

FEBRER 2023

1 Trobeu el terme del desenvolupament del binomi $\left(\frac{3}{4}\sqrt[3]{a^2} + \frac{2}{3}\sqrt{a}\right)^{12}$ que conté a^7



Solució

$$\text{terme } k+1 \Rightarrow \binom{12}{k} \left(\frac{3}{4}\sqrt[3]{a^2}\right)^{12-k} \left(\frac{2}{3}\sqrt{a}\right)^k$$

$$\text{exponent de } a \Rightarrow a^{\frac{2}{3}(12-k)} \cdot a^{\frac{k}{2}} \Rightarrow \frac{24-2k}{3} + \frac{k}{2} = 7$$

$$\text{resolent l'equació: } 2(24-2k)+3k=42$$

$$48-4k+3k=42$$

$$k=6$$

Per tant busquem el terme setè: $T_7=$

$$\binom{12}{6} \left(\frac{3}{4}\sqrt[3]{a^2}\right)^{12-6} \left(\frac{2}{3}\sqrt{a}\right)^6 = 924 \frac{3^6}{4^6} \left(a^{\frac{2}{3}}\right)^6 \frac{2^6}{3^6} \left(a^{\frac{1}{2}}\right)^6 = \frac{231}{16} a^7$$

2 Per a quin valor de x el cinquè terme del desenvolupament de $\left(\frac{1}{2\sqrt{x}} - \frac{1}{2}\right)^{10}$ és igual a 105?



Solució

$$T_5 = \binom{10}{4} \left(\frac{1}{2\sqrt{x}}\right)^6 \left(-\frac{1}{2}\right)^4 = 210 \frac{1}{2^6 x^3} \frac{1}{2^4} = \frac{210}{1024 x^3} = \frac{105}{512 x^3} \Rightarrow$$

$$\frac{105}{512 x^3} = 105 \Rightarrow x^3 = \frac{1}{512} \Rightarrow x = \frac{1}{8}$$

3



4

Trobeu el terme central de $\left(-\sqrt{\frac{1}{a}} \cdot \sqrt{a} - \sqrt{\frac{a^{-2}}{\sqrt{a}}}\right)^n$, sabent que el coeficient del cinquè terme és al coeficient del tercer terme com 11 és a 1.

Solució

$$\frac{\binom{m}{4}}{\binom{m}{2}} = \frac{11}{1} \implies \frac{m(m-1)(m-2)(m-3)}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 11 \frac{m(m-1)}{2} \implies (m-2)(m-3) = 132$$

$$\implies$$

$$m^2 - 5m - 126 = 0 \implies m = 14 \quad m = -9 \text{ (no val)}$$

Terme central :

$$T_8 = \binom{14}{7} \left(-\sqrt{\frac{1}{a}} \cdot \sqrt{a}\right)^7 \cdot \left(-\sqrt{\frac{a^{-2}}{\sqrt{a}}}\right)^7 = -3432 a \cdot a^{7/2} \cdot a^{-2} \cdot a^{-1/2} = -3432 a^2$$

6

En el desenvolupament del binomi $\left(x^3 + \frac{1}{x}\right)^n$ els coeficients dels termes quart i diuèté són iguals. Trobeu el terme on apareix x^4

7



e-day

Solució

$$\text{Són iguals els nombres combinatoris simètrics} \implies \binom{m}{3} = \binom{m}{m-3} \implies m-3=17$$

$$\implies m=20$$

$$\text{Terme } k+1 : \binom{20}{k} (x^3)^{20-k} \left(\frac{1}{x}\right)^k = \binom{20}{k} x^{60-3k-k} = \binom{20}{k} x^{60-4k}$$

$$60-4k=4 \implies k=14 \implies \text{Terme } 15:$$

$$T_{15} = \binom{20}{14} (x^3)^{20-14} \left(\frac{1}{x}\right)^{14} = 38760 x^4$$

8

En la expressió $\left(\frac{\sqrt[3]{m^2}}{x+1\sqrt{m^x}} + m\sqrt[5]{m^{x-2}}\right)^{10}$ trobeu x perquè el terme setè siga $210m^6$.



