ABRIL 2023

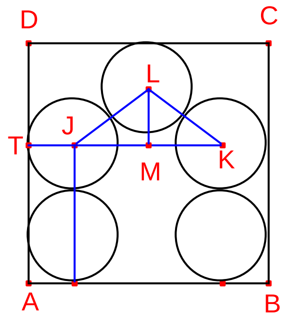
Solución:

Sea el cuadrado $ABCD$ de lado $\overline{AB} = c$

Sean J, K, L centros de tres circunferencias de de radio $\overline{JT} = r$

Sea M el punto medio del segmento $\overline{JK}$

$\overline{JL} = 2r, \overline{JM} = \frac{c}{2} - r, \overline{LM} = c - 4r$



Aplicando el teorema de Pitágoras al triángulo rectángulo $\overset{\Delta}{JML}$

$$4r^2 = (c - 4r)^2 + \left(\frac{c}{2} - r\right)^2$$

Simplificando:

$$13r^2 - 9cr + \frac{5}{4}c^2 = 0$$

Resolviendo la ecuación:

$$\frac{r}{c} = \frac{5}{26}$$

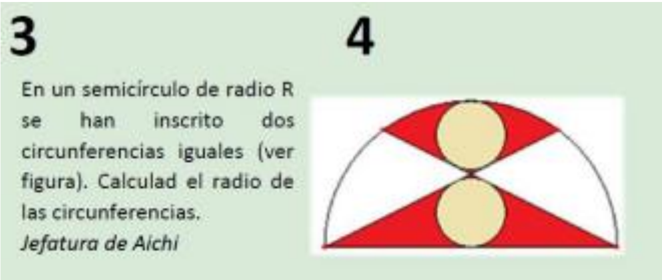
Construcción con GeoGebra

Lo primero para poder dibujar es asignar un valor al lado del cuadrado c. Vamos a elegir c=10.

Los pasos a seguir serían:

1. Dibujamos el cuadrado de lado 10.
2. Definimos un deslizador r para el radio de las circunferencias: de número, definido entre 0.1 y 2.5, con incremento 0.001.
3. Los centros de las cinco circunferencias que tenemos que dibujar se encuentran todos sobre un cuadrado de lado $10 - 2r$. Para dibujarlo introducimos los dos vértices inferiores del mismo: $(r, r)\ y\ (10 - r, r)$ y con polígono regular, trazamos el cuadrado.
4. Las dos circunferencias inferiores tienen el centro en los vértices del cuadrado y radio r.
5. Las dos centrales, los centros en los puntos $(r, 3r)\ y\ (10 - r, 3r)$ y radio r.

6. La superior tiene el centro en el punto medio del lado superior del cuadrado interior y radio r.
7. Sólo falta ajustar con el deslizador el radio para que la circunferencia superior sea tangente a las intermedias. Se obtiene cuando r=1.921.
8. La relación pedida, será: $\frac{r}{c} = \frac{1.921}{10} = 0.1921$.


3

4

En un semicírculo de radio R se han inscrito dos circunferencias iguales (ver figura). Calculad el radio de las circunferencias.

Jefatura de Aichi

Solución:

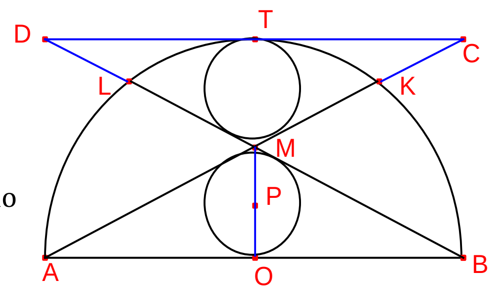
Sean los segmentos $\overline{AK}, \overline{BL}$ que se intersectan en el punto M.

Sea la semicircunferencia de centro O y radio $\overline{OA} = R$

Sea la circunferencia de centro P y radio $\overline{PO} = r$, inscrita en el triángulo $\overset{\Delta}{ABM}$

Sea T el punto de tangencia de la circunferencia superior y la semicircunferencia.

Por el punto T trazamos una paralela al diámetro $\overline{AB}$ que corta a las rectas AK, BL en los puntos C, D, respectivamente.



Los triángulos isósceles $\overset{\Delta}{ABM}, \overset{\Delta}{CDM}$ son iguales.

Entonces, $\overline{OM} = \frac{1}{2}R$

Aplicando el teorema de Pitágoras al triángulo rectángulo $\overset{\Delta}{AOM}$:

$$\overline{AM} = \frac{\sqrt{5}}{2}R$$

El àrea del triángulo $\overset{\Delta}{ABM}$ es:

$$S_{ABM} = \frac{1}{2} \cdot 2R \cdot \frac{1}{2}R = \frac{1}{2}\left(2R + 2 \cdot \frac{\sqrt{5}}{2}R\right)r$$

Resolviendo la ecuación:

$$r = (\sqrt{5} - 2)R$$

Construcción con GeoGebra

Lo primero para poder dibujar es asignar un valor al radio del semicírculo R. Vamos a elegir R=10.

Los pasos a seguir serían:

1. Dibujamos el semicírculo de radio 10.
2. Hallamos el centro del diámetro, punto de contacto de la circunferencia inferior. Trazamos la perpendicular al diámetro por ese punto y podremos obtener el punto de contacto de la circunferencia superior con el semicírculo.
3. En el punto medio del segmento que une estos dos puntos se encuentra el punto que separa la zona roja superior de la inferior.
4. Trazamos las dos rectas ese punto y cada uno de los extremos del diámetro de la semicircunferencia.
5. Solo falta dibujar las dos circunferencias. Para hacerlo, introducimos un deslizador para el radio r de estas. Los centros se encontrarán en los puntos $(10, r)\ y\ (10, 10 - r)$, ambas con radio r.
6. Ajustamos el deslizador para que sean tangentes.

Solución:

Sea el triángulo rectángulo $\overset{\Delta}{ABC}, A = 90°, \overline{AC} = b, \overline{AB} = c$

Sean K,L,M los puntos de tangencia al triángulo.

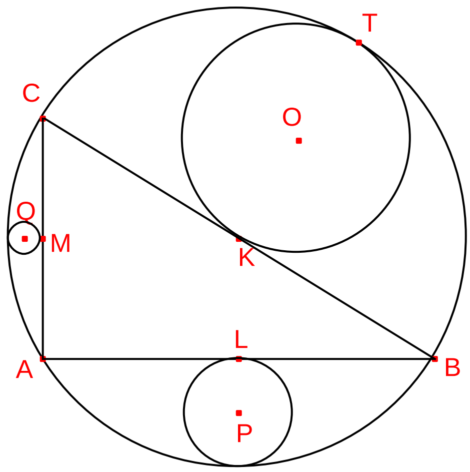
Los puntos K,L ,M son puntos medios de los lados $\overline{BC}, \overline{AB}, \overline{AC}$ del triangulo.

