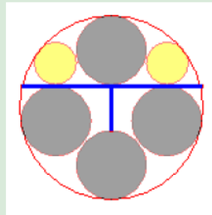
10



11

Dins d'una circumferència de ràdio R s'ha dibuixat un quadrat, 4 triangles equilàters sobre els costats del quadrat i 4 circumferències tangent a la circumferència exterior i tangent als costats del triangle. Calculeu el radi d'aquestes 4 circumferències.
Prefectura Okayama.

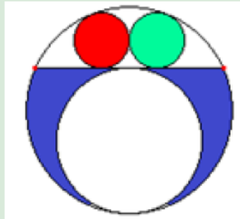
12



13

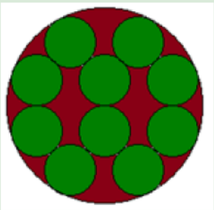
En la figura hi ha dues circumferències xicotetes de radi r i una gran de radi s a l'interior d'una circumferència. Calculeu el diàmetre de la circumferència exterior.
Prefectura de Nagasaki

14



15

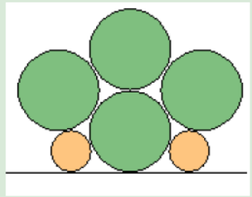
16



17

La figura té sis circumferències tangents tres a tres. Hi ha quatre grans iguals i dues xicotetes iguals. Les dues xicotetes i una de gran són tangents a una recta. Calculeu la proporció entre els radis dels dos tipus de circumferències.
Prefectura de Nagano.

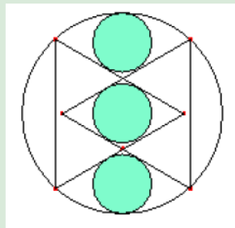
18



19

En una circumferència de radi R s'han dibuixat dos triangles equilàters iguals amb els costats paral·lels. En la intersecció dels dos triangles i en l'exterior dels dos triangles s'han dibuixat tres circumferències d'igual radi. Calculeu el radi de les tres circumferències.
Prefectura de Ishikawa

20



21

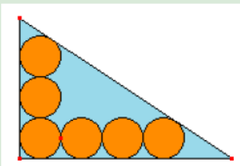
Donada una recta i dos arcs iguals de radi r tangents entre ells i tangents a la recta, s'han dibuixat tres quadrats.
Calculeu la mesura dels costats dels quadrats.
Prefectura Fukushima

22

23

En una circumferència s'han inscrit deu circumferències iguals. Determineu la proporció entre el radi d'una xicoteta i el radi de la circumferència exterior.
Prefectura Shisouka

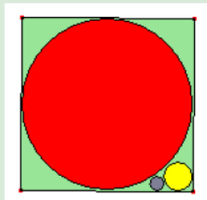
24



25

En un triangle rectangle s'han inscrit sis circumferències iguals i tangents entre si de radi r. Calculeu la proporció dels catets. Calculeu la mesura dels catets.
Prefectura de Fukushima

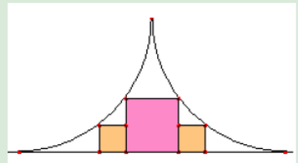
26



27

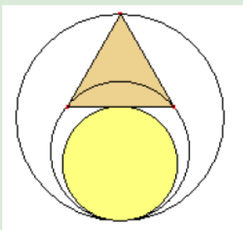
Donat un quadrat s'ha inscrit una circumferència de radi r. Una altra circumferència és tangent exterior a la inscrita i a dos costats del quadrat. Una tercera circumferència és tangent a un costat i tangent exterior a les dues circumferències anteriors Calculeu el radi de les circumferències.
Prefectura de Saitama

28



29

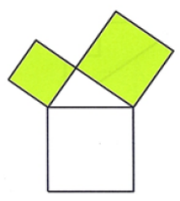
30

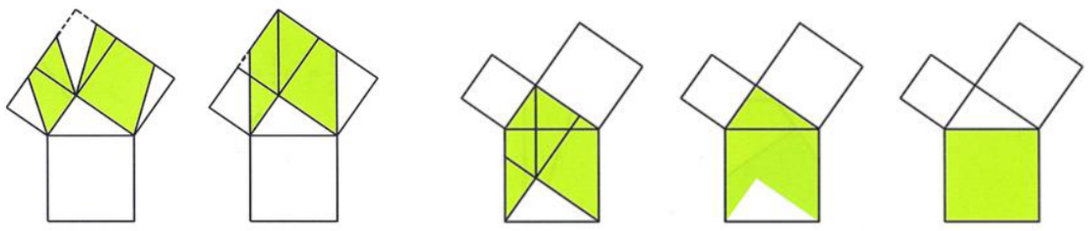


31

En una circumferència de ràdio R s'han inscrit dues circumferències tangents interiors en el mateix punt de tangència. El radi de la circumferència xicoteta és r. Un triangle equilàter és tangent a la circumferència xicoteta i té dos vèrtexs en la circumferència mitjana i l'altre en la circumferència exterior. Calculeu el radi de la circumferència mitjana.
Prefectura Nagasaki

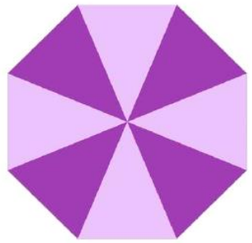
PITÀGORES VISUAL





FEBRER

DILLUNS	DIMARTS	DIMECRES	DIJOUS	DIVENDRES	DISSABTE	DG.



