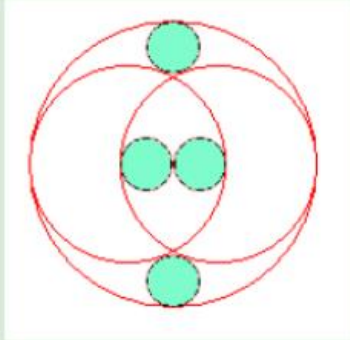


GENER 2023

Sangakus

2



3

En una circumferència exterior de radió R s'han dibuixat dues circumferències mitjanes iguals i quatre circumferències xicotetes. Calculeu el radi de les circumferències.

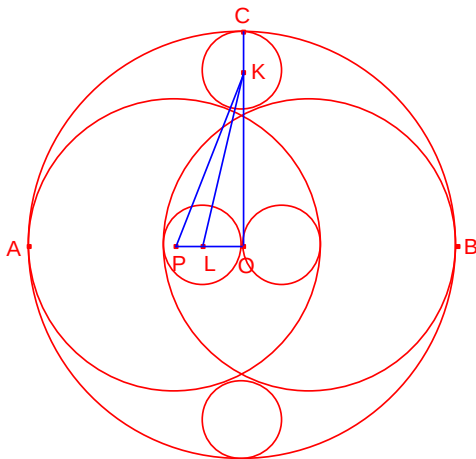
Prefectura de Ishikawa

Solució:

Siga la circumferència de centre O i diàmetre $\overline{AB} = 2R$

Siga la circumferència de centre P i radi $\overline{PA} = r$

Siga les circumferències de centres L, K i radi $\overline{LO} = \overline{KC} = t$



$$\overline{AB} = 4 \cdot \overline{PA} - 4 \cdot \overline{LO}$$

$$4r - 4t = 2R$$

Aleshores:

$$r = \frac{R + 2t}{2}$$

$$\overline{OK} = R - t, \overline{OP} = R - r = \frac{R - 2t}{2}, \overline{PK} = r + t = \frac{R + 4t}{2}$$

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\triangle POK$:

$$\left(\frac{R + 4t}{2}\right)^2 = \left(\frac{R - 2t}{2}\right)^2 + (R - t)^2$$

Simplificant:

$$2t^2 + 5Rt - R^2 = 0$$

Resolent l'equació:

$$t = \frac{-5 + \sqrt{33}}{4} R$$

$$r = \frac{R + 2t}{2} = \frac{-3 + \sqrt{33}}{4} R$$

Construcció amb GeoGebra

El primer per poder dibuixar és assignar un valor al radi R. Triarem $R=10$.

Els passos a seguir serien:

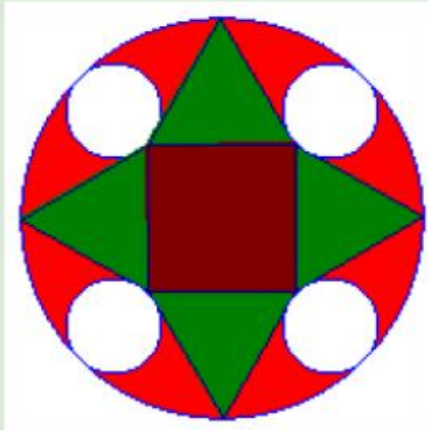
1. Dibuixem la circumferència centrada a l'origen $A(0,0)$ de radi 10.
2. Introduïm un lliscador per al radi de les circumferències menudes. Seria de nombre, valor mínim 1 i màxim 5 i increment de 0,001. L'anomenem r .
3. Els centres de dues de les circumferències menudes estaran als punts $B(r, 0)$ i $C(0, 10 - r)$. Dibuixem les circumferències amb centre al punt corresponent i radi r .
4. Les dues que falten les dibuixem amb simetria respecte als eixos o amb gir al voltant de l'origen de coordenades de 180° .
5. Per a les circumferències mitjanes necessitem els centres i un punt. Tots estan sobre l'eix d'abscisses, per això comencem per calcular les interseccions de les circumferències (la gran i les dues menudes del centre) amb l'eix d'abscisses. El centre de la circumferència mitjana és el punt mitjà entre el tall amb l'eix de la gran i el punt més llunyà dels de les menudes.
6. Les circumferències mitjanes seran tangents a les dues menudes del centre, però és possible que no ho siguin a les altres dues. Perquè siguin tangents a les quatre menudes, mourem el lliscador fins aconseguir-ho. Cal tenir en compte que perquè dues circumferències siguin tangents, la intersecció entre ambdues serà un únic punt. Si no hi ha punt d'intersecció o n'hi ha dos hem de moure el lliscador fins aconseguir-ho.
7. El radi de la major és 10, el de les menudes és r i el de les mitjanes és $r + 5$, on r és el valor que marque el lliscador quan aconseguim la tangència.

La solució general, amb radi R per a la circumferència major (i no el cas particular amb $R=10$ dibuixat) seria:

Circumferències menudes: $\frac{R}{10} \cdot r$

Circumferències mitjanes: $\frac{R}{10} \cdot (r + 5)$

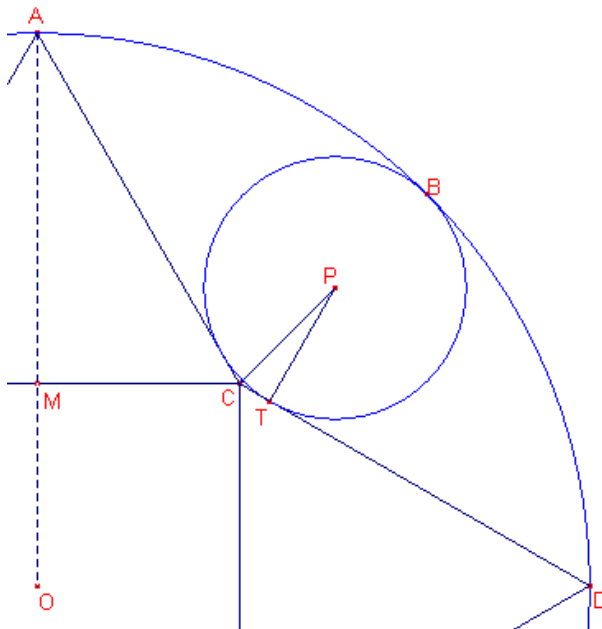
4



11

Dins d'una circumferència de radió R s'ha dibuixat un quadrat, 4 triangles equilàters sobre els costats del quadrat i 4 circumferències tangent a la circumferència exterior i tangent als costats del triangle. Calculeu el radi d'aquestes 4 circumferències.

Prefectura Okayama.



Solució:

Siga O el centre de la circumferència exterior de radi R .

Siga P el centre de la circumferència menuda (superior dreta).

Siga B el punt de tangència de les dues circumferències.

Siga C el vèrtex (superior dreta) del quadrat.

Siga A el vèrtex, exterior al quadrat, del triangle equilàter.