Sean $\overline{OK} = R, \overline{PL} = r_1, \overline{QM} = r_2$

El radio de la circunferencia circunscrita es:

$\overline{KB} = \overline{KT} = 2R$

Aplicando el teorema de Pitágoras al triángulo rectángulo $\overset{\Delta}{ABC}$:



$16R^2 = b^2 + c^2$

Los triángulos rectángulos $\overset{\Delta}{LBK}, \overset{\Delta}{ABC}$ son semejantes y de razón 1:2.

$\overline{KL} = \dfrac{b}{2} = 2R - 2r_1$

$b = 4R - 4r_1$

Análogamente:

$c = 4R - 4r_2$

$16R^2 = b^2 + c^2 = 16(2R^2 + {r_1}^2 + {r_2}^2 - 2r_1R - 2r_2R)$

Simplificando:

$R^2 + {r_1}^2 + {r_2}^2 - 2(r_1 + r_2)R = 0$

Resolviendo la ecuación:

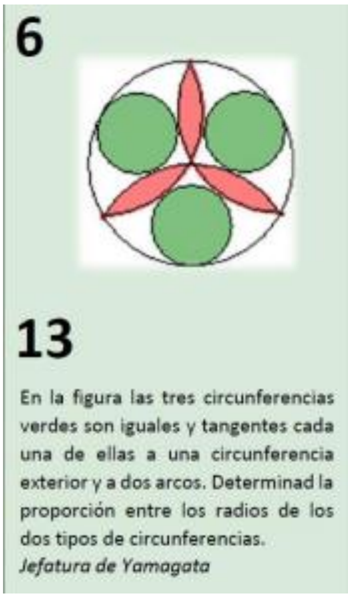
$R = r_1 + r_2 + \sqrt{r_1 \cdot r_2}$

Construcción con GeoGebra

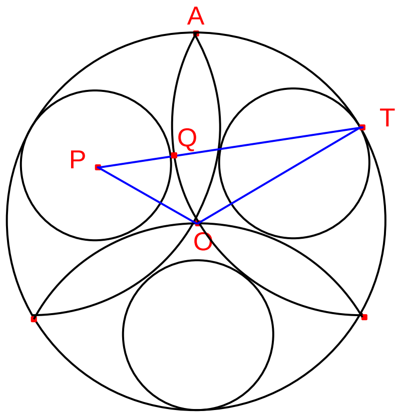
Lo primero para poder dibujar es asignar un valor al radio del círculo R. Vamos a elegir R=10.

Los pasos a seguir serían:

1. Dibujamos la circunferencia centrada en el origen con radio 10.
2. Para inscribir el triángulo empezaremos por definir dos deslizadores de número asociados a la altura (a) y la base (b) del triángulo. Ambos de número, entre 0.1 y 10 y con incremento 0.001.
   La hipotenusa del triángulo coincidirá con un diámetro de la circunferencia debido a que el triángulo es rectángulo.
3. Los vértices del triángulo estarán en los puntos de coordenadas $\left(-\frac{b}{2}, -\frac{a}{2}\right)$ el correspondiente al ángulo recto, y $\left(-\frac{b}{2}, \frac{a}{2}\right)$ y $\left(\frac{b}{2}, -\frac{a}{2}\right)$ los otros dos.
   Para dibujar el triángulo los introducimos en la barra de entrada y después trazamos el triángulo.
4. Las tres circunferencias son tangentes en los puntos medios de los lados del triángulo. Los hallamos, y con la recta perpendicular a cada uno de los lados por esos puntos, obtenemos el otro extremos de cada uno de los diámetros. Para dibujarlas, sólo nos falta hallar el centro de cada circunferencia como punto medio del diámetro. Ya podemos dibujar las tres.



Solución:



Sea la circunferencia exterior de centro O y radio $\overline{OA} = \overline{OT} = R$

$\overline{TQ} = R$

Sea la circunferencia de centro P y radio $\overline{PQ} = r$

$\angle POT = 120°$

$\overline{PT} = R + r, \overline{OP} = R - r$

Aplicando el teorema del coseno al triángulo $\overset{\Delta}{OPT}$:

$(R + r)^2 = (R - r)^2 + R^2 - 2''(R - r)R \cdot \cos\ 120°$

Simplificando:

$2R^2 = 5Rr$

Entonces:

$$\frac{r}{R} = \frac{2}{5}$$

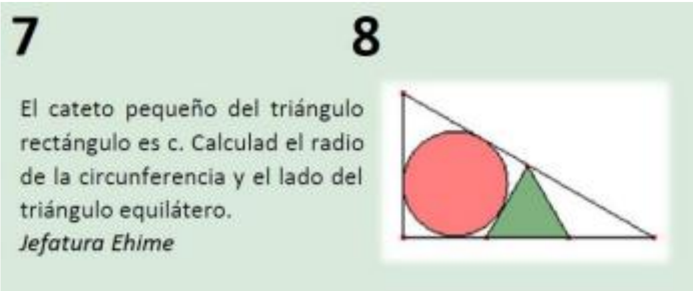
Construcción con GeoGebra

Lo primero para poder dibujar es asignar un valor al radio del círculo R. Vamos a elegir R=10.

Los pasos a seguir serían:

1. Dibujamos la circunferencia centrada en el origen con radio 10.
2. Dibujamos tres diámetros de la circunferencia a 30°, 150° y 270° respecto a la parte positiva del eje de abscisas. La intersección de estas rectas con la circunferencia nos dará los extremos de los arcos de circunferencia. Como también pasan por el origen de coordenadas, tenemos los tres puntos necesarios para dibujar los arcos.

3. Definimos un deslizador de número para el radio de las tres circunferencias, con valores entre 0.1 y 5 e incremento 0.001.
4. Los centros de las tres circunferencias estarán sobre la circunferencia centrada en el origen y con radio $10 - r$. La dibujamos y hallamos los centros con la intersección de esta circunferencia y los diámetros.
5. Podemos dibujar una cualquiera con centro en uno de los puntos hallados y radio r. Las otras las obtendríamos rotando 120° dos veces.
6. Solo falta mover el deslizador hasta conseguir la tangencia que buscamos entre las circunferencias y los arcos.

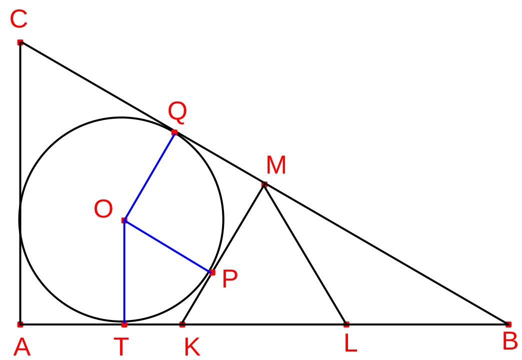


Solució:

Sea el triángulo rectángulo $\overset{\Delta}{ABC}, A = 90°, \overline{AC} = c$

Sea la circunferencia de centro O y radio $\overline{OT} = \overline{OP} = \widetilde{OQ} = r$ inscrita en el triangulo $\overset{\Delta}{ABC}$

Sea el triángulo equilátero $\overset{\Delta}{KLM}$ de lado $\overline{KL} = x$



Sea $\angle ABC = \alpha$

$\angle OQM = \angle OPM = 90°$

Además, $\overline{OM}$ es perpendicular a $\overline{PQ}$

Entonces, $OPMQ$ es un cuadrado.