1 Trobeu el terme del desenvolupament del binomi $\left(\frac{3}{4}\sqrt[3]{a^2}+\frac{2}{3}\sqrt{a}\right)^{12}$ que conté a^7

2 Per a quin valor de x el cinquè terme del desenvolupament de $\left(\frac{1}{2\sqrt{x}}-\frac{1}{2}\right)^{10}$ és igual a 105?

3

4 Trobeu el terme central de $\left(\sqrt[-7]{\frac{1}{a}}\cdot\sqrt{a}-\sqrt[7]{\frac{a^{-2}}{\sqrt{a}}}\right)^{n}$, sabent que el coeficient del cinquè terme és al coeficient del tercer terme com 11 és a 1.

5

6 En el desenvolupament del binomi $\left(x^3+\frac{1}{x}\right)^{n}$ els coeficients dels termes quart i dihuité són iguals. Trobeu el terme on apareix x^4

7

e-day

8 En la expressió $\left(\frac{\sqrt[2]{m^3}}{x+\sqrt[3]{m^x}}+m\sqrt[x]{m^{x-2}}\right)^{10}$ trobeu x perquè el terme seté siga $210m^6$.

9 Trobeu per a quin valor de x , la suma del segon i quart terme en el desenvolupament de $\left(\sqrt{2^{x+1}}+\frac{1}{\sqrt{2^x}}\right)^{m}$ és igual a $\frac{129}{2}\sqrt{2}$, sabent que la suma dels coeficients binòmics dels tres últims termes és igual a 11.

10

11 La suma de tots els coeficients del desenvolupament del binomi $\left(\sqrt[3]{x}+\sqrt[-2]{\frac{1}{x}}\right)^{m}$ és 64. Trobeu el terme on l'exponent de x és $\frac{5}{2}$

12

13 El quart terme del desenvolupament del binomi $\left(\frac{\sqrt[3]{5}}{\left(\sqrt[3]{x}\right)^{10\log x}}+x\cdot\sqrt[\log x^3]{x}\right)^{6}$ és 100. Trobeu x.

14

15 Trobeu el valor de x en el desenvolupament $\left(\sqrt[4]{x}+\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^{8}$, sabent que el terme que conté x elevat a un exponent que és 5/2 l'exponent del terme següent, és 144 unitats més gran que l'últim terme esmentat.

16

17 Trobeu el nové terme d'una progressió geomètrica, el segon terme de la qual és el complex 2/i i la raó 2+i.

18 Els sistemes $\begin{cases} x-y=a \\ 2y-x=b \end{cases}$ i $\begin{cases} x+2y=c \\ x+y=22 \end{cases}$ tenen les mateixes solucions. Trobeu a, b i c sabent que a, b i c estan en progressió geomètrica.

19

20 Siguen a, b i c les longituds de tres costats d'un triangle. Sabem que a i b són les arrels del polinomi $x^2-(c+6)x+6(c+3)$. Trobeu l'angle més gran del triangle.

21

22 En una progressió geomètrica el primer terme és el coeficient del sisé terme del desenvolupament de $(x+y)^8$, i el cinquè terme (de la progressió) és el logaritme de l'arrel quadrada de 2187 en base 3. Calculeu:
a) la suma dels deu primers termes.
b) la suma de tota la sèrie.

23

24 La distància entre el Pont de Suert i Vilaller són x Km. Si expressem aquesta distància, successivament, en Km, Hm, Dm, m, dm, cm i mm i sumem tots aquests números obtenim 12.222.221. Trobar x.

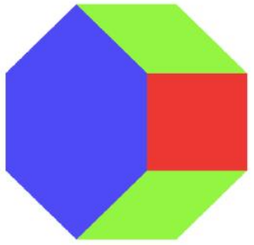
25

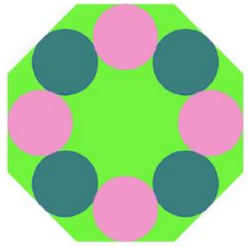
26

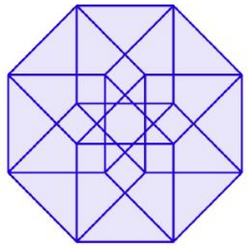
27

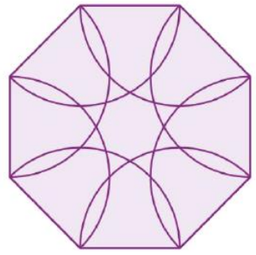
28 Trobeu el coeficient de x^{13} en esta expresió