$R = \overline{OA}$

Siga $r = \overline{PB} = \overline{PC}$ el seu radi.

Siga T el punt de la circumferència de radi r i el costat del triangle $\overline{CD}$.

Siga c el costat del quadrat.

Siga M el punt mig del costat superior del quadrat.

$$\overline{OM} = \frac{c}{2}, \overline{AM} = \frac{\sqrt{3}}{2}c$$

$$\overline{OA} = \overline{OM} + \overline{AM} = \frac{1 + \sqrt{3}}{2}c$$

$$R = \frac{1 + \sqrt{3}}{2}c$$

Resolent l'equació en la incògnita c :

$$c = (\sqrt{3} - 1)R$$

Aplicant el teorema de Pitàgores al

triangle rectangle $\triangle OMC$:

$$\overline{OC} = \frac{\sqrt{2}}{2}c = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{2}R$$

Notem que $\angle ACD = 150^\circ, \angle CAD = 15^\circ$.

Aleshores, $\angle CPT = 15^\circ$.

$$\overline{PC} = \overline{CB} - \overline{OC} - \overline{PB}$$

$$\overline{PC} = R - \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{2}R - r$$

Aplicant raons trigonomètriques al

triangle rectangle $\triangle CPT$.

$$\frac{r}{R - \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{2}R - r} = \cos 15^\circ = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}$$

Resolent l'equació en la incògnita r :

$$r = \frac{-2 + \sqrt{6} + \sqrt{2}}{4 + \sqrt{6} + \sqrt{2}}R$$

Construcció amb GeoGebra

El primer per poder dibuixar és assignar un valor al radi R. Triarem $R=10$.

Els passos a seguir serien:

1. Dibuixem la circumferència centrada a l'origen $A(0,0)$ de radi 10.
2. Introduïm un lliscador per al costat del quadrat. Seria de nombre, valor mínim 4 i màxim 9 i increment de 0,001. L'anomenem l .
3. Els dos vèrtexs de la base del quadrat estarien als punts $B(-l/2, -l/2)$ i $C(l/2, -l/2)$.
4. Dibuixem el quadrat. Sobre cadascun dels quatre costats, el triangle equilàter corresponent.
5. Movem el lliscador fins que la figura que acabem de construir siga tangent a la circumferència.
6. Tracem una semirecta des del centre de la circumferència que passe per un dels vèrtexs del quadrat.
7. Trobem el punt d'intersecció d'aquesta semirecta i la circumferència. Serà un punt d'una de les circumferències menudes.
8. El centre de la circumferència ha d'estar sobre la semirecta, així que amb punt en objecte, marquem un punt al lloc aproximat on ha d'anar el centre.
9. Movem el punt fins que la circumferència siga tangent tant a la circumferència gran com als dos triangles.
10. El radi de les circumferències petites el calculem amb la distància entre el centre i el punt en què és tangent a la circumferència gran.

El valor r obtingut per a les circumferències menudes seria per a la circumferència exterior amb radi 10. Si generalitzem a un radi qualsevol R de la gran, el radi de les menudes seria

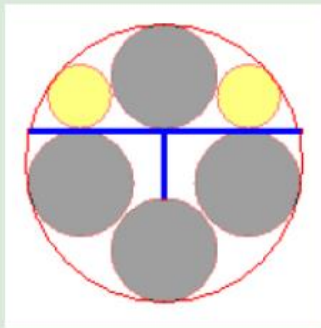
$$\frac{R}{10} \cdot r.$$

5

Una circumferència de radi R conté quatre circumferències iguals i altres dos iguals. Calculeu el radi de totes les circumferències.

Prefectura de Fukushima

12



Solució:

Siga M el punt mig del segment $\overline{KL}$

Siga la circumferència de centre O i radi $\overline{OA} = R$

Siguen les circumferències de centre P, Q i radi $\overline{PT} = r$

Siga N la projecció de P sobre el segment $\overline{OQ}$

$\overline{OP} = R - r, \overline{PQ} = 2r, \overline{OQ} = R - r$

$\overline{OM} = R - 2r$

$\overline{ON} = 3r - R, \overline{QN} = 2R - 4r$

Aplicant el teorema de Pitàgores als triangles

rectangles $\triangle ONP, \triangle QNP$:

$$\begin{aligned} \overline{PN}^2 &= (R - r)^2 - (3r - R)^2 \\ &= (2r)^2 - (2R - 4r)^2 \end{aligned}$$

Simplificant:

$$r^2 - 3Rr + R^2 = 0$$

Resolent l'equació:

$$r = \frac{3 - \sqrt{5}}{2} R$$

Siga la circumferència de centre C i radi

$\overline{CM} = R$

Siga la circumferència de centre d i radi $\overline{DF} = s$

$\overline{OC} = R - r, \overline{CD} = r + s, \overline{OD} = R - s$

Siga E la projecció de D sobre el segment $\overline{OC}$

$\overline{CE} = r - s, \overline{OE} = R - 2r + s$

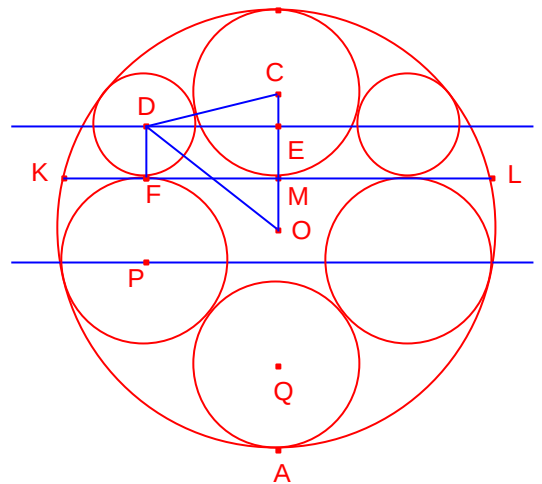
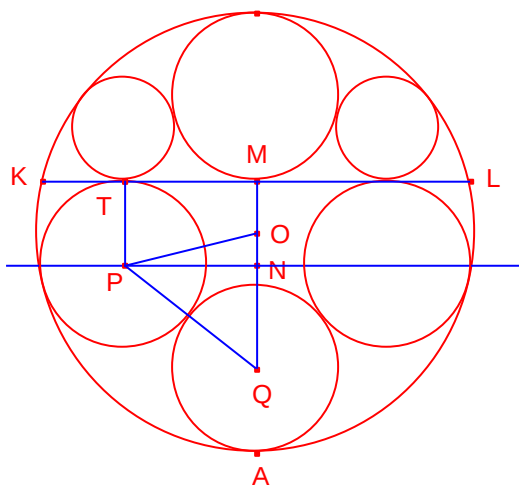
Aplicant el teorema de Pitàgores als triangles rectangles $\triangle CED, \triangle OED$:

$$\overline{DE}^2 = (r + s)^2 - (r - s)^2 = (R - s)^2 - (R - 2r + s)^2$$

Simplificant:

$$-Rs - r^2 + Rr = 0$$

$$s = \frac{(R - r)r}{R} = (-2 + \sqrt{5})R$$



Construcció amb GeoGebra

El primer per poder dibuixar és assignar un valor al radi R . Triarem $R=10$.