$\angle KMQ = 90°$

$\angle MKB = 60°$

Entonces, $\angle ABC = \alpha = 30°$

$\overline{BC} = 2a, \overline{AB} = a\sqrt{3}$

Entonces, el radio de la circunferencia inscrita al triángulo rectángulo $\overset{\Delta}{ABC}$ es:

$$r = \overline{OT} = \frac{c + c\sqrt{3} - 2c}{2} = \left(-1 + \sqrt{3}\right)c$$

Los triángulos rectángulos $\overset{\Delta}{CAK}, \overset{\Delta}{CMK}$ son iguales (ACA)

De aquí, $\overline{AK} = \overline{KM} = x$

$\angle LBM = \angle LMB = 30°$

Entonces, $\overline{BL} = \overline{LM} = x$

$\overline{AB} = 3x = c\sqrt{3}$

Entonces,

$$x = \overline{KL} = \frac{c\sqrt{3}}{3}$$

Construcción con GeoGebra

Lo primero para poder dibujar es asignar un valor al lado del cateto c. Vamos a elegir c=10.

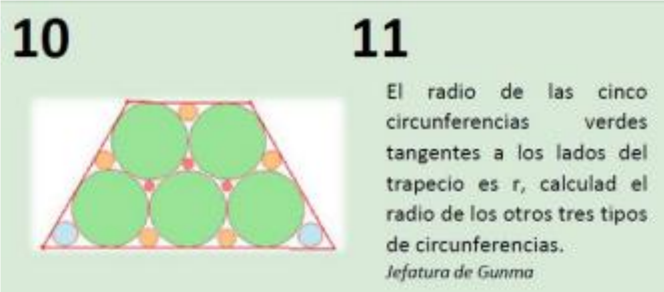
Los pasos a seguir serían:

1. Obtener información del dibujo:

El vértice superior del triángulo divide la hipotenusa en dos partes iguales y los dos vértices de la base dividen al cateto horizontal en tres partes iguales.

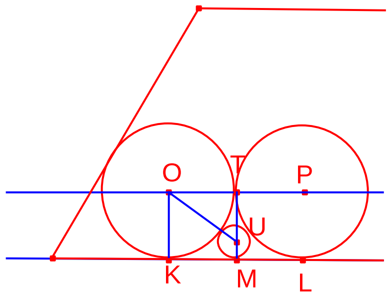
También obtenemos que la hipotenusa mide el doble que el cateto c.

2. Dibujamos el cateto c con extremos en los puntos (0,0) y (0,10).
3. Con centro en (0,10) y radio 20 dibujamos una circunferencia.
4. El vértice que nos falta del triángulo está en la intersección de esta circunferencia y el eje de abscisas. Dibujamos el triángulo.
5. La circunferencia inscrita tiene el centro en el punto de intersección de las bisectrices interiores de los ángulos del triángulo. Trazamos dos de las bisectrices y hallamos el centro.
6. La perpendicular por este punto a la base nos servirá para hallar un punto de la circunferencia. Ya podemos dibujarla.
7. El radio de la circunferencia lo podemos medir con el segmento que une el centro y el punto que hemos usado para dibujarla.
8. Para dibujar el triángulo verde ya tenemos el vértice superior. Necesitamos otro más. El triángulo blanco que queda a la derecha es isósceles. Si trazamos la mediatriz del segmento que corresponde al lado distinto de este triángulo, podremos hallar el vértice inferior derecho de la base del triángulo con la intersección con el eje de abscisas. Con polígono regular y los dos vértices que tenemos ya se puede dibujar el triángulo.
9. Para medir el lado del triángulo, como tenemos los vértices se puede medir con el segmento que une dos cualesquiera.



Solución:

Sean las circunferencias de centros O,P y radios $\overline{OK} = \overline{PL} = r$



Sea T el punto de tangencia de las dos circunferencias.

Sea L el punto medio del segmento $\overline{KL}$

Sea la circunferencia de centro U y radio $\overline{UM} = s$

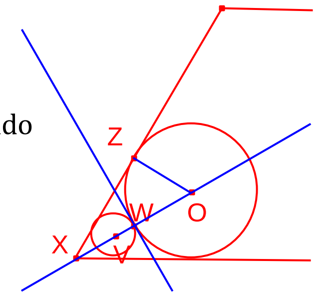
$\overline{TU} = r - s, \overline{OT} = r, \overline{OU} = r + s$

Aplicando el teorema de Pitágoras al triángulo rectángulo $\overset{\Delta}{OTU}$:

$(r + s)^2 = r^2 + (r - s)^2$

Resolviendo la ecuación:

$$s = \frac{1}{3}r$$



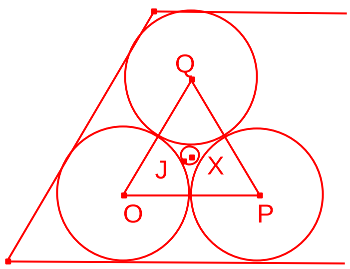
Sea la circunferencia de centro V y radio $\overline{VW} = t$

Sea Z el punto de tangencia de la circunferencia de centro O y el lado no paralelo del trapecio.

$\overline{OX} = 2 \cdot \overline{OZ} = 2r$

$\overline{XW} = r$

$$t = \overline{VW} = \frac{1}{3}\overline{XW} = \frac{1}{3}r$$



Sea la circunferencia de centro Q y radio r.

Sea la circunferencia de centro X y radio $\overline{XJ} = x$

El centro X es el baricentro del triángulo equilátero $\overset{\Delta}{OPQ}$ de lado $\overline{OP} = 2r$

$$\overline{OX} = \frac{2}{3}\sqrt{3}r$$

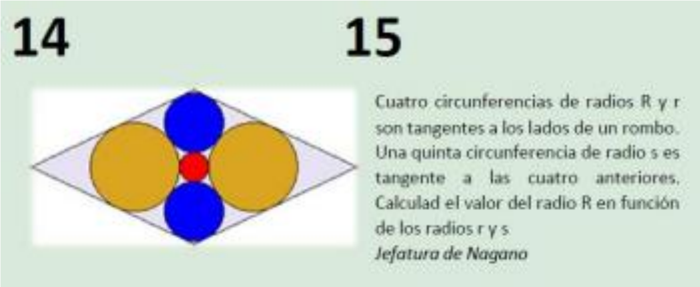
$$x = \overline{XJ} = \frac{2}{3}\sqrt{3}r - r = \frac{-3 + 2\sqrt{3}}{3}r$$

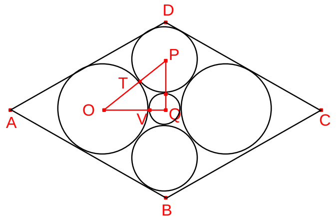
Construcción con GeoGebra

Lo primero para poder dibujar es asignar un valor al radio del círculo verde r. Vamos a elegir r=10.