Solució

$$\text{Terme setè: } T_7 = \binom{10}{6} \left(\frac{\sqrt[3]{m^2}}{x+1\sqrt{m^x}} \right)^4 \left(m\sqrt[5]{m^{x-2}} \right)^6 = 210m^6$$

$$210 \left(\frac{m^{\frac{2}{3}}}{m^{\frac{x}{x+1}}} \right)^4 \left(m^6 \cdot m^{\frac{6x-12}{x}} \right) = 210m^6$$

igualant els exponents :

$$\frac{8}{3} - \frac{4x}{x+1} + 6 + \frac{6x-12}{x} = 6 \implies \frac{8}{3} - \frac{4x}{x+1} + \frac{6x-12}{x} = 0$$

traient denominadors:

$$8x(x+1) - 12x^2 + (6x-12)3(x+1) = 0$$

$$8x^2 + 8x - 12x^2 + 18x^2 + 18x - 36x - 36 = 0$$

$$14x^2 - 10x - 36 = 0 \implies 7x^2 - 5x - 18 = 0 \implies x=2 \text{ o } x = -\frac{9}{7}$$

10



11

La suma de tots els coeficients del desenvolupament del binomi $\left(\sqrt[3]{x} + \sqrt[5]{\frac{1}{x}}\right)^m$ és 64. Trobeu el terme on l'exponent de x és $\frac{5}{2}$.

Solució

Suma dels coeficients: $\binom{m}{0} + \binom{m}{1} + \binom{m}{2} + \dots + \binom{m}{m} = 2^m \implies 2^m = 64 \implies m=6$

Terme del lloc k+1: $T_{k+1} = \binom{6}{k} (\sqrt[3]{x})^{6-k} (\sqrt{x})^k$

exponent d'x: $\frac{6-k}{3} + \frac{k}{2} = \frac{5}{2} \implies 12-2k+3k=15 \implies k=3$

Quart terme: $T_4 = \binom{6}{3} (\sqrt[3]{x})^3 (\sqrt{x})^3 = 20x^{\frac{5}{2}}$

13 El quart terme del desenvolupament del binomi $\left(\frac{\sqrt[3]{5}}{(\sqrt[3]{x})^{10 \log x}} + x \cdot \log x^3 \sqrt{x} \right)^6$ és 100. Trobeu x.



Solució

$$T_4 = \binom{6}{3} \left(\frac{\sqrt[3]{5}}{(\sqrt[3]{x})^{10 \log x}} \right)^3 \left(x \cdot \log x^3 \sqrt{x} \right)^3 = 100 \implies 20 \frac{5}{x^{10 \log x}} \cdot x^3 \cdot x^{\frac{3}{\log x^3}} = 100 \implies$$

$$\frac{100}{x^{10 \log x}} \cdot x^3 \cdot x^{\frac{3}{3 \log x}} = 100 \implies x^{-10 \log x + 3 + \frac{1}{\log x}} = 1 \implies (-10 \log x) + 3 + \frac{1}{\log x} = 0$$

$$\text{canvi variable: } \log x = t \implies -10t + 3 + \frac{1}{t} = 0 \implies -10t^2 + 3t + 1 = 0 \implies$$

$$t = \frac{1}{2} \implies \log x = \frac{1}{2} \implies x = 10^{\frac{1}{2}} = \sqrt{10}$$

$$t = -\frac{1}{5} \implies \log x = -\frac{1}{5} \implies x = 10^{-\frac{1}{5}}$$

14



15

Trobeu el valor de x en el desenvolupament $\left(\sqrt[4]{x} + \frac{1}{\sqrt{x}}\right)^8$, sabent que el terme que conté x elevat a un exponent que és $5/2$ l'exponent del terme següent, és 144 unitats més gran que l'últim terme esmentat.