$$(x^3+1)^2\left(x^2-\frac{2}{x}\right)^8$$



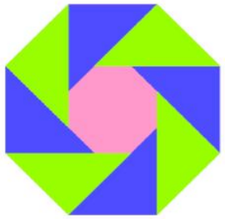


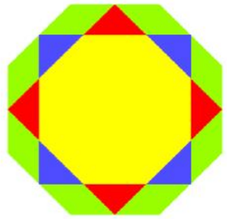




MARÇ

DILLUNS	DIMARTS	DIMECRES	DIJOUS	DIVENDRES	DISSABTE	DG.



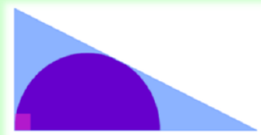


1 Siguen a i b naturals. Si $a + b$ i $a^3 + b^3$ acaben en 3, en quina xifra acaba $a^2 + b^2$?

2

3 Rafael té tres fills que li telefonen regularment: un cada tres dies, un altre cada quatre dies i l'últim cada cinc dies. L'últim dia del 2022 el van telefonar els tres fills. Quants dies de 2023 no rebrà cap trucada telefònica d'ells?

4



En un triangle rectangle de catets 5 i 12 cm, inscrivim una semicircumferència com en la figura, quin és el seu radi?

5

6 Un triangle i un trapezi tenen la mateixa àrea i altura. Si la base del triangle mesura 18 cm, quant mesura la longitud de la paral·lela mitjana del trapezi?

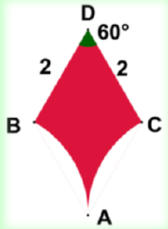
7 Si a, b i c són reals no nuls tals que $a + b + c = 0$, trobeu els valors possibles de:

$$\frac{a}{|a|} + \frac{b}{|b|} + \frac{c}{|c|} + \frac{abc}{|abc|}$$

8 Quants triangles escalens hi ha, de perímetre menor que 13, que tinguen la mesura dels seus costats nombres enters?

9 Quants trapezis existeixen que complisquen que la seua àrea siga 1400 cm², la seua altura 50 cm i les seues bases múltiples de 8?

10



11 En la figura adjunta DB = DC = 2 cm, ∠BDC = 60°, la longitud dels arcs BA i CA són la sisena part de la longitud d'una circumferència de radi 2 cm. Trobar l'àrea de la zona acolorida.

12

13 En cada caixa de la figura està escrit un número de manera que cadascun dels tres centrals és la mitjana aritmètica dels dos que té al seu costat. Trobar els números escrits en cada caixa.

14 π day-1

	26			8

15 Quin és el major natural n tal que 5^n és divisor de **98! + 99! + 100!**?

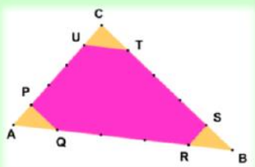
16 La mitjana d'una llista de cinc naturals és 1 més que la moda i 1 menys que la mitjana. Quina és la major diferència possible entre dos números de la llista?

17 Tenim diversos naturals. El producte dels dos més xicotets és 16 i el dels dos més grans 225. Pots trobar-los?

18 En el rectangle de la figura, les rectes r i s que passen pels vèrtexs A i C són perpendiculars a la diagonal BD i divideixen a BD en tres segments de longitud 1 cadascun. Trobeu l'àrea del rectangle ABCD

19

20



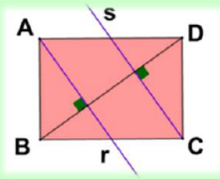
21 Generem un número de sis xifres N, repetint dues vegades un número de tres xifres. És N múltiple de 143?

22 Per a quants naturals n, menors que 100, es verifica que n^n és un quadrat perfecte?

23

24 Considerem 2023 punts alguns de color blau i els altres verds. Assignem a cada punt una fracció el numerador de la qual és el nombre de punts de l'altre color i el denominador és el nombre de punts del seu color (inclòs ell), Quina és la suma de les 2023 fraccions?

25



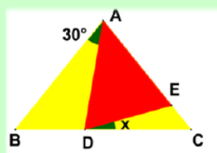
26

27 Es té un triangle ΔABC. Cada costat s'ha dividit en cinc parts iguals (utilitzant el procediment de Tales). Trobeu la proporció entre l'àrea de ΔABC i la de l'hexàgon PQRSTU

28

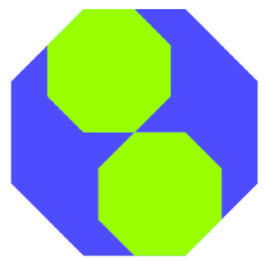
29 Dani, algunes vesprades, ajuda a repartir mercaderies al seu pare. Una vesprada tenen previst recórrer 210 km. Al final resulta que han aconseguit una velocitat mitjana 5 km/h més de la que havien previst i han arribat una hora abans de l'esperat. Quina velocitat mitjana han aconseguit?