Los pasos a seguir serían:

1. Dibujamos una circunferencia centrada en el origen con radio 10. Sería la central de la línea inferior. Trasladándola con los vectores $(2r, 0)\ y\ (-2r, 0)$ (con el valor de r =10 serían $(20, 0)\ y\ (-20, 0)$ obtendríamos las dos que faltan.
2. Las dos circunferencias superiores tienen el centro en el vértice superior del triángulo equilátero cuya base une los dos centros de las circunferencias que tienen debajo. Dibujamos uno de los dos triángulos y trazamos la circunferencia con centro el vértice hallado y radio r=10. La otra por traslación igual que hemos hecho en la otra fila de circunferencias.
3. Para dibujar el trapecio necesitamos las rectas tangentes a las circunferencias de cada lado. Con los puntos de intersección obtenemos los vértices y podemos trazar el polígono.
4. Para trazar las circunferencias pequeñas rojas, usamos el triángulo equilátero que hemos trazado antes para las circunferencias. El centro de la circunferencia coincide con el del triángulo. Si trazamos el segmento que une el centro de la roja con el de una de las verdes a las que es tangente, obtenemos en la intersección de la circunferencia verde y el segmento, un punto de la circunferencia roja. Ya podemos trazarla.
5. Para la amarillas usaremos que son tangentes a dos circunferencias verdes y a la recta que define el lado correspondiente.
   El centro estará en el punto de corte de las parábolas con foco en el centro de cada una de las dos verdes y vértice en el punto de intersección de la recta y la circunferencia.
   Para dibujar las parábolas necesitamos la directriz:
   Hacemos una simetría axial de los centros de las circunferencias con la base del trapecio como eje de simetría y trazamos la directriz como la recta que pasa por ambos simétricos.
   Dibujamos las dos parábolas, y en el punto de intersección de ambas tenemos el centro de la circunferencia que buscamos.
   Trazamos la perpendicular por ese punto a la base del trapecio para obtener el punto que necesitamos de la circunferencia amarilla.
6. Para las circunferencias azules empezaremos por unir el centro de la verde con el vértice del trapecio. El punto de corte de esta línea y la circunferencia verde pertenece a la azul.
   Si trazamos una paralela a la base por este punto, cortará al lado oblicuo del trapecio en otro punto de la circunferencia azul. La mediatriz de este segmento contiene al centro de la azul. Podemos hallarlo con la intersección de la mediatriz y la recta que hemos trazado al principio uniendo el vértice y el centro de la verde.
7. De todas las circunferencias tenemos el centro y un punto, con lo que podemos medir todos los radios.





Solución:

Sea el rombo $ABCD$.

Sea la circunferencia de centro O y radio $R = \overline{OT}$.

Sea la circunferencia de centro P y radio $r = \overline{PT}$

Sea la circunferencia de centro Q y radio $s = \overline{QV}$

$\overline{OQ} = R + s, \overline{PQ} = r + s, \overline{OP} = R + r$

Aplicando el teorema de Pitágoras al triángulo rectángulo $\overset{\Delta}{OQP}$:

$(R + r)^2 = (r + s)^2 + (R + s)^2$

Simplificando:

$Rr = s^2 + rs + Rs$

Resolviendo la ecuación en la incógnita R:

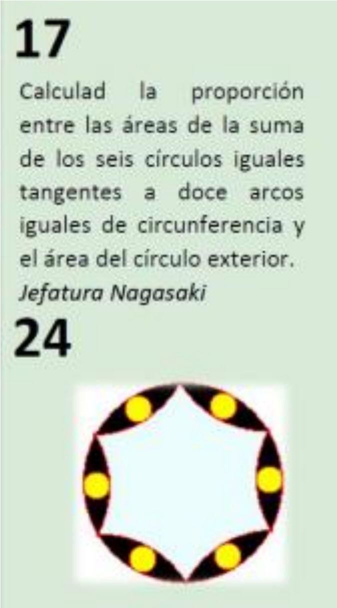
$$R = \frac{s(r + s)}{r - s}$$

Construcción con GeoGebra

Para hacer el dibujo empezaremos por las circunferencias para después dibujar el rombo.

Los pasos a seguir serían:

1. Definimos tres deslizadores (R, r y s) para los radios de las tres circunferencias. Los tres de número, desde 0.1 hasta 10, con incremento 0.001.
2. Dibujamos la circunferencia de radio s (la central) con centro en el origen.
3. El centro de las marrones se encontrará en el $(s + R, 0)$ y en $(-(s + R),0)$. El radio será R. Las dibujamos. (Podemos dibujar una y por simetría la otra).
4. El centro de las azules será $(0, s + r)$ y $(0, -(s + r))$. El radio será r. Dibujamos las dos.
5. Los lados del rombo son tangentes a dos de las circunferencias. Mediante recta tangente, podemos dibujarlas. Basta hallar los puntos de intersección para tener los vértices del rombo y poder dibujarlo.
6. Movemos los deslizadores hasta obtener la tangencia de las circunferencias.
7. Para ver la relación entre los radios, dibujamos los tres cuadrados que tienen como base el segmento que une dos de los centros de las circunferencias. Se cumple el teorema de Pitágoras, la relación será $(R + r)^2 = (r + s)^2 + (R + s)^2$.



Solución:

La intersección de los doce arcos forma un hexágono regular ABCDEF de centro O.

Sea $\overline{OA} = R$ radio de la circunferencia exterior.

Sea la circunferencia tangente a dos arcos de centro P y radio $\overline{PT} = r$

$\overline{OP} = R - r, \overline{AB} = \frac{1}{2}R$

Aplicando el teorema de Pitágoras al triángulo rectángulo $\overset{\Delta}{APO}$

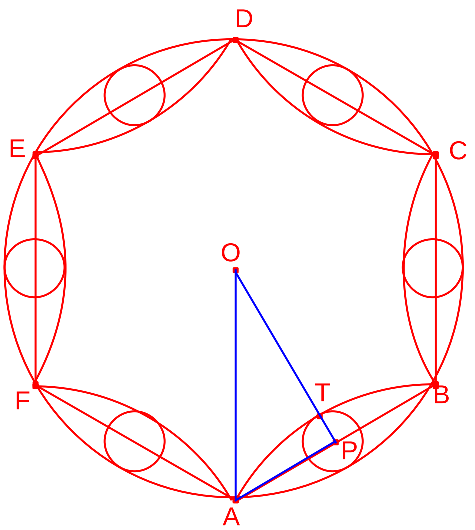
$R^2 = (R-r)^2 + \frac{1}{4}R^2$

Simplificando:

$4r^2 - 8Rr + R^2$

Resolviendo la ecuación: $r = \frac{2-\sqrt{3}}{2}R$

La proporción de áreas es: $\frac{6 \cdot S_P}{S_O} = \frac{6 \cdot r^2}{R^2} = \frac{3}{2}\left(7 - 4\sqrt{3}\right)$



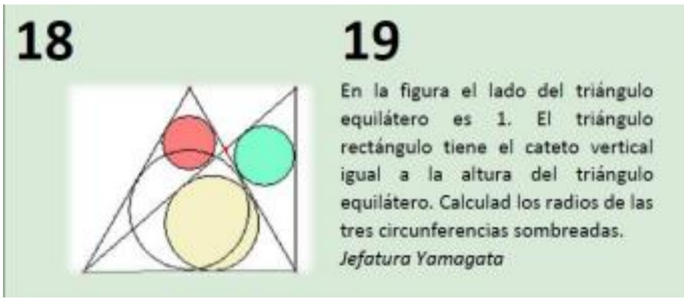
Construcción con GeoGebra

Lo primero para poder dibujar es asignar un valor al radio del círculo exterior R. Vamos a elegir R=10.