Els passos a seguir serien:

1. Dibuixem la circumferència centrada a l'origen $A(0,0)$ de radi 10.
2. Introduïm un lliscador per al radi de les circumferències mitjanes (les grises). Seria de nombre, valor mínim 1 i màxim 5 i increment de 0,001. L'anomenem rm .
3. El centre de la circumferència superior és al punt $B(0,10 - rm)$. Ho introduïm i dibuixem la circumferència amb centre a B i radi rm .
4. Per simetria respecte a l'eix d'abscisses dibuixem la circumferència inferior.
5. Trobem el punt d'intersecció de la circumferència amb centre a B amb l'eix d'ordenades i després la recta tangent a la circumferència per aquest punt.
6. El centre de les dues circumferències grises que falten és a la mateixa distància d' $A(0,0)$ que els centres de les que ja tenim. Dibuixem una circumferència amb centre a A i radi $10 - rm$, que contindrà el centre de totes les circumferències de la mesura de les grises que siguin tangents interiors a la circumferència gran.
7. Amb punt en objecte marquem un punt sobre la circumferència dels centres al lloc aproximat on creiem que estarà el centre d'una de les dues circumferències que ens falten. Després, amb centre aquest punt i radi rm la circumferència corresponent.
8. Ara, movent aquest punt i el lliscador del radi, ajustem el dibuix fins que vegem les tangències que volem.
9. Per simetria dibuixem la grisa que falta.
10. El centre de les circumferències menudes és sobre la recta vertical que passa pel centre de la mitjana que té davall. Dibuixem aquesta recta. Trobem el punt d'intersecció d'aquesta recta i l'horitzontal. Serà un punt de la circumferència que busquem.
11. Marquem un punt sobre la recta vertical, i després amb centre en aquest mateix punt i un altre punt a la intersecció que acabem de trobar, una circumferència. Haurem de moure el centre fins que la circumferència obtinguda siga tangent tant a la circumferència centrada a B com a l'horitzontal.
12. Per simetria respecte a l'eix d'abscisses, dibuixaríem la que falta.
13. Per a rp , el radi de la menuda, calculem la distància entre el centre de la menuda i el punt que tenim.
14. El radi de les mitjanes serà el valor rm que hem obtingut amb el lliscador.

Per al cas general, amb radi R per a la gran en lloc del 10 que hem assignat al dibuix, tindríem:

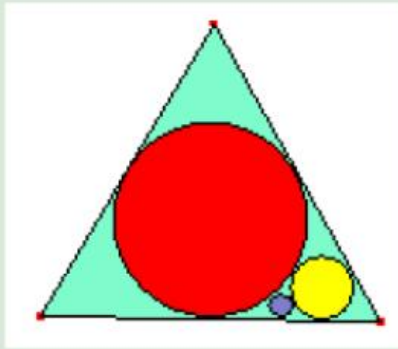
Radi de la menuda: $\frac{rp}{10} \cdot R$

Radi de la mitjana: $\frac{rm}{10} \cdot R$

6

 Φ, φ DAY

7



Donat un triangle equilàter s'ha inscrit una circumferència de ràdio r . Una altra circumferència és tangent exterior a la inscrita i a dos costats del triangle. Una tercera circumferència és tangent a un costat i tangent exterior a les dues circumferències anteriors. Calculeu el radi de les circumferències.

Prefectura de Saitama

Solució:

Siga el triangle equilàter $\triangle ABC$ de centre O .

Siga la circumferència inscrita al triangle de centre O i radi $\overline{OM} = \overline{OT} = r$

$\overline{OC} = \overline{OB} = 2r$

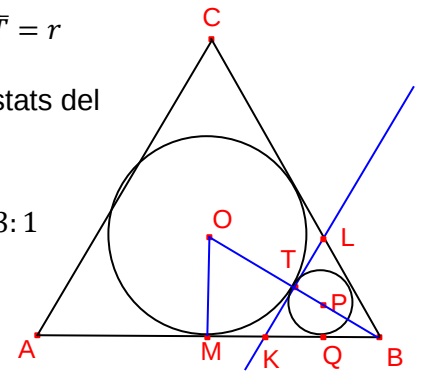
La recta perpendicular al segment $\overline{OB}$ que passa per T , talla els costats del triangle en els punts K, L .

Siga la circumferència de centre P i radi $\overline{PT} = \overline{PQ} = s$

Els triangles equilàters $\triangle ABC, \triangle KBL$ són semblants i de raó $\overline{CM} : \overline{TB} = 3 : 1$

Aplicant el teorema de Tales:

$$s = \frac{1}{3}r$$



Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\triangle OMB$:

$$\overline{MB} = r\sqrt{3}$$

Siga la circumferència de centre E i radi $\overline{EF} = t$

Els triangles rectangles $\triangle OMB, \triangle PQB$ són semblants i de raó $\overline{OM} : \overline{PQ} = 3 : 1$

Aplicant el teorema de Tales:

$$\overline{MQ} = \frac{2}{3}\overline{MB} = \frac{2}{3}\sqrt{3}r = \frac{2\sqrt{3}}{3}r$$

Siga G la projecció de E sobre $\overline{OM}$

Siga H la projecció de E sobre $\overline{PQ}$

$$\overline{OE} = r + t, \overline{OG} = r - t, \overline{PE} = s + t, \overline{PH} = s - t,$$

$$\overline{GH} = \overline{MQ} = \frac{2\sqrt{3}}{3}r$$

Aplicant el teorema de Pitàgores als triangles

$$\triangle OGE, \triangle PHE$$

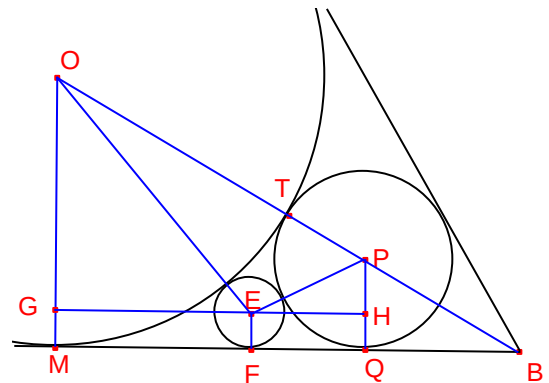
$$\overline{GE} = 2\sqrt{rt}, \overline{HE} = 2\sqrt{st}$$

$$2\sqrt{rt} + 2\sqrt{st} = \frac{2\sqrt{3}}{3}r$$

$$\sqrt{rt} + \sqrt{\frac{1}{3}rt} = \frac{\sqrt{3}}{3}r$$

Resolent l'equació:

$$t = \frac{2 - \sqrt{3}}{2}r$$



Construcció amb GeoGebra

El primer per a poder dibuixar és assignar un valor al costat del triangle.