30



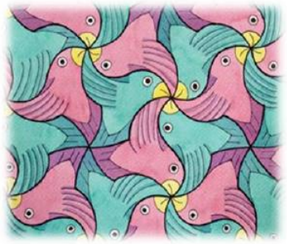
En la figura: AB = AC; ∠BAD = 30°; AE = AD. Trobeu x

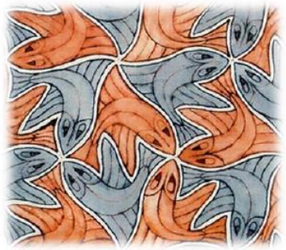
31 Quina és la probabilitat d'obtindre un número que siga imparell i amb tots els seus dígits diferents, si triem a l'atzar un número entre 1000 i 9999?



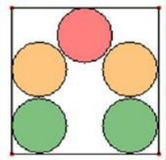
ABRIL

DILLUNS	DIMARTS	DIMECRES	DIJOUS	DIVENDRES	DISSABTE	DG.





1



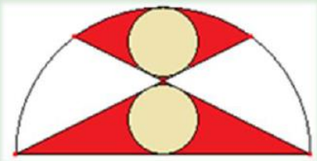
Cinc circumferències iguals, de radi r estan a l'interior d'un quadrat de costat c. Calculeu r/c. *Prefectura de Hyogo*

2

3

En un semicercle de radi R s'han inscrit dues circumferències iguals (veure figura). Calculeu el radi de les circumferències.
Prefectura de Aichi

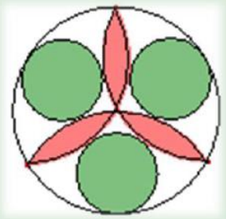
4



5

Un triangle rectangle està inscrit en una circumferència. S'han dibuixat tres circumferències tangents a la circumferència anterior i als costats del triangle. Siguen r_1, r_2 els radis de les circumferències tangents als catets. Siga R el radi de la circumferència tangent a la hipotenusa.
Determineu la relació entre els tres radis.
Prefectura Nagasaki

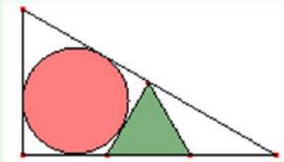
6



7

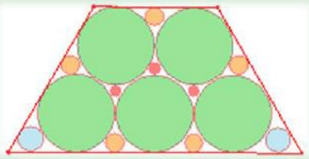
El catet xicotet del triangle rectangle és c. Calculeu el radi de la circumferència i el costat del triangle equilàter.
Prefectura Ehime

8



9

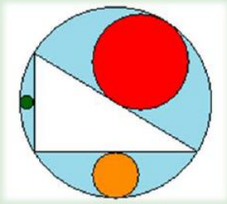
10



11

El radi de les cinc circumferències verdes tangents als costats del trapezi és r, calculeu el radi dels altres tres tipus de circumferències.
Prefectura de Gunma

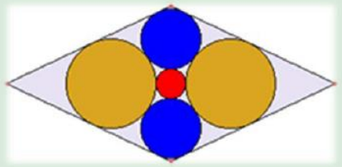
12



13

En la figura les tres circumferències verdes són iguals i tangents cadascuna d'elles a una circumferència exterior i a dos arcs. Determineu la proporció entre els radis dels dos tipus de circumferències.
Prefectura de Yamagata

14



15

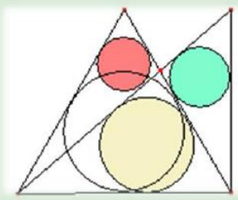
Quatre circumferències de radis R i r són tangents als costats d'un rombe. Una cinquena circumferència de ràdio s és tangent a les quatre anteriors. Calculeu el valor del radi R en funció dels radis r i s
Prefectura de Nagano

16

17

Calculeu la proporció entre les àrees de la suma dels sis cercles iguals tangents a dotze arcs iguals de circumferència i l'àrea del cercle exterior.
Prefectura Nagasaki

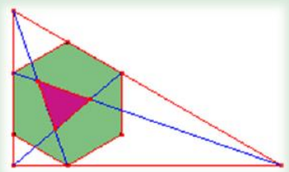
18



19

En la figura el costat del triangle equilàter és 1. El triangle rectangle té el catet vertical igual a l'altura del triangle equilàter. Calculeu els radis de les tres circumferències ombrejades.
Prefectura Yamagata

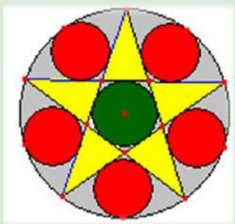
20



21

En un triangle rectangle s'ha inscrit un hexàgon regular (veure figura). Calculeu la raó de proporcionalitat de les seues àrees. Els vèrtexs del triangle rectangle s'han unit amb vèrtexs de l'hexàgon regular. Calculeu la proporció entre les àrees del triangle i de l'hexàgon regular.
Prefectura Iwate