Los pasos a seguir serían:

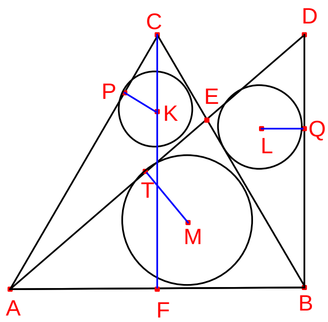
1. La estrella que queda en el interior tiene las puntas en los vértices del hexágono inscrito en la circunferencia exterior, por lo que el lado de este medirá lo mismo que el radio R. Dibujamos un hexágono regular de lado 10.

2. Circunscribimos la circunferencia al hexágono (Con circunferencia por tres puntos).
3. Para los arcos que forman la estrella basta con hacer una simetría axial de la circunferencia respecto a cada uno de los lados del hexágono (O dibujar una e ir rotando respecto al centro de la circunferencia 60° hasta tenerlos todos).
4. La mediatriz de un lado cualquiera del hexágono nos permite obtener por intersección con la circunferencia exterior y con los arcos los dos extremos de un diámetro de las circunferencias pequeñas. Hallamos con punto medio del diámetro el centro de la circunferencia y la dibujamos con circunferencia con centro y punto.
5. Podemos hallar el área de las circunferencias dibujadas y calcular la proporción pedida.



Solución:

Sea el triángulo equilátero $\overset{\Delta}{ABC}$ de lado $\overline{AB} = 1$



Sea el triángulo rectángulo $\overset{\Delta}{ABD}, B = 90°, \overline{BD} = \overline{CF} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

Sea E la intersección de los dos triángulos.

Aplicando el teorema de Pitágoras al triángulo rectángulo $\overset{\Delta}{ABD}$:

$$\overline{AD} = \frac{\sqrt{7}}{2}$$

Sea $\alpha = \angle DAB$

$$\operatorname{sen} \alpha = \frac{\sqrt{21}}{7}, \cos \alpha = \frac{2\sqrt{7}}{7}$$

$$\operatorname{sen}(60° - \alpha) = \frac{\sqrt{3}}{2}\frac{2\sqrt{7}}{7} - \frac{1}{2}\frac{\sqrt{21}}{7} = \frac{\sqrt{21}}{14}, \qquad \operatorname{sen}(60° + \alpha) = \frac{\sqrt{3}}{2}\frac{2\sqrt{7}}{7} + \frac{1}{2}\frac{\sqrt{21}}{7} = \frac{3\sqrt{21}}{14}$$

Sea la circunferencia de centro K y radio $\overline{KP} = r$. Sea $\overline{CE} = x, \overline{AE} = y$

Aplicando el teorema del seno al triángulo $\overset{\Delta}{ACE}$

$$\frac{x}{\operatorname{sen}\,(60° - \alpha)} = \frac{1}{\operatorname{sen}(60° + \alpha)}, \qquad \frac{y}{\operatorname{sen}\ 60°} = \frac{1}{\operatorname{sen}(60° + \alpha)}$$

Entonces, $\overline{CE} = x = \frac{1}{3}, \overline{AE} = y = \frac{\sqrt{7}}{3}$

El área del triángulo $\overset{\Delta}{ACE}$ es

$$\frac{1}{2}\cdot 1\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{1}{2}r\left(1+\frac{1}{3}+\frac{\sqrt{7}}{3}\right)$$

Resolviendo la ecuación: $r=\frac{4\sqrt{3}-\sqrt{21}}{18}$

Siga la circumferència de centre L i radi $\overline{LQ}=s$

$$\overline{BE}=\frac{2}{3},\overline{DE}=\frac{\sqrt{7}}{6}$$

L'àrea del triangle $\overset{\Delta}{BDE}$ és

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{2}s\left(\frac{2}{3}+\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{\sqrt{7}}{6}\right)$$

Resolent l'equació:

$$s=\frac{\sqrt{21}+2\sqrt{3}-2\sqrt{7}-1}{12}$$

Siga la circumferència de centre M i radi $\overline{MT}=t$

L'àrea del triangle $\overset{\Delta}{ABE}$ és

$$\frac{1}{2}\cdot 1\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{1}{2}t\left(1+\frac{2}{3}+\frac{\sqrt{7}}{3}\right)$$

Resolent l'equació:

$$t=\frac{5\sqrt{3}-\sqrt{21}}{18}$$

Construcción con GeoGebra

Los pasos a seguir serían:

1. Dibujamos el triángulo equilátero de lado 1.
2. Para dibujar el triángulo rectángulo necesitamos el vértice superior. Trazamos la paralela a la base por el vértice superior del equilátero y la perpendicular a la base por el vértice derecho de la base. El punto de corte de estas dos rectas es el que buscamos. Ya podemos trazar el triángulo rectángulo.
3. Las circunferencias son todas inscritas en un triángulo. Para dibujarlas seguimos en todas los mismos pasos:
4. Hallamos las bisectrices de dos de los ángulos del triángulo. El punto de corte corresponde al centro de la circunferencia.
5. Para hallar un punto de la circunferencia y poder dibujarla, trazamos la perpendicular a uno de los lados del triángulo que pase por el centro de la circunferencia. La intersección de las dos rectas es un punto de la circunferencia.
6. Con este punto, podemos tanto dibujar las circunferencias, como medir los radios con el segmento que une este punto con el centro de la circunferencia.

20

21

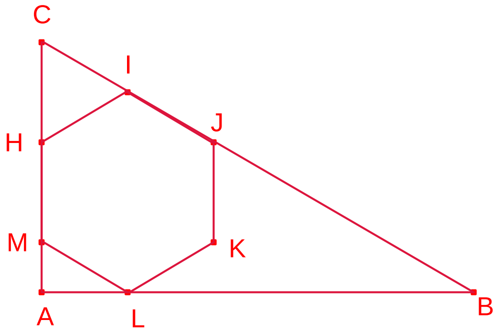
En un triángulo rectángulo se ha inscrito un hexágono regular (ver figura). Calculad la razón de proporcionalidad de sus áreas. Los vértices del triángulo rectángulo se han unido con vértices del hexágono regular. Calculad la proporción entre las áreas del triángulo y del hexágono regular.

Jefatura Iwate

Solución:

Notamos que en el triángulo rectángulo $\overset{\Delta}{ABC}, A = 90°, B = 30°, C = 60°$

Sea $x = \overline{HI}$, lado del hexágono regular $HIJKLM$



Notamos que el triángulo $\overset{\Delta}{HIC}$ es equilátero.