Solució

$$\left(\sqrt[4]{x} + \frac{1}{\sqrt{x}}\right)^8 = \sum_{k=0}^8 \binom{8}{k} \left(\sqrt[4]{x}\right)^{8-k} \left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^k$$

$$\text{Exponent del terme } k+1: \frac{8-k}{4} - \frac{k}{2} = \frac{8-3k}{4}$$

$$\text{Exponent del terme } k+2: \frac{8-(k+1)}{4} - \frac{k+1}{2} = \frac{5-3k}{4}$$

$$\text{Relació dels exponents: } \frac{8-3k}{4} = \frac{5-3k}{2} \implies 8-3k = \frac{5}{2}(5-3k) \implies$$

$$16-6k=25-15k \implies k=1 \implies \text{Relació de termes: } T_2=144+T_3$$

$$\binom{8}{1} \left(\sqrt[4]{x}\right)^7 \left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^1 = 144 + \binom{8}{2} \left(\sqrt[4]{x}\right)^6 \left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^2 \implies 8x^{\frac{7}{4}} \cdot x^{-\frac{1}{2}} = 144 + 28x^{\frac{6}{4}} \cdot x^{-1} \implies$$

$$8x^{\frac{5}{4}} = 144 + 28x^{\frac{1}{2}} \implies 8\sqrt[4]{x^5} - 28\sqrt{x} - 144 = 0$$

$$\text{Canvi de variable: } \sqrt{x} = z^2 \implies \sqrt[4]{x} = z \implies 8z^5 - 28z^2 - 144 = 0$$

$$\text{Por Ruffini} \quad z=2 \implies \sqrt[4]{x} = 2 \implies x=16$$

9

Trobeu per a quin valor de x , la suma del segon i quart terme en el desenvolupament de $(\sqrt{2^{x+1}} + \frac{1}{\sqrt{2^x}})^m$ és igual a $\frac{129}{2}\sqrt{2}$, sabent que la suma dels coeficients binòmics dels tres últims termes és igual a 11.

16



Solució

$$\text{Relació dels coeficients: } \binom{m}{m} + \binom{m}{m-1} + \binom{m}{m-2} = 11 \implies$$

$$1 + \frac{m!}{(m-1)!1!} + \frac{m!}{(m-2)!2!} = 11 \implies 1 + m + \frac{m(m-1)}{2} = 11 \implies$$

$$2 + 2m + m^2 - m = 22 \implies m^2 + m - 20 = 0 \implies m=4 \quad \text{i} \quad m=-5 \text{ (no val)}$$

$$\begin{aligned} T_2 + T_4 &= \binom{4}{1} (\sqrt{2^{x+1}})^3 \frac{1}{\sqrt{2^x}} + \binom{4}{3} (\sqrt{2^{x+1}}) \left(\frac{1}{\sqrt{2^x}} \right)^3 = \\ &= 4 \cdot 2^{\frac{3x+3}{2}} \cdot 2^{\frac{-x}{2}} + 4 \cdot 2^{\frac{x+1}{2}} \cdot 2^{\frac{-3x}{2}} = 4 \cdot 2^{\frac{3x}{2} + \frac{3}{2} - \frac{x}{2}} + 4 \cdot 2^{\frac{x}{2} + \frac{1}{2} - \frac{3x}{2}} = 4 \cdot 2^{x+\frac{3}{2}} + 4 \cdot 2^{\frac{1}{2}-x} = \\ &= 4 \cdot 2^x \cdot \sqrt{2^3} + 4 \cdot \sqrt{2} \cdot 2^{-x} = 4 \cdot 2^x \cdot 2\sqrt{2} + 4 \cdot \sqrt{2} \cdot 2^{-x} \end{aligned}$$