22



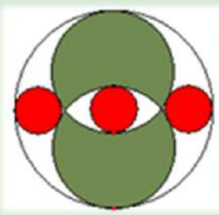
23

24

25

En una circumferència s'han dibuixat cinc circumferències. Les tres roges iguals i les altres dos iguals i tangents interiors. Calculeu la proporció entre els radis.
Prefectura de Hyogo

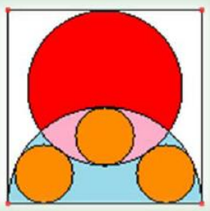
26



27

Donat un quadrat de costat 2a dibuixem un semicercle sobre el costat inferior com a diàmetre. Construïm una circumferència de ràdio R amb centre en la mediatriu del diàmetre del semicercle i tangent al costat superior. Tres circumferències de ràdio r són tangents a la semicircumferència i a la circumferència anterior. Calculeu la proporció entre els radis dels dos tipus de circumferència.
Prefectura de Iwate.

28



29

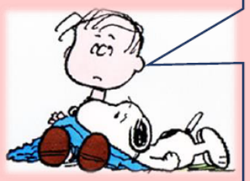
Considerem el pentàgon regular estrellat i la seua circumferència inscrita de radi r. Siguen les cinc circumferències tangents, de radi s, al pentàgon regular estrellat i a la seua circumferència circumscrita. Calculeu la proporció: s/r
Prefectura de Nagano

30

MAIG

DILLUNS	DIMARTS	DIMECRES	DIJOUS	DIVENDRES	DISSABTE	DG.

1 **2**



Dani va mesclar en un pitxer suc de taronja concentrat amb aigua al 50%. Aitana es va beure la meitat de la mescla i per a dissimular, va emplenar el pitxer amb aigua. Després va vindre Aitana, que es va beure la meitat i va tornar a dissimular emplenant el pitxer amb suc de taronja concentrat. Quina fracció del líquid és ara aigua?

3

Aitana ha escrit tots els naturals des del 100 fins al 199, tots dos inclusivament, i Laia ha esborrat totes les xifres que són nombres primers. Quantes xifres ha esborrat Laia?

4

Laia va recollir un cistell de taronges de l'hort familiar. Li va donar la meitat a Dani, 3 taronges a Aitana, 4 a Carles i es va quedar 6 per a ella. Quantes taronges va recollir Laia?

5 **6**

Laia i Aitana salten a la corda, però a ritmes diferents. Per cada dos salts que dona Laia, Aitana dona set. Les dues comencen a saltar alhora i quan Laia ha fet cent salts es per a, mentre que Aitana encara ha seguit i ha fet cinquanta salts més. Quants salts ha donat Aitana en total?

7

8

Òbviament, 10 = 5 · 2. Quants números de dues xifres són el producte de dos números d'una sola xifra?

9 **10**

Les operacions estan ben fetes. Lletres diferents representen xifres diferents. Trobeu el valor de cada lletra

```
  A M O       A M O
    A           A
+ A D A N   + H A D A
-------     -------
  O N D A     M I M O
```

11 **12** DIA DE LES MATEMÀTIQUES

Noa és molt xicotet. Menja cada quatre hores i fa caca cada díhuit. El dilluns a les 10 va ocórrer el terrible moment en què va fer les dues coses alhora, la qual cosa va espantar molt a la seua mare, Tània. Quan tornaran a coincidir tots dos esdeveniments per primera vegada?

13

Comencem amb els números: 1, 2 i 3. El quart número és la suma dels tres anteriors: 6 i el cinqué, la suma dels tres anteriors: 11. Si seguim així quin número ocuparà la posició vintena?

14

15 **16**

Dani juga amb els seus rellotges d'arena que tenen tots trenta minuts de duració. Dona la volta a un i cada huit minuts va donant la volta a un nou rellotge. Just quan porta quaranta-set minuts, quants rellotges tindran encara arena sense caure en la seua part superior?

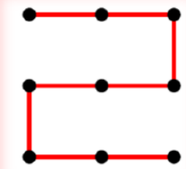
17

Quan Rafa va per autovia circula a 120 km/h i quan va per carretera nacional va a 90 km/h. Hui a recorregut 560 km en 5 h. Quant temps va per autovia?

18

Quin és el menor número de 7 xifres que és múltiple de 73? I el major número de 7 xifres múltiple de 73?

19 **20**



Aitana vol posar en el seu mòbil una clau de desbloqueig que complisca aquestes condicions: Ha de començar en el vèrtex superior de l'esquerra, ha de passar pels 9 punts sense creuar-se mai amb cap camí anterior i tots els traços han de ser horitzontals o verticals, però no valen oblics. Ací et mostrem una possible clau. Quantes claus diferents té Aitana per a triar?