Triarem $l=1$

Els passos a seguir serien:

1. Dibuixem un triangle equilàter de costat 1.
2. Per a inscriure la major de les circumferències trobem el centre d'un costat i del triangle. Seran un punt de la circumferència i el centre.
3. El centre de la segona circumferència estarà sobre la recta que uneix el centre de la circumferència major i el vèrtex del triangle (bisectriu de l'angle del vèrtex).
4. La intersecció d'aquesta recta i la primera circumferència serà un punt de la circumferència que busquem.
5. Només ens falta trobar el seu centre. Per a això tracem la recta paral·lela a la base del triangle pel punt que ja tenim de la circumferència. Trobem el punt en què aquesta recta curta al costat inclinat del triangle. També pertanyerà a la recta. La mediatriu del segment que uneix els dos punts que tenim passa pel centre de la circumferència i tala a la base en un punt que també pertany a la circumferència. Amb aquests tres punts dibuixem la segona circumferència.

Per a traçar la més xicoteta de les circumferències, usarem una propietat de les circumferències que es troben en una posició similar a la que busquem:

Si tracem la paràbola amb focus en el centre de la circumferència i vèrtex en el punt d'intersecció de la circumferència amb la recta de la base del triangle per a les dues circumferències que ja tenim, aquestes dues paràboles es tallaran en el centre de la tercera.

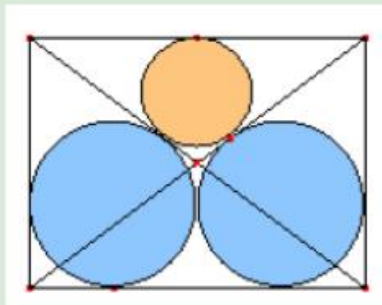
6. Per a dibuixar amb geogebra les paràboles necessitem els focus i les directrius, però el que tenim són els vèrtexs en lloc de les directrius. Usem que els vèrtexs estan a la mateixa distància del focus que de la directriu.
7. Trobem els punts simètrics dels focus respecte a la base del triangle. Seran punts de les directrius. Per a tindre-les, tracem les rectes paral·leles a la base del triangle per aquests dos punts que hem obtingut per simetria.
8. Dibuixem les dues paràboles i trobem el punt on es tallen. Ja tenim el centre de la circumferència xicoteta.
9. Per a obtindre un punt, prou traçar la perpendicular a la base del triangle pel centre que acabem d'obtindre. La intersecció de totes dues rectes serà el punt que busquem. Amb centre i punt, podem traçar la circumferència que ens faltava.
10. Per a saber quant mesuren els radis de les tres circumferències, prou traçar segments des del centre de cada circumferència fins a un punt qualsevol d'aquesta.

9

10

Dues circumferències d'igual radi r són tangents i cadascuna d'elles és tangent a dos costats d'un rectangle i a una diagonal. Calculeu la mesura dels costats del rectangle i el radi de la circumferència tangent exterior a les anteriors i tangent al rectangle.

Prefectura Fukushima



Solució:

Siga la circumferència de centre O i radi $\overline{OK} = \overline{OL} = r$

Siga el rectangle $ABCD$.

$$\overline{AB} = 4r$$

Siga $\overline{AD} = a$

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\triangle ABD$:

$$\overline{BD} = \sqrt{16r^2 + a^2}$$

La circumferència de centre O està inscrita al triangle

rectangle $\triangle ABD$.

El radi de la circumferència inscrita al triangle rectangle és:

$$r = \frac{\overline{AB} + \overline{AD} - \overline{BD}}{2} = \frac{4r + a - \sqrt{16r^2 + a^2}}{2}$$

$$2r + a = \sqrt{16r^2 + a^2}$$

Resolent l'equació:

$$a = 3r$$

Siga La circumferència de centre P i radi $\overline{PM} = \overline{PT} = s$

La recta OL talla el costat $\overline{CD}$ en el punt N .

Siga Q la projecció de P sobre el segment $\overline{ON}$

$$\overline{ON} = a - r = 2r$$

$$\overline{OQ} = 2r - s, \overline{PQ} = \overline{MN} = r, \overline{OP} = r + s$$

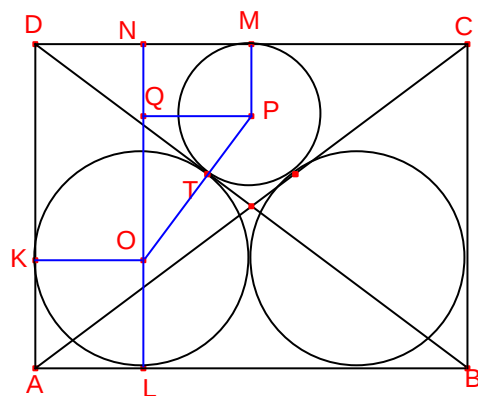
Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\triangle OQP$:

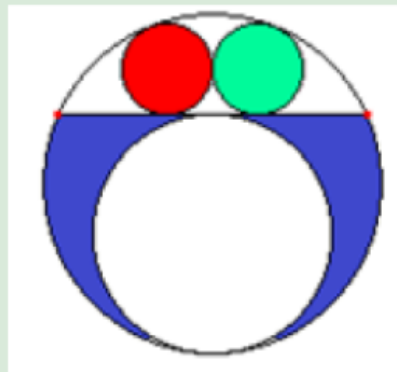
$$(r + s)^2 = r^2 + (2r - s)^2.$$

Simplificant:

$$4r^2 = 6rs$$

$$s = \frac{2}{3}r$$





Solució:

Siga la circumferència exterior de centre O i radi $\overline{OK} = R$

Siga la circumferència de centre P i radi $\overline{PK} = \overline{PM} = s$

Siga la circumferència menuda de centre Q i radi $\overline{QT} = r$

$$\overline{OQ} = R - r, \overline{TM} = r$$

$$\overline{OM} = \overline{MK} - \overline{OK} = 2s - R$$

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\triangle OTQ$:

$$(R - r)^2 = r^2 + (r + 2s - R)^2$$

Simplificant:

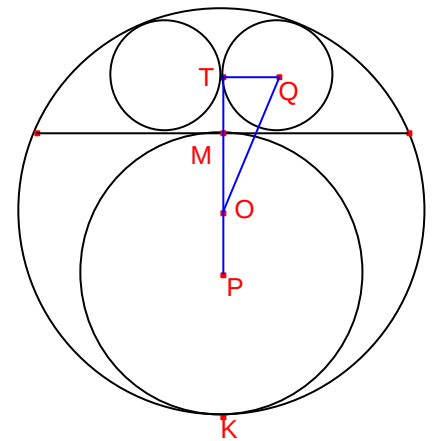
$$r^2 + 4s^2 + 4rs - 4Rs = 0$$

Resolent l'equació:

$$R = \frac{(r + 2s)^2}{4s}$$

El diàmetre de la circumferència exterior és:

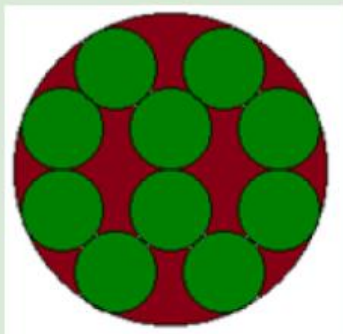
$$d = 2R = \frac{(r + 2s)^2}{2s}$$



Construcció amb GeoGebra

1. El primer serà definir dos lliscadors per als radis r i s . Tots dos de número i amb increment 0,001. El radi de les xicotetes, r entre 1 i 9 i el de la gran s entre 1.5 i 10.
2. Dibuixem la circumferència gran amb centre en l'origen i radi s .
3. Trobem el punt d'intersecció de la circumferència amb l'eix d'ordenades. Després la recta tangent a la circumferència en aqueix punt.
4. Introduïm el punt de coordenades $(r, r+s)$ que serà el centre de la circumferència xicoteta de la dreta. Després la circumferència centrada en aqueix punt amb ràdio r . Per simetria respecte a l'eix d'ordenades, l'altra circumferència xicoteta.
5. Dibuixem la recta que passa pels centres de la circumferència gran i la xicoteta de la dreta. Després el punt d'intersecció d'aquesta recta amb la circumferència xicoteta.
6. Per simetria, el mateix per a la circumferència de l'esquerra.
7. Dibuixem la circumferència que passa per tres punts: els dos que acabem de trobar en les circumferències xicotetes i el tercer el d'intersecció de la part inferior de la gran amb l'eix d'ordenades.

16



23

En una circumferència s'han inscrit deu circumferències iguals. Determineu la proporció entre el radi d'una xicoteta i el radi de la circumferència exterior.

Prefectura Shisouka

Solució:

Siga O el centre de la circumferència exterior de radi $R = \overline{OT}$.

Siga L el centre de la circumferència de radi $r = \overline{LK} = \overline{LM} = r$

Els triangles rectangles $\triangle OKL, \triangle OML$ són iguals.

Siga $\angle KLO = \alpha$

$$\overline{OL} = R - r$$

$$\cos \alpha = \frac{r}{R - r}$$

$$\angle OPQ = 2\alpha$$

$$\overline{OP} = r, \overline{PQ} = 2r, \overline{OQ} = R - r$$

Aplicant el teorema del cosinus al triangle

rectangle $\triangle OPQ$

$$(R - r)^2 = r^2 + 4r^2 - 2 \cdot 2r^2 \cdot \cos 2\alpha$$

$$(R - r)^2 = r^2 + 4r^2 - 2 \cdot 2r^2 \cdot (2 \cdot \cos^2 \alpha - 1)$$

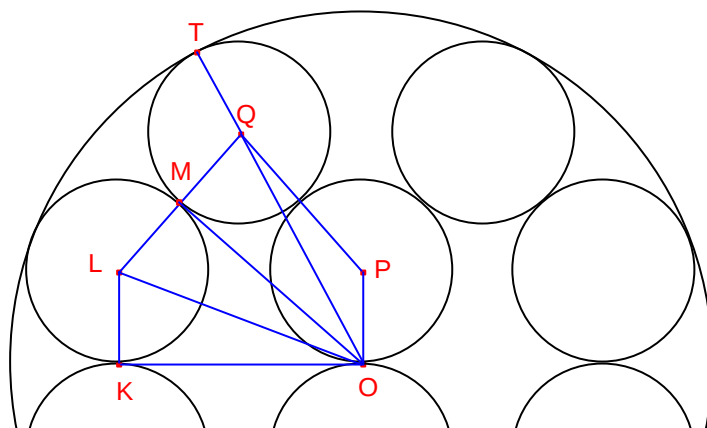
$$(R - r)^2 = r^2 + 4r^2 - 2 \cdot 2r^2 \cdot \left(2 \frac{r^2}{(R - r)^2} - 1\right)$$

Simplificant:

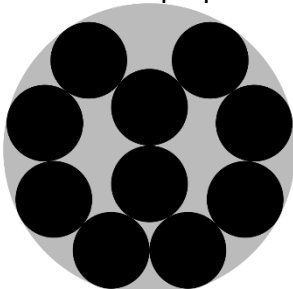
$$R^3 - 4rR^2 - 3r^2R + 14r^3 = 0$$

Resolent l'equació:

$$\frac{R}{r} = 2\sqrt{2} + 1 \approx 3.82$$



No és el empaquetament òptim. L'empaquetament òptim és:



$$\frac{R}{r} = 2\sqrt{2} + 1 \approx 3.81$$

Construcció amb GeoGebra

El primer pas per a poder dibuixar és assignar un valor al radi R de la gran. Triarem $R=10$.

Els passos a seguir serien:

Dibuixem la circumferència centrada en l'origen $A(0,0)$ de radi 10.

Introduïm un lliscador per al radi de les circumferències xicotetes. Seria de número, valor mínim 1 i màxim 5 i increment de 0,001. Ho diem r .

Els centres de dos de les circumferències xicotetes del centre estaran en els punts $B(0,r)$ i $C(0,-r)$. Dibuixem les circumferències amb centre en el punt corresponent i radi r .

El centre de les altres circumferències es troba a una distància r de la circumferència gran. Si dibuixem la circumferència centrada en l'origen i amb radi $10-r$, tots els centres estaran sobre ella.

Tracem la recta que passa pel centre de la circumferència xicoteta amb centre en $(0,r)$ i és paral·lela a l'eix d'abscisses. Hi ha dues circumferències amb centre sobre aquesta recta. Amb intersecció amb la circumferència dels centres i aquesta recta, obtenim les coordenades dels punts centrals. Els radis continuen sent r .

Per simetria respecte a l'eix d'abscisses obtenim dues circumferències més.

Els centres de les quals falten són equidistants respecte als centres de les quals són tangents, és a dir, estan en la mediatriu del segment que uneix els centres. Amb la intersecció amb la circumferència dels centres, obtenim les coordenades. Els radis mesuren r com els altres. Per simetries obtenim les que falten.

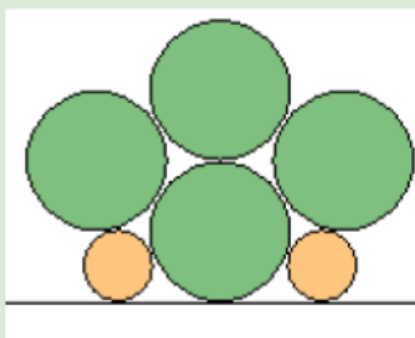
Movem el lliscador fins que les circumferències siguin tangents.

17

La figura té sis circumferències tangents tres a tres. Hi ha quatre grans iguals i dues xicotetes iguals. Les dues xicotetes i una de gran són tangents a una recta. Calculeu la proporció entre els radis dels dos tipus de circumferències.

Prefectura de Nagano.