Relació dels termes

$$4 \cdot 2^x \cdot 2\sqrt{2} + 4 \cdot \sqrt{2} \cdot 2^{-x} = \frac{129}{2}\sqrt{2}$$

Simplificant per $\sqrt{2}$

$$8 \cdot 2^x + 4 \cdot \frac{1}{2^x} = \frac{129}{2} \implies$$

Canvi de variable $2^x = z$

$$8z + \frac{4}{z} = \frac{129}{2}$$

Traient denominadors

$$16z^2 + 8 = 129z \implies 16z^2 - 129z + 8 = 0 \implies$$

$$z = 8 \implies 2^x = 8 \implies \mathbf{x=3}$$

$$z = \frac{1}{16} \implies 2^x = 2^{-4} \implies \mathbf{x= - 4}$$

17

Trobeu el nové terme d'una progressió geomètrica, el segon terme de la qual és el complex $2/i$ i la raó $2+i$.



Solució

$$a_9 = a_2 \cdot r^7 = \frac{2}{i} (2+i)^7$$

$$(2+i)^7 = \binom{7}{0} 2^7 + \binom{7}{1} 2^6 \cdot i + \binom{7}{2} 2^5 \cdot i^2 + \binom{7}{3} 2^4 \cdot i^3 + \binom{7}{4} 2^3 \cdot i^4 + \binom{7}{5} 2^2 \cdot i^5 + \binom{7}{6} 2 \cdot i^6 + \binom{7}{7} i^7$$

$$= 128 + 448i + 612i^2 + 560i^3 + 280i^4 + 84i^5 + 14i^6 + i^7 =$$

$$= 128 + 448i - 672 - 560i + 280 + 84i - 14 - i = -278 - 29i$$

$$a_9 = \frac{2}{i} (2+i)^7 = \frac{2}{i} (-278 - 29i) = \frac{2}{i} (-278 - 29i) \cdot \frac{i}{i} = -2(-278i - 29i^2) = -58 + 556i$$

21



22

En una progressió geomètrica el primer terme és el coeficient del sisé terme del desenvolupament de $(x+y)^8$, i el cinqué terme (de la progressió) és el logaritme de l'arrel quadrada de 2187 en base 3. Calculeu:
a) la suma dels deu primers termes.
b) la suma de tota la sèrie.

Solució

$$T_6 = \binom{8}{5} x^3 y^5 \implies a_1 = \binom{8}{5} = 56$$

$$a_5 = \log_3 \sqrt{2187} = \log_3 (3)^{\frac{7}{2}} = \frac{7}{2}$$

$$a_5 = a_1 \cdot r^4 \implies r^4 = \frac{7}{56} = \frac{1}{8} \implies r = \frac{1}{2}$$

$$S_n = \frac{a_n \cdot r - a_1}{r - 1} \implies S_{10} = \frac{a_{10} \cdot r - a_1}{r - 1} = \frac{\frac{7}{64} \cdot \frac{1}{2} - 56}{-\frac{1}{2}} = \frac{7161}{64}$$

$$a_{10} = a_1 \cdot r^9 = 56 \left(\frac{1}{2} \right)^9 = \frac{7}{64}$$

$$S_\infty = \frac{a_1}{1 - r} = \frac{56}{1 - \frac{1}{2}} = 112$$

23



24

La distància entre el Pont de Suert i Vilaller són x Km. Si expressem aquesta distància, successivament, en Km, Hm, Dm, m, dm, cm i mm i sumem tots aquests números obtenim 12.222.221. Trobar x .

Solució

$$x + 10x + 100x + 1000x + 10^4x + 10^5x + 10^6x$$

és una suma de set termes d'una progressió geomètrica de raó 10:

$$S_7 = \frac{a_7 \cdot r - a_1}{r - 1} = \frac{10^6 x \cdot 10 - x}{10 - 1} = \frac{(10^7 - 1)x}{9}$$

$$\frac{(10^7 - 1)x}{9} = 12.222.221 \implies x = 11 \text{ km}$$

18

Els sistemes $\begin{cases} x-y=a \\ 2y-x=b \end{cases}$ i $\begin{cases} x+2y=c \\ x+y=22 \end{cases}$ tenen les mateixes solucions. Trobeu a, b i c sabent que a, b i c estan en progressió geomètrica.