$\angle ALM = 30°, \overline{ML} = x$, entonces, $\overline{MA} = \frac{x}{2}$.

$$\overline{AC} = \overline{AM} + \overline{MH} + \overline{HC} = \frac{x}{2} + x + x = \frac{5}{2}x$$

$$\overline{BC} = 5x$$

El área del triángulo $\overset{\Delta}{ABC}$ és igual a la meitat de l'àrea d'un triangle equilàter de costat $\overline{BC} = 5x$:

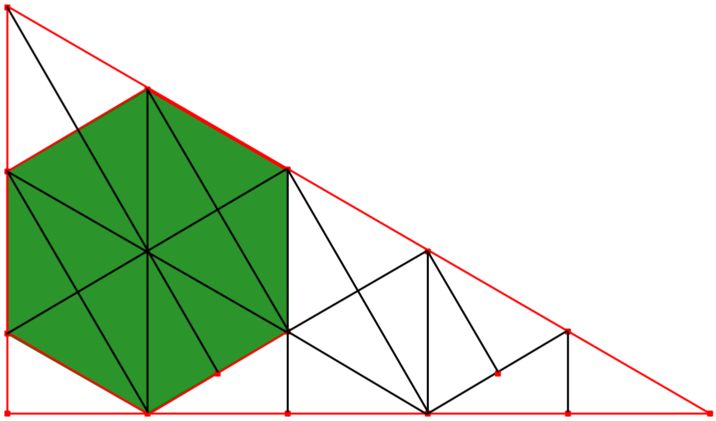
$$S_{ABC} = \frac{1}{2}\frac{(5x)^2\sqrt{3}}{4} = \frac{25\sqrt{3}}{8}x^2$$

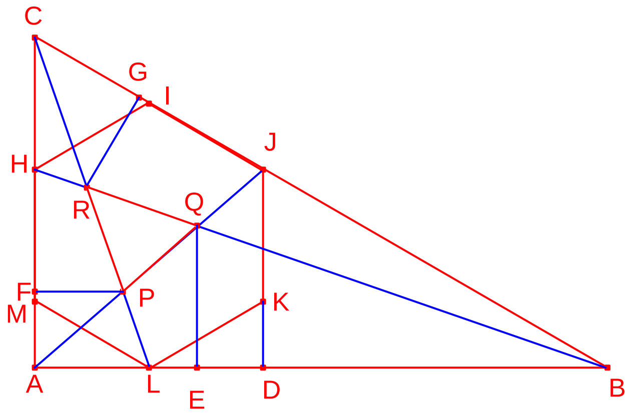
El área del hexágono regular HIJKLM es igual a seis veces el área de un triángulo equilátero de lado $x = \overline{HI}$.

$$S_{HIJKLM} = 6\frac{x^2\sqrt{3}}{4} = \frac{3\sqrt{3}}{2}x^2$$

La proporción entre las áreas del hexágono HIJKLM y del triángulo $\overset{\Delta}{ABC}$ es:

$$\frac{S_{HIJKLM}}{S_{ABC}} = \frac{\frac{3\sqrt{3}}{2}x^2}{\frac{25\sqrt{3}}{8}x^2} = \frac{12}{25}$$





$\overline{AL} = \frac{\sqrt{3}}{2}x, \overline{AB} = \frac{5\sqrt{3}}{2}x, \overline{CL} = x\sqrt{7}, \overline{BH} = \sqrt{21}x$

Notemos que $\angle ACL = \angle ABH = \beta$, ya que:

$$\tan\beta = \frac{\overline{AL}}{\overline{AC}} = \frac{\overline{AH}}{\overline{AB}} = \frac{1}{5}\sqrt{3}$$

$$\operatorname{sen}\beta = \frac{\sqrt{21}}{14}, \cos\beta = \frac{5}{14}\sqrt{7}\,3$$

Sea $\angle JAB = \alpha, \overline{AD} = x\sqrt{3}, \overline{JD} = \frac{3}{2}x, \overline{AJ} = \frac{1}{2}\sqrt{21}x$

$$\operatorname{sen}\alpha = \frac{\sqrt{21}}{7}, \cos\alpha = \frac{2}{7}\sqrt{7}, \tan\alpha = \frac{1}{2}\sqrt{3}$$

Sea $\angle PQR = \gamma = \alpha + \beta$

$$\cos\gamma = \cos(\alpha+\beta) = \frac{2\sqrt{7}}{7}\cdot\frac{5\sqrt{7}}{14} - \frac{\sqrt{21}}{7}\cdot\frac{\sqrt{21}}{14} = \frac{1}{2}$$

$\gamma = 60°$

Sea E la proyección de Q sobre $\overline{AB}$. Sea $\overline{AE} = a$

$$\frac{\overline{QE}}{a} = \tan\alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{\overline{QE}}{\frac{5}{2}\sqrt{3}x - a} = \tan\beta = \frac{\sqrt{3}}{5}$$

Entonces:

$$a = \frac{5\sqrt{3}}{7}x, \overline{QE} = \frac{15}{14}x, \overline{BE} = \frac{25\sqrt{3}}{14}x, \overline{AQ} = \frac{5\sqrt{21}}{14}x, \overline{BQ} = \frac{5\sqrt{21}}{7}x$$

Sea F la proyección de P sobre $\overline{AC}$. Sea $\overline{CF} = b$

$$\frac{\overline{PF}}{b} = \tan\beta = \frac{\sqrt{3}}{5}, \frac{\overline{PF}}{\frac{5}{2}x - b} = \operatorname{ctan}\beta = \frac{\sqrt{3}}{5}$$

Entonces:

$$b = \frac{25}{13}x, \overline{PF} = \frac{5\sqrt{3}}{13}x, \overline{AF} = \frac{15}{26}x, \overline{AP} = \frac{5\sqrt{21}}{26}x, \overline{PQ} = \overline{AQ} - \overline{AP} = \frac{15\sqrt{21}}{91}x$$

Sea G la proyección de R sobre $\overline{BC}$. Sea $\overline{CF} = c$

$$\frac{\overline{RG}}{c} = \tan(60° - \beta) = \frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{\overline{RG}}{5x - c} = \tan(30° - \beta) = \frac{\sqrt{3}}{9}$$

Entonces:

$$c = \frac{10}{11}x, \overline{RG} = \frac{5\sqrt{3}}{11}x, \overline{BR} = \frac{45}{11}x, \overline{BR} = \frac{10\sqrt{21}}{11}x, \overline{QR} = \overline{BR} - \overline{BQ} = \frac{15\sqrt{21}}{77}x$$

El área del triángulo $\overset{\Delta}{PQR}$ es:

$$S_{PQR} = \frac{1}{2}\overline{PQ} \cdot \overline{QR} \cdot \operatorname{sen} 60° = \frac{1}{2} \cdot \frac{15\sqrt{21}}{91}x \cdot \frac{15\sqrt{21}}{77}x \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{675}{4004}\sqrt{3}$$

La proporción de áreas es:

$$\frac{S_{PQR}}{S_{HIJKLM}} = \frac{\frac{675}{4004}\sqrt{3}}{\frac{3}{2}\sqrt{3}} = \frac{225}{2002}$$