18



Solució:

Siguen K, L, M els centres de les tres circumferències iguals de radi $\overline{KT} = \overline{KB} = R$

Siga P el centre de la circumferència menuda de radi $\overline{PA} = r$

El triangle $\triangle KLM$ és equilàter.

$$\overline{MT} = R\sqrt{3}$$

Siga C la projecció de M sobre la recta inferior.

Siga D la projecció de P sobre la recta KL .

Siga E la projecció de P sobre la recta MC .

$$\overline{PK} = R + r, \overline{DK} = R - r$$

Aplicant el teorema de Pitàgores al

triangle rectangle $\triangle PDK$:

$$\overline{PD} = \sqrt{(R + r)^2 - (R - r)^2} = 2\sqrt{Rr}$$

$$\overline{PE} = \overline{MT} - \overline{PD} = R\sqrt{3} - 2\sqrt{Rr}$$

$$\overline{MP} = R + r, \overline{ME} = \overline{TB} - \overline{PA} = 2R - r$$

Aplicant el teorema de Pitàgores al

triangle rectangle $\triangle MPE$:

$$(R + r)^2 = (2R - r)^2 + (R\sqrt{3} - 2\sqrt{Rr})^2$$

Simplificant:

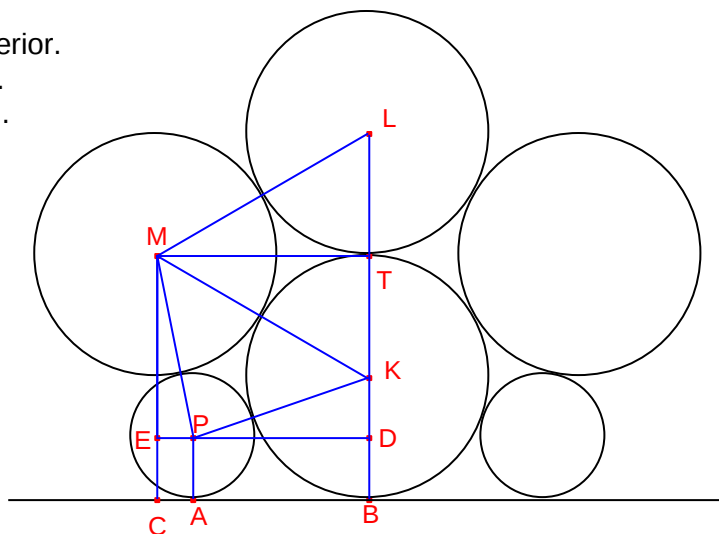
$$4\sqrt{3}\sqrt{Rr} = 6R - 2r$$

Elevant al quadrat:

$$r^2 - 18Rr + 9R^2 = 0$$

Resolent l'equació:

$$\frac{r}{R} = 9 - 6\sqrt{2}$$



Construcció amb GeoGebra

El primer per poder dibuixar una de les circumferències grans és assignar un valor al radi R . Triarem $R = 10$.

Els passos a seguir serien:

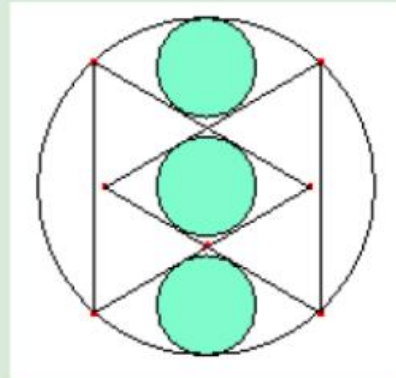
1. Dibuixem la circumferència gran inferior, amb centre a $A(0,0)$ i radi 10.
2. Trobem el punt d'intersecció de la circumferència amb l'eix d'ordenades.
3. Per simetria dibuixem la circumferència gran que té a sobre.
4. Els centres de tres circumferències iguals i tangents són als vèrtexs d'un triangle equilàter. Necessitem el centre de la circumferència superior.
5. Dibuixem el triangle equilàter amb base el segment determinat pels dos centres. Amb centre al vèrtex i radi 10 dibuixem una de les altres circumferències grans. L'altra, amb el mateix procediment o per simetria.
6. Dibuixem la recta tangent inferior a la primera circumferència. També hi estan recolzades les dues circumferències menudes.
7. El centre de les circumferències menudes és sobre la mediatriu del segment que uneix els centres de la circumferència inferior i una de les laterals.
8. Marquem un punt sobre l'horitzontal i, per ell, la perpendicular. El punt de tall d'ambdues rectes, perpendicular i mediatriu, serà el centre de la circumferència menuda.
9. Amb el punt sobre l'horitzontal i el centre dibuixem una de les circumferències menudes. Movem el punt sobre l'horitzontal fins que la circumferència siga tangent a les dues circumferències grans i a la recta horitzontal. L'altra per simetria.
10. Tenim el centre i un punt de la circumferència menuda, podem mesurar el radi.

19

En una circumferència de radi R s'han dibuixat dos triangles equilàters iguals amb els costats paral·lels. En la intersecció dels dos triangles i en l'exterior dels dos triangles s'han dibuixat tres circumferències d'igual radi. Calculeu el radi de les tres circumferències.

Prefectura de Ishikawa

20



Solució:

Siga la circumferència de centre O i radi $\overline{OA} = R$

Siga la circumferència de centre O i radi $\overline{OK} = r$

Siga la circumferència de centre P i radi $\overline{PL} = \overline{PA} = r$

Siga B el punt intersecció dels dos triangles equilàters.

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\triangle OKB$:

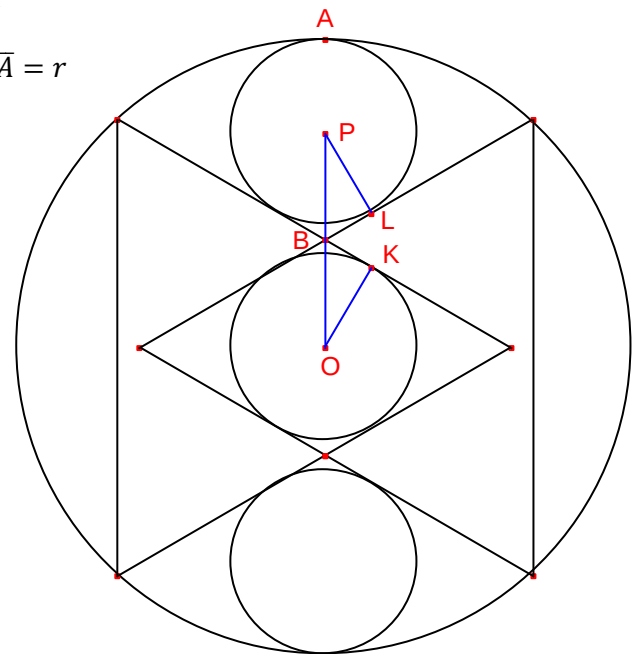
$$\overline{OB} = \overline{PB} = \frac{2\sqrt{3}}{3}r$$

$$\overline{OA} = 2 \cdot \overline{OB} + r = R$$

$$\left(\frac{2\sqrt{3}}{3} + 1\right)r = R$$

Resolent l'equació:

$$r = \frac{4\sqrt{3} - 3}{13}R$$



Construcció amb GeoGebra

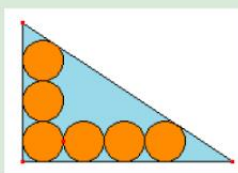
El primer per poder dibuixar la circumferència gran és assignar un valor al radi R . Triarem $R = 10$.

