

## PROBLEMES DE FEBRER 2024 RESOLTS

1\*\*\*

A un congrés assisteixen 201 científics de cinc nacionalitats diferents. Se sap que en cada grup de sis almenys dos tenen la mateixa edat. Demostra que és possible trobar un grup de cinc persones de la mateixa edat, nacionalitat i sexe.



### Solució:

De les 201 persones podem assegurar que almenys 101 són del mateix sexe.

D'aquestes 101 persones, com només hi ha cinc nacionalitats possibles i  $101 = 5 \cdot 20 + 1$ , ha d'haver almenys una nacionalitat amb 21 representants.

Que en cada grup de sis almenys dos tinguin la mateixa edat, ens indica que no hi ha més de cinc edats diferents. Aleshores, si triem els 21 que ja tenim amb el mateix sexe i la mateixa nacionalitat, com  $21 = 5 \cdot 4 + 1$ , ha d'haver almenys 5 amb la mateixa edat, que era el que buscàvem.

2\*

En un zoo van col·locar 5 animals en gàbies contigües amb portes que les comuniquen, però per error els animals van acabar en gàbies que no els corresponien. Com poden ser traslladats sense que passe res?

3

| LLEÓ    | BURRO | LLOP  | TIGRE | PANTERA |
|---------|-------|-------|-------|---------|
| PANTERA | TIGRE | BURRO | LLEÓ  | LLOP    |

### Solució:

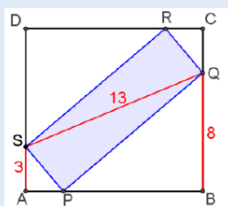
Passos a seguir:

1. Traiem la pantera per la porta que dona al passadís i la deixem amb totes les portes d'accés al passadís tancades.
2. Desplacem els quatre animals que queden a les gàbies una gàbia a l'esquerra de la que ocupen. Amb això, el burro és a la seua gàbia.
3. Posem la **pantera** a la gàbia que li correspon, ja que ha quedat buida.
4. Traiem el lleó al passadís.
5. Movem el burro i el tigre a la gàbia que tenen a la dreta.
6. Posem el **lleó** a la gàbia.
7. Traiem el tigre al passadís.
8. El **burro** torna a la gàbia.
9. Passem