Construcción con GeoGebra

Los pasos a seguir serían:

1. Dibujamos el triángulo rectángulo. Para hacerlo, sabiendo que el hexágono es regular, es fácil comprobar que los ángulos del triángulo son 60° el superior y 30° el de la derecha.
2. Necesitamos dar un tamaño a uno de los lados del triángulo. Elegimos 10 para el cateto vertical. Una vez dibujado, por el vértice superior trazamos un ángulo de 60°. El punto de corte de la recta que lo define con el eje de abscisas será el vértice que nos falta. Dibujamos el triángulo.
3. Para dibujar el hexágono necesitamos los dos vértices de uno de los lados. En el cateto vertical se encuentran a 1/5 de la distancia desde el origen al vértice y a 3/5 del mismo. Los puntos serían (0,2) y (0,6). Dibujamos el hexágono.
4. Trazamos los segmentos que definen el triángulo rojo. Hallamos los vértices con la intersección de los segmentos y dibujamos el triángulo.
5. Las tres áreas pedidas están en la vista algebraica en los dos triángulos y el polígono.

22

29

Consideremos el pentágono regular estrellado y su circunferencia inscrita de radio r. Sean las cinco circunferencias tangentes, de radio s, al pentágono regular estrellado y a su circunferencia circunscrita. Calculad la proporción: s/r

Jefatura de Nagano

Solución:

Sea ABCDE el pentágono regular estrellado, de centro O. Sea $\overline{AB} = 1, \overline{AC} = \Phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$

Sea $\overline{OA} = R$ radio de la circunferencia circunscrita al pentágono regular $ABCDE$.

Aplicando el teorema del seno al triángulo $\overset{\Delta}{ABD}$:

$$\frac{1}{\operatorname{sen} 36°} = 2R$$

Sea $\overline{OM} = r$ radio de la circunferencia inscrita al pentágono regular estrellado.

Sea la circunferencia tangente al pentágono regular estrellado y a la circunferencia circunscrita de centro P y radio $s = \overline{PQ}$.

La circunferencia inscrita al pentágono estrellado está inscrita al triángulo $\overset{\Delta}{ACG}$

Sea $h = \overline{GM}$ la altura.

El área del triángulo $\overset{\Delta}{ACG}$ es:

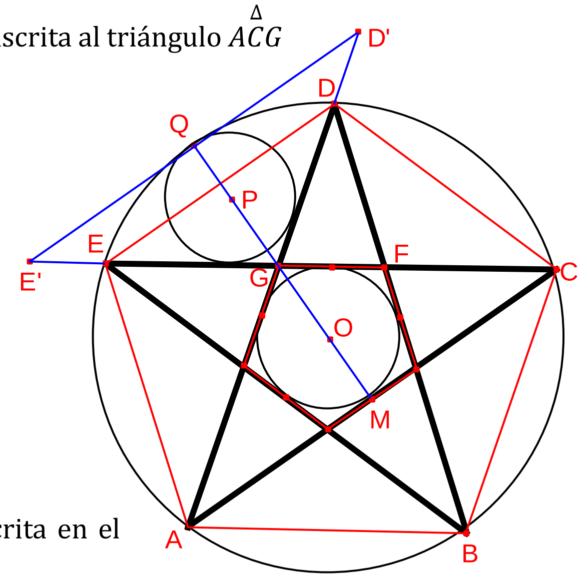
$$S_{ACG} = \frac{1}{2}(2+\Phi)r = \frac{1}{2}\Phi \operatorname{sen} 36° = \frac{1}{2}\Phi \cdot h$$

Entonces:

$$r = \frac{\Phi}{2+\Phi} \operatorname{sen} 36°$$

$$h = \operatorname{sen} 36°$$

La circunferencia de centro P y radio $\overline{PQ} = s$ está inscrita en el triángulo $\overset{\Delta}{D'E'G}$



Los triángulos $\overset{\Delta}{ACG}, \overset{\Delta}{D'E'G}$ son semejantes.

Aplicando el teorema de Tales:

$$\frac{s}{r} = \frac{\overline{GQ}}{h} = \frac{2R - 2h}{h} = \frac{\frac{1}{\text{sen } 36°} - 2 \cdot \text{sen } 36°}{\text{sen } 36°} = \frac{1}{\text{sen}^2 36°} - 2 = \frac{1}{1 - \cos^2 36°} - 2$$
$$= \frac{1}{1 - \frac{\Phi^2}{4}} - 2 = \frac{2\sqrt{5}}{5}$$

Construcción con GeoGebra

Los pasos a seguir serían:

1. Empezamos dibujando un pentágono regular de lado 10. En él inscribimos el pentágono estrellado y la circunferencia circunscrita (con circunferencia por tres puntos, tenemos cinco).
2. La circunferencia verde podemos dibujarla con el centro (coincide con el de la circunscrita) y un punto (sirve el punto medio de cualquiera de los lados de la estrella).
3. Para dibujar las rojas trazaremos el radio de la circunferencia circunscrita que pase por un vértice del pentágono circunscrito a la verde. Sobre el estará el centro de la roja. El punto de corte del radio y la circunferencia circunscrita pertenece a la roja.
4. Definimos un deslizador s para el radio de las rojas: de número, entre 1 y 2.5 e incremento de 0.001.
5. Trazamos una circunferencia con centro en el mismo punto que la verde y radio R-s, donde R es el radio de la circunscrita. (Podemos trazar un segmento desde el centro a un punto cualquiera para conocer R si no sabemos lo que mide).
6. Movemos el deslizador hasta que la circunferencia sea tangente a la circunscrita y a la estrella.
7. Por rotación con centro en el de la circunferencia verde y 72° podemos ir trazando las demás rojas.


25 **26**

En una circunferencia se han dibujado cinco circunferencias. Las tres rojas iguales y las otras dos iguales y tangentes interiores. Calculad la proporción entre los radios. *Jefatura de Hyogo*

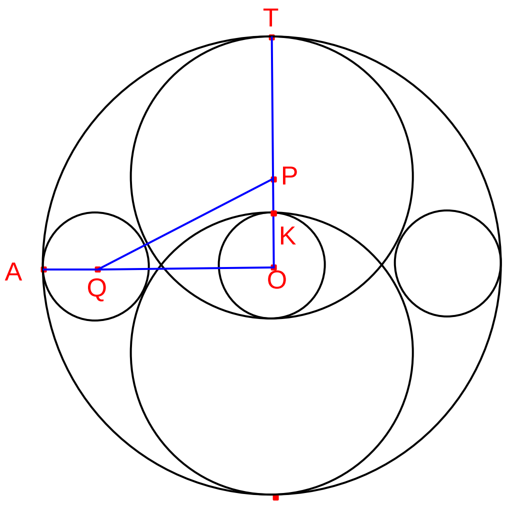
Solución:

Sea O el centro de la circunferencia de radio $\overline{OA} = \overline{OT} = R$