Els passos a seguir serien:

1. Dibuixem la circumferència gran amb centre a $A(0,0)$ i radi 10.
2. Inserim un lliscador de número, entre 0 i 10 amb increment 0.001. L'anomenarem a .
3. Definim el punt $(a, 0)$, i per ell, la perpendicular a l'eix d'abscisses. Els punts de tall d'aquesta recta amb la circumferència seran els vèrtexs d'un costat del triangle equilàter de la dreta. El dibuixem.
4. L'altre l'aconseguim per simetria respecte de l'eix d'ordenades.
5. Movem el lliscador fins que els dos triangles estiguen en una posició semblant a la del dibuix.
6. Comencem per dibuixar la circumferència central. El seu centre és al $(0,0)$. Si dibuixem la recta tangent a un dels costats del rombe que l'ha de contenir que passe pel $(0,0)$, obtindrem un punt de la circumferència. Ja la podem dibuixar.
7. Si tracem la perpendicular a l'eix d'abscisses que passe pel punt de tangència de la circumferència que ja tenim amb el rombe, tindrem els punts de tangència de les altres dues circumferències amb els costats del triangle en un dels dos costats de l'eix d'ordenades. Per simetria, podem obtenir els de l'altra banda.
8. Ara tenim tres punts de cadascuna de les dues circumferències: els dos que acabem d'obtenir on és tangent als triangles, i el punt en què coincideix amb la circumferència gran. A la de dalt seria el $(0,10)$. Podem dibuixar-les.
9. Només falta moure el lliscador perquè els radis de les tres circumferències coincidisquen.

1. Dibuixem la circumferència de l'esquerra, amb centre a $A(0,10)$ i radi 10. La de la dreta tindrà centre a $B(20,10)$ i el mateix radi.
2. Marquem dos punts sobre la circumferència de l'esquerra. Seran els vèrtexs de dos dels quadrats.
3. A cada punt tracem la recta perpendicular a l'eix d'abscisses. Trobem els punts d'intersecció de les verticals amb l'eix. Amb ells tindrem el costat vertical esquerre de cadascun dels quadrats.
4. Ara només cal moure els dos punts que hem col·locat sobre la circumferència fins que els quadrats estiguen en la posició buscada. El quadrat menut de la dreta que ens falta, el podem treure per simetria.

24



25

En un triangle rectangle s'han inscrit sis circumferències iguals i tangents entre si de radi r . Calculeu la proporció dels catets. Calculeu la mesura dels catets.

Prefectura de Fukushima

Solució:

Siga el triangle rectangle exterior $\triangle ABC$, $A = 90^\circ$
 Siguen les circumferències de centres K, L, M i
 radi $\overline{KJ} = \overline{LT} = r$.

Els triangles rectangles $\triangle ABC, \triangle KLM$ són semblants.

$$\overline{KL} = 6r, \overline{KM} = 4r$$

Aplicant el teorema de Tales:

$$\frac{b}{c} = \frac{\overline{KM}}{\overline{KL}} = \frac{4r}{6r} = \frac{2}{3}$$

Pel punt de tangència T tracem una perpendicular al costat $\overline{AB}$ que talla els costats del triangle $\triangle ABC$ en els punts P, Q .

Els triangles $\triangle ABC, \triangle PBQ$ són semblants.

$$\text{Siga } \overline{PQ} = 2k, \overline{PB} = 3k$$

Aplicant el teorema de Pitàgores al

triangle rectangle $\triangle PBQ$:

$$\overline{BQ} = k\sqrt{13}$$

La circumferència de centre L està inscrita

al triangle rectangle $\triangle PBQ$.

El radi de la circumferència inscrita al triangle rectangle és:

$$r = \frac{\overline{PQ} + \overline{PB} - \overline{BQ}}{2} = \frac{2k + 3k - k\sqrt{13}}{2}$$

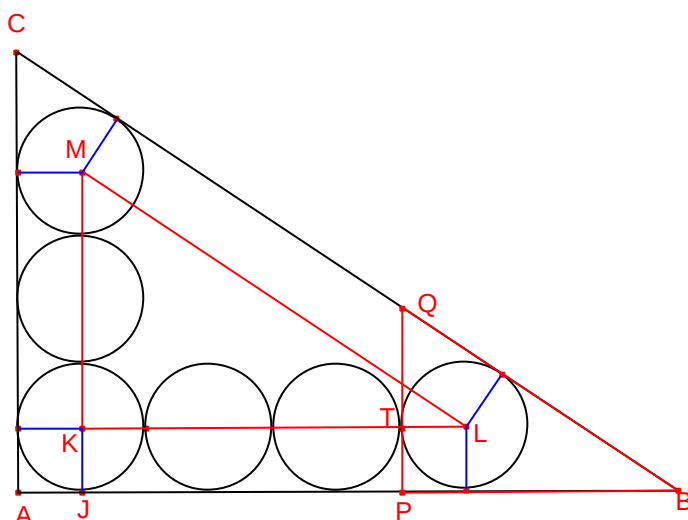
$$2r = (5 - \sqrt{13})k$$

Resolent l'equació:

$$k = \frac{5 + \sqrt{13}}{6}r$$

Els catets del triangle $\triangle ABC$ són:

$$\overline{AB} = 6r + 3k = \frac{17 + \sqrt{13}}{2}r, \overline{AC} = 4r + 2k = \frac{17 + \sqrt{13}}{3}r$$



Construcció amb GeoGebra

El primer per poder dibuixar una de les circumferències és assignar un valor al radi R . Triarem $R = 1$.

Els passos a seguir serien:

1. Dibuixem la circumferència inferior esquerra, amb centre a $A(0,0)$ i radi 1.
2. Per dibuixar les altres, definim dos vectors per traslladar-les: En horitzontal el $(2,0)$ i en vertical el $(0,2)$.
3. Dibuixem mitjançant translacions les altres circumferències.
4. La base i l'altura del triangle són tangents a les circumferències, usant recta tangent a dues de les circumferències horitzontals obtindrem la base i amb dues de les verticals l'altura.
5. La hipotenusa és tangent a les dues circumferències dels extrems.
6. Cal rebutjar una de les dues tangents que hem obtingut cada vegada que hem aplicat recta tangent. Només ens interessa l'exterior en cada cas.
7. Amb intersecció, obtenim els vèrtexs del triangle. Ja podem dibuixar-lo.