21

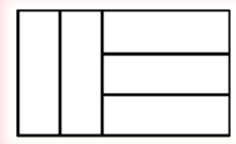
22

Quin és el producte entre el major múltiple de 17 de 6 xifres i el menor múltiple de 31 de 6 xifres?

23 **24**

Dani, Laia i Aitana juguen amb números de dues xifres. Cadascun escriu un parell d'ells i comunica només un dels dos. Dani comunica el 14, Laia el 20 i Aitana el 36. I el que són les casualitats els tres productes de cada parella donen el mateix resultat! Quins són els números no comunicats per Dani, Laia i Aitana?

25



26

Laia i Aitana estan dissenyant una bandera amb cinc franges: dues verticals i tres horitzontals i poden utilitzar els colors verd, roig i blau. Si es prohibeix que dues franges que es toquen tinguen el mateix color, quantes banderes són possibles?

27

El número que resulta de multiplicar per 10101 el número format per dos-cents cincs és múltiple de tres?

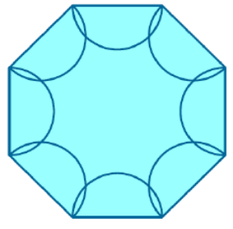
28

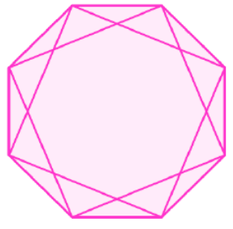
29 **30**

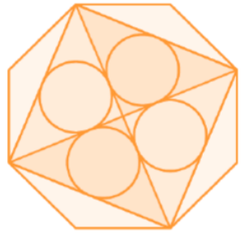
Laia i Aitana escriuen, cadascuna d'elles, un número de 3 xifres; Ferran i Carles escriuen, cadascun, un número d'una sola xifra i Dani escriu un 9. En sumar-los tots s'obté 2022. Quant sumen totes les xifres dels números dels cinc familiars?

31

En una bossa hi ha 8 boles roges, 10 negres i 12 blaus. Extraiem boles una a una i sense mirar dins de la bossa, quantes hem d'extraure per a assegurar que tenim 2 roges?







JUNY

DILLUNS	DIMARTS	DIMECRES	DIJOUS	DIVENDRES	DISSABTE	DG.

1 Siga ABCDEFG un heptàgon regular de costat 1. Demostreu que es compleix la relació:

$$\frac{1}{AC}+\frac{1}{AD}=1$$

2 S'escriuen en la pissarra 5 enters positius (no necessàriament diferents) i es calculen totes les possibles sumes de parelles d'aquests números. Els únics resultats obtinguts són 31, 38 i 45 (alguns d'ells, diverses vegades). Quins són aquests 5 números?

3 Siga S un conjunt de n elements. Siga $p_n(k)$ el nombre de permutacions dels elements de S que deixen exactament k elements fixos. Demostreu:

$$\sum_{k=0}^{n} k p_n(k) = n!$$

IMO, 1987, PROBLEM 1

4

5 Si α, β y γ ∈ℝ són els angles d'un triangle no rectangle, demostreu que:

$$\tan(\alpha)+\tan(\beta)+\tan(\gamma) = \tan(\alpha)\cdot\tan(\beta)\cdot\tan(\gamma)$$

6 Quants divisors imparells té 20!?

7 Trobeu tots els polinomis P(x) i Q(x) amb coeficients reals que compleixen:

$$P(Q(x)) = (x-1)\cdot(x-2)\cdot(x-3)\cdot(x-4)$$

8 En cada casella d'un tauler mxn es troba un nombre real. Es permet canviar tots els números d'una fila o columna tantes vegades com vulguem. Demostreu que pot aconseguir-se que les sumes dels elements de cada fila i cada columna siguen no negatives per a qualsevol configuració inicial

ALL SOVIET UNION COMPETITION 1961. P 7

9 Siga a_1, a_2, …. una PA no constant de nombres reals: Suposem que existeixen enters primers entre si p, q > 1 per a els que a_1^2, a_{p+1}^2 i a_{q+1}^2 són també elements de la mateixa successió. Demostreu que tots els termes de la successió són enters

Indian National Mathematical Olympiad, 2016, problem 6

10 Siguen x, y i z reals distints i distints d'1 i a més:

$$\frac{yz-x^2}{1-x}=\frac{xz-y^2}{1-y}$$

demostreu que les dues fracciones són iguals a x + y + z

Olimpiada Iberoamericana, 1985, problema 4

11

12 Considerem un polígon convex d'àrea A i perímetre P. Demostrar que existeix un cercle de radi A/P contingut a l'interior del polígon

ALL SOVIET UNION COMPETITION 1966, P 7

13 Siga n∈ℕ. Demostreu que la suma de totes les fraccions 1/(pq) on p i q són primers relatius tals que 1≤p<q≤n i p+q > n és 1/2

14 Sobre una taula hi ha 100 targetes numerades des de l'1 al 100. Es trien 25 d'elles a l'atzar, quina és la probabilitat que la suma dels números triats siga parell?