Sea P el centro de la circunferencia de radio $\overline{PT} = r$

Sea Q el centro de la circunferencia de radio $\overline{QA} = s$

Sea O el centro de la circunferencia de radio $\overline{OK} = s$



Notemos que $2r - s = R$

$\overline{OP} = r - s, \overline{OQ} = R - s = 2r - 2s, \overline{PQ} = r + s$

Aplicando el teorema de Pitágoras al triángulo rectángulo $P\overset{\Delta}{O}Q$

$(r+s)^2 = (r-s)^2 + 4(r-s)^2$

Simplificando:

$$\frac{r+s}{r-s} = \sqrt{5}$$

Resolviendo la ecuación:

$$\frac{s}{r} = \frac{3-\sqrt{5}}{2}$$

$$R = 2r - \frac{3-\sqrt{5}}{2}r$$

$$\frac{R}{r} = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = \Phi$$

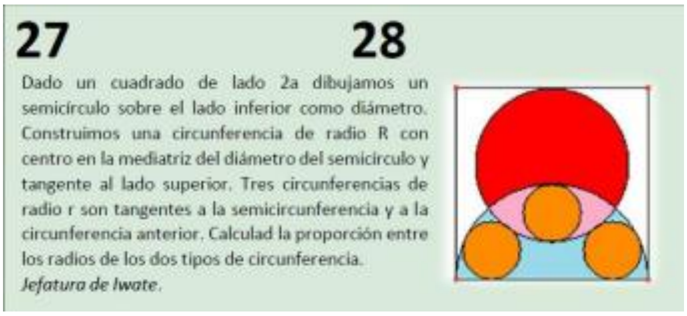
$$\frac{R}{s} = 2 + \sqrt{5}$$

Construcción con GeoGebra

Lo primero para poder dibujar es asignar un valor al radio de la circunferencia exterior. Vamos a elegir 10.

Los pasos a seguir serían:

1. Dibujamos la circunferencia de radio 10 centrada en el origen de coordenadas.
2. Introducimos un deslizador para el radio de las circunferencias pequeñas: de número entre 0.5 y 7 y con incremento 0.001.
3. Los centros de las tres pequeñas están en el origen de coordenadas y a una distancia de r de la circunferencia exterior. Para hallarlos trazamos una circunferencia con centro en (0,0) y radio $10 - r$ y hallamos la intersección con el eje de abscisas.
4. Dibujamos las tres circunferencias con radio r y los tres centros mencionados.
5. Hallamos la intersección del eje de ordenadas con la circunferencia central y con la exterior. Obtenemos los extremos de un diámetro de las circunferencias medianas. El punto medio del diámetro será el centro. Dibujamos las dos circunferencias.
6. Movemos el deslizador hasta conseguir la tangencia de las circunferencias.


27 28

Dado un cuadrado de lado 2a dibujamos un semicírculo sobre el lado inferior como diámetro. Construimos una circunferencia de radio R con centro en la mediatriz del diámetro del semicírculo y tangente al lado superior. Tres circunferencias de radio r son tangentes a la semicircunferencia y a la circunferencia anterior. Calculad la proporción entre los radios de los dos tipos de circunferencia.

Jefatura de Iwate.

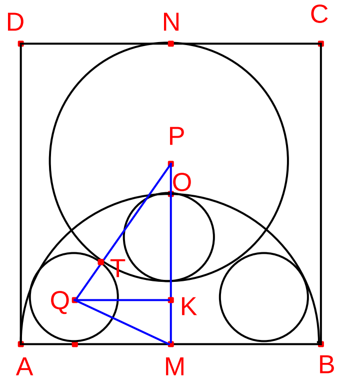
Solución:

Sea el quadrado $ABCD$ de lado $\overline{AB} = 2a$ y centro O.

Sean M,N los puntos medios de los lados $\overline{AB}, \overline{CD}$, respectivamente.

Sea la circunferencia de centro P y radio $\overline{PN} = r$

Sea la circunferencia de centro Q y radio $\overline{QT} = s$



Sea K la proyección ortogonal de Q sobre $\overline{PM}$.

$2r = a + 2s$

$$\overline{PQ} = r + s = \frac{a}{2} + 2s, \overline{MQ} = a - s, \overline{MK}, \overline{PK} = 2a - r - s = \frac{3a}{2} - 2s$$

Aplicando el teorema de Pitágoras al triángulo rectángulo $Q\overset{\Delta}{K}M$:

$$\overline{QK}^2 = (a - s)^2 - s^2 = a^2 - 2as$$

Aplicando el teorema de Pitágoras al triángulo rectángulo $P\overset{\Delta}{K}Q$:

$$\overline{QK}^2 = \left(\frac{a}{2} + 2s\right)^2 - \left(\frac{3a}{2} - 2s\right)^2 = -2a^2 + 8as$$

Igualando las dos expresiones:

$$a^2 - 2as = -2a^2 + 8as$$

Resolviendo la ecuación: $s = \frac{3}{10}a$

Entonces, $r = \frac{4}{5}a$

La proporción entre los radios de los dos tipos de circunferencia es:

$$\frac{s}{r} = \frac{3}{8}$$

Construcción con GeoGebra

Lo primero para poder dibujar es asignar un valor al lado del cuadrado $2a$. Vamos a elegir $2a = 10$.

Los pasos a seguir serían:

1. Dibujamos el cuadrado con base entre los puntos (0,0) y (10,0).
2. Dibujamos la semicircunferencia.
3. Definimos un deslizador para el radio R de la circunferencia grande. De número, entre1 y 5 con incremento 0.001.
4. Trazamos la mediatriz de la base.
5. Introducimos el punto $(5, 10 - R)$ que será el centro de la circunferencia grande. La dibujamos con centro en ese punto y radio R.

   Para el radio de las pequeñas vamos a establecer la relación entre r y R.
   El diámetro de la circunferencia grande podemos medirlo de dos formas
   a) 2R
   b) $a + 2r$

   De aquí deducimos que $r = R - \frac{a}{2}$. Como estamos usando $2a = 10$, tendremos que $r = R - 2.5$
6. Introducimos en la barra de entrada $r = R - 2.5$.
7. Para dibujar la circunferencia pequeña del centro necesitamos su centro. Hallamos la intersección de la mediatriz de la base con la circunferencia grande y la semicircunferencia. Obtendremos los extremos de un diámetro. El punto medio de este diámetro será el centro de la circunferencia.
8. Dibujamos la circunferencia con centro en el punto que acabamos de hallar y radio r.
9. Para las dos que nos faltan sabemos que el centro está a una distancia de r de la base del cuadrado. Introducimos la recta horizontal y=r.
10. También sabemos que el centro está en una circunferencia centrada en el mismo punto que la semicircunferencia y con radio $5 - r$. La dibujamos.
11. Hallamos el punto de intersección de la recta y la circunferencia que acabamos de trazar y tendremos el centro de la circunferencia. La dibujamos con radio r.
12. La otra la podemos trazar con una simetría axial respecto a la mediatriz.
13. Movemos el deslizador hasta conseguir que se verifiquen las tangencias. Se obtiene con $R = 4\ y\ r = 1.5$
14. $\frac{R}{r} = \frac{4}{1.5} = \frac{8}{3}$