Construcció amb GeoGebra

Primer dibuixem un quadrat de vèrtexs $A(0, 0)$ i $B(1, 0)$ i la circumferència roja amb centre $C(0.5, 0.5)$ i radi $r=0.5$

Creem els lliscadors per determinar el radi de les circumferències:

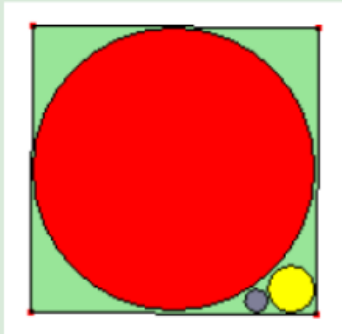
$R1$ amb valors compresos entre 0 i 0.1

$R2$ amb valors compresos entre 0 i 0.05

Dibuixem el segment BC . El centre de la circumferència groga es trobarà sobre ell i les coordenades són $C1(1-R1, R1)$ i radi $R1$. Hem d'ajustar el valor perquè siga tangent a la circumferència roja.

Per situar el centre de la circumferència grisa no tenim una restricció tan clara. Situem el punt D al costat AB del quadrat, les coordenades del centre seran $C2=B+(0, R2)$ i el radi $R2$. Ara hem de modificar la posició del punt D i el valor del radi perquè siga tangent a les altres dues circumferències.

26



27

Donat un quadrat s'ha inscrit una circumferència de radi r . Una altra circumferència és tangent exterior a la inscrita i a dos costats del quadrat. Una tercera circumferència és tangent a un costat i tangent exterior a les dues circumferències anteriors. Calculeu el radi de les circumferències.

Prefectura de Saitama

Solució:

Siga el quadrat $ABCD$ de centre O .

Siga la circumferència inscrita al quadrat de radi $\overline{OM} = \overline{ON} = r$

Siga la circumferència de centre P i radi $\overline{PT} = s$ tangent exterior a la circumferència inscrita al quadrat i als costats del quadrat.

Pel punt P tracem una perpendicular al costat $\overline{AB}$ que talla el segment $\overline{OM}$ en el punt F .

$\overline{OT} = \overline{PF} = r - s, \overline{OP} = r + s$

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle

$\triangle OFP$:

$$r+s = (r-s)\sqrt{2}.$$

Resolent l'equació:

$$s = (3 - 2\sqrt{2})r$$

Siga la circumferència de centre Q i radi $\overline{QK} = t$ tangent exterior a les altres dues circumferències i al costat del quadrat.

Siga H la projecció de Q sobre el segment $\overline{ON}$

Siga G la projecció de Q sobre la recta PF

Siga $a = \overline{HQ}, \overline{GQ} = r - s - a$

$\overline{OH} = r - t, \overline{OQ} = r + t$

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle

rectangle $\triangle OHQ$:

$$a^2 = 4rt$$

$\overline{PG} = s - t, \overline{PQ} = s + t$

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle

$\triangle PQG$:

$$4st = (r - s + a)^2$$

$$4(3 - 2\sqrt{2})rt = 4(3 - 2\sqrt{2})r^2 + 4rt - 4(\sqrt{2} - 1)r2\sqrt{rt}$$

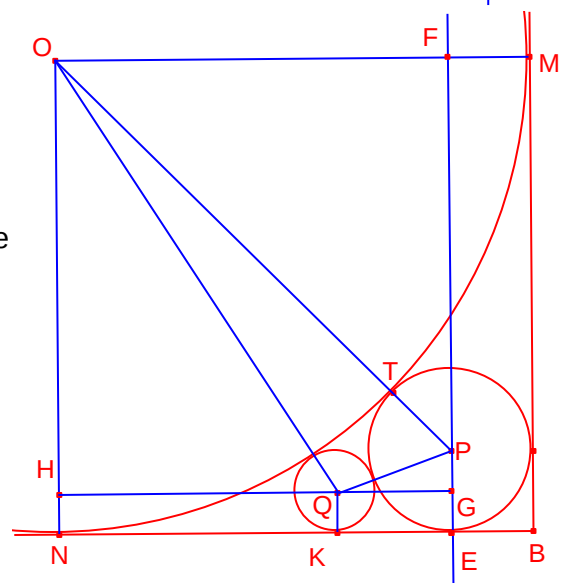
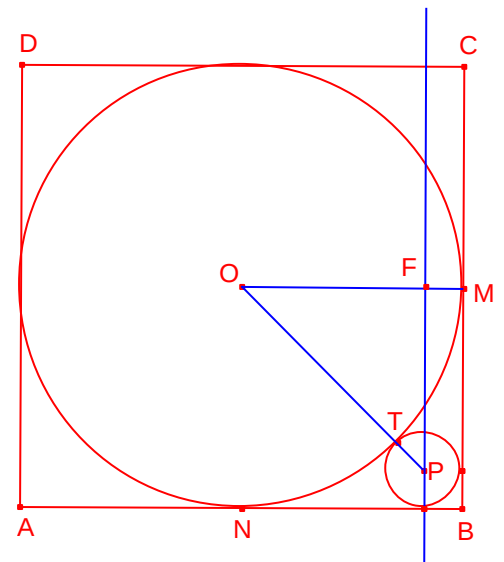
Simplificant:

$$2t - (1 + \sqrt{2})r = 2\sqrt{rt}$$

Resolent l'equació:

$$t = \frac{3 - 2\sqrt{2}}{2}r$$

Notem que $t = \frac{1}{2}s$



Construcció amb GeoGebra

El primer per poder dibuixar una de les circumferències és assignar un valor al radi d'una, la menuda, RP . Triarem $RP = 10$.

Els passos a seguir serien:

1. Dibuixem la circumferència menuda, amb centre a $A(0,0)$ i radi 10.
2. La base del triangle està sobre la recta tangent a la circumferència en el punt $B(0,10)$. La dibuixem.
3. Amb punt sobre objecte, marquem el vèrtex dret de la base del triangle, i per simetria sobre l'eix d'ordenades, l'altre vèrtex.
4. Dibuixem el triangle equilàter amb base en aquests dos punts.
5. La circumferència mitjana, la podem dibuixar sabent que passa per tres punts: els dos vèrtexs de la base del triangle i el punt inferior de la circumferència menuda, el $(0, -10)$.
6. Per aquest punt i el vèrtex superior del triangle passa un diàmetre de la circumferència gran. Trobem el punt mitjà del segment i dibuixem la circumferència amb el centre obtingut i un dels dos punts que coneixem, per exemple, el vèrtex superior del triangle.
7. Movent el vèrtex inferior dret del triangle, el que hem definit sobre la recta, modifiquem les mesures.

6. Per aquest punt i el vèrtex superior del triangle passa un diàmetre de la circumferència gran. Trobem el punt mitjà del segment i dibuixem la circumferència amb el centre obtingut i un dels dos punts que coneixem, per exemple, el vèrtex superior del triangle.
7. Movent el vèrtex inferior dret del triangle, el que hem definit sobre la recta, modifiquem les mesures.