15 Demostreu que si x, y ∈]-1, 1[, aleshores:

$$\left|\frac{x-y}{1-xy}\right| = \frac{|x|+|y|}{1+|xy|}$$

OME, fase local 2004, problema 7

16 Considerem el conjunt:

S = {1, ½, 1/3, ¼, ····· , 1/1000}

Repetim el següent procés fins que sols quede un element en S: elegim dos números x, y∈S i els substituïm pel número x + y + xy. Demostreu que el últim número no depèn dels números elegits en cada pas i calcular-lo.

17 Trobeu totes les maneres d'expressar 2003 com a suma dels quadrats de dos enters.

OME, fase local 2004, problema 9

18

19 Donat un conjunt M de 1985 enters positius, cap dels quals té un divisor primer major que 26, demostreu que podem trobar 4 elements diferents de M la mitjana geomètrica dels quals és un enter

IMO, 1985, P 4

20 Direm que una circumferència és un separador d'un conjunt de 5 punts en el pla si passa per 3 d'ells i els altres dos, un està dins i un altre està fora. Demostreu que tot conjunt de 5 punts que no conté 3 punts alienats ni 4 conciclics té exactament 4 separadors

IMO, SHORTLIST GEOMETRY, 1999, P 2

21 Trobeu el valor del real m perquè el polinomi

$$x^4-\frac{3\sqrt{2}}{2}x^3+3x^2+mx+2$$

tinga dues arrels reals, una inversa de l'altra

22 En un quadrat ABCD es traça una circumferència que passa pel vèrtex A i pels punts mitjans de *BC i CD. Determineu si és major la longitud de la circumferència o el perímetre del quadrat.

23 Siga P un punt interior d'un triangle equilàter ΔABC tal que PA = 5, PB = 7 i PC = 8. Trobeu la longitud d'un costat del ΔABC.

Olimpíada Iberoamericana, 1985, problema 2

24 Siga P(x) un polinomi amb coeficients enters tal que l'equació P(x) = 7 té almenys quatre solucions enteres. Demostreu que l'equació P(x) = 14 no té solucions enteres.

25

26 Donat k∈ℕ, siga A_k el subconjunt de {k+1, k+2,..,2k} format per els números que en base 2 tenen exactament tres uns i siga f(k) el nombre d'elements de A_k. Demostreu que f(k)=m té al menys una solució ∀m∈ℕ. Trobeu els m∈ℕ per a els que l'equació té una única solució.

27 Siguen p i q enters tals que:

$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots-\frac{1}{1318}+\frac{1}{1319}=\frac{p}{q}$$

Demostreu que 1979|p

IMO, 1979, PROBLEM 1

28 Es considera un triangle els costats del qual són els costats d'un pentàgon, hexàgon i decàgon regulars inscrits en circumferències de radi 1. Demostrar que el triangle és rectangle

29 Suposem que α i β són reals que compleixen les equacions:

$$\alpha^3-3\alpha^2+5\alpha-17=0$$
$$\beta^3-3\beta^2+5\beta+11=0$$

Calculeu α + β

30 Siguen x, y i z tres reals tals que:

$$0<x<y<z<\frac{\pi}{2}$$

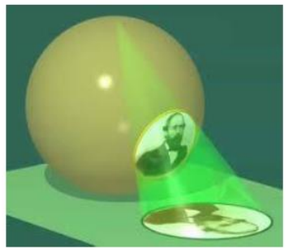
Demostreu que:

$$\frac{\pi}{2}+2\sin x\cos y+2\sin y\cos z > \sin 2x+\sin 2y+\sin 2z$$

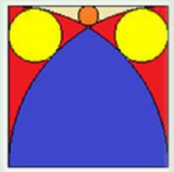
Olimpíada Iberoamericana, 1989, problema 2

JULIOL

DILLUNS	DIMARTS	DIMECRES	DIJOUS	DIVENDRES	DISSABTE	DG.

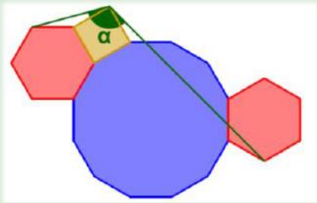


1 En la figura hi ha un quadrat, dos quadrants i tres circumferències, dues d'elles iguals. Calculeu la raó dels seues radis



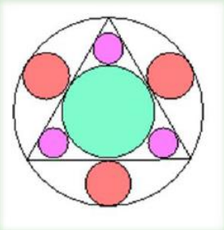
2

3 **4**



Dodecàgon, hexàgons regulars i quadrat. Trobeu raonadament α

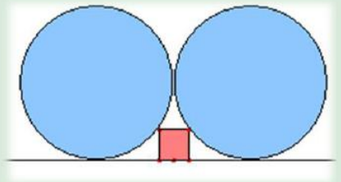
5



6

Huit circumferències són tangents exteriors dos a dos i totes són tangents exteriors a una altra. Calculeu la proporció entre els radis dels dos tipus de circumferències. Calculeu la proporció entre les àrees de la suma de les huit blaves i la roja.