25



Solució:

$$a = \frac{b}{r}, \quad b, \quad c = b \cdot r$$

Reescrivim els sistemes $\begin{cases} x-y = \frac{b}{r} & (1) \\ 2y-x = b & (2) \end{cases} \quad \begin{cases} x+2y = br & (3) \\ x+y = 22 & (4) \end{cases}$

Del primer sistema obtenim la raó $\begin{cases} r(x-y) = b \\ 2y-x = b \end{cases} \implies r(x-y) = 2y-x \implies$

$$r = \frac{2y-x}{x-y}$$

Substituint el valor de b de (2) en (3): $x+2y = (2y-x) \frac{2y-x}{x-y} \implies$

$$(x+2y)(x-y) = (2y-x)^2 \implies x^2 - xy + 2yx - 2y^2 = 4y^2 - 4xy + x^2 \implies$$

$$5xy - 6y^2 = 0 \quad (5)$$

Ara substituïm x, de (4) en (5): $5(22-y)y - 6y^2 = 0 \implies 110y - 11y^2 = 0 \implies$

$$11y(10-y) = 0 \implies y=10 \quad y=0$$

Si $y=0 \implies$ (de 4) $x=22 \implies$ (de 2) $b=2y-x=-22 \implies r=-1 \implies$ (de 1) $22=-b \implies b=-22 \implies$ (de 3) $22=(-22)(-1)$ Verifiquen les quatre equacions

$\implies a=22 ; b=-22 ; c=22$

Si $y=10 \implies$ (de 4) $x=12 \implies$ (de 2) $b=2y-x=8 \implies r=4 \implies$ (de 1) $b=8 \implies$ (de 3) $32=8(4) \implies$ Verifiquen les quatre equacions

$\implies a=2 ; b=8 ; c=32$



Solució

De les fórmules de Cardano-Vieta:

$$a+b=c+6$$

$$ab=6c+18$$

$$\text{Considerem } a^2+b^2=(a+b)^2-2ab$$

$$=(c+6)^2-2(6c+18)$$

$$=c^2+12c+36-12c-36=c^2$$

Per tant es tracta d'una terna Pitagòrica $\implies C=90^\circ$

28

Trobeu el coeficient de x^{13} en esta expresió

$$(x^3 + 1)^2 \left(x^2 - \frac{2}{x}\right)^8$$



Solució

$$(x^3 + 1)^2 \left(x^2 - \frac{2}{x}\right)^8 = \frac{1}{x^8} (x^3 + 1)^2 (x^3 - 2)^8$$

Canvi variable $x^3 = y \implies$

$(y + 1)^2 (y - 2)^8$, es equivalent a trobar el coeficient de y^7

$(y^2 + 2y + 1)(y - 2)^8$ lo qual implica :

$$y^2 \cdot y^5 \implies \text{coeficient de } y^5 \text{ en } (y - 2)^8: \binom{8}{3} y^5 (-2)^3 = -448 y^5 \implies -448 y^7$$

$$2y \cdot y^6 \implies \text{coeficient de } y^6 \text{ en } (y - 2)^8: \binom{8}{2} y^6 (-2)^2 = 112 y^6 \implies 224 y^7$$

$$1 \cdot y^7 \implies \text{coeficient de } y^7 \text{ en } (y - 2)^8: \binom{8}{1} y^7 (-2)^1 = -16 y^7$$

$$\implies (-448 + 224 - 16) y^7 = -240 y^7 \implies -240 x^{21} \implies \frac{1}{x^8} (-240 x^{21}) = -240 x^{13}$$

Solució **-240**