7 **8**



Dues circumferències tangents de radi R són tangents a una recta. Dos vèrtexs d'un quadrat toquen les dues circumferències i els altres dos vèrtexs estan sobre la recta.
Determineu el costat c del quadrat en funció de R.
Prefectura de Okayama

9

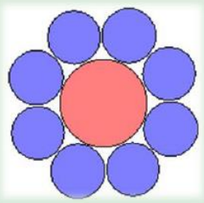
10 **11**

A l'interior d'un quadrat hi ha tres circumferències, dues d'elles amb el mateix radi, tangents dues a dues. Calculeu la proporció dels radis de les circumferències.
Prefectura Aichi

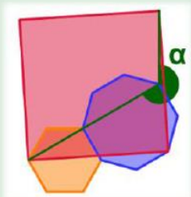
12

En una circumferència de ràdio R s'ha inscrit un triangle equilàter. S'han dibuixat 7 circumferències. Una inscrita al triangle, tres tangents exteriors al triangle i tangents a la primera circumferència. I, finalment, tres tangents interiors a dos costats del triangle i a la circumferència inscrita. Calculeu els radis de les circumferències.
Prefectura de Chiba

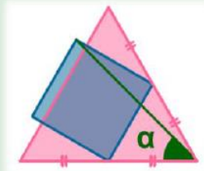
13



14 Hexàgon, octàgon regulars i quadrat. Trobeu raonadament α

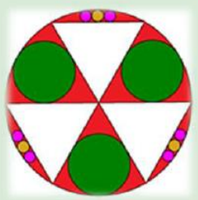


15 Triangle equilàter i quadrat. Trobeu raonadament α



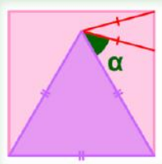
16

17

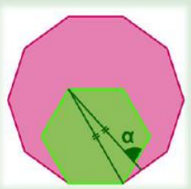


Temple Suwa Nagano.

18 Quadrat i triangle equilàter. Trobeu raonadament α

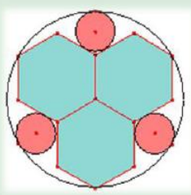


19 Decàgon i hexàgon regulars. Trobeu raonadament α



20 **21**

En una circumferència de radi R hi ha inscrits tres hexàgons regulars iguals i tres circumferències també iguals, cadascuna d'elles tangent a la circumferència exterior i a un costat de dos hexàgons.
Calculeu el radi de les circumferències.
Prefectura de Gunma. Satimiya Shrine, 1824



22 π day-2

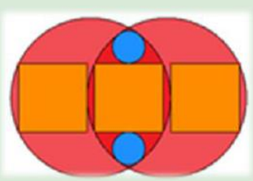
En el sangaku hi ha una circumferència de radi R i 6 circumferències d'igual radi en el seu interior. Tres tangents dues a dues i dues d'elles tangents a una corda. Tres inferiors tangents i alineades. Tres d'aquestes són tangents interiors a la circumferència de radi R. Calculeu el radi de les 6 circumferències.
Temple Suwa Nagano. 1879

23

24/31

Circumferència exterior de radi R, tres triangles equilàters, tres circumferències tangents a dos triangles i a la circumferència exterior, tres circumferències tangents en el punt mitjà del triangle equilàter i tangent a la circumferència exterior, sis circumferències cadascuna tangent a dues circumferències i al costat del triangle. Calculeu els radis dels tres tipus de circumferències.

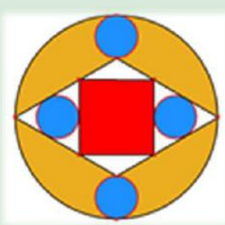
25 Temple Suwa Nagano. 1879



26

En dues circumferències d'igual radi R assecants s'han inscrit tres quadrats iguals. El quadrat central està inscrit en la intersecció de les dues circumferències. Els quadrats laterals són tangents a les dues circumferències. Dues circumferències iguals, són tangents a les circumferències de ràdios R i als costats del quadrat central. Determineu la mesura del costat del quadrat i el radi de la circumferència tangent.

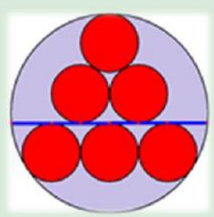
27



28

En el sangaku es mostra una circumferència de ràdio R, un rombe amb una diagonal el diàmetre de la circumferència i l'angle agut de 60°. En el rombe ha inscrit un quadrat Comproveu que les quatre circumferències tenen el mateix radi.
Temple Suwa Nagano. 1879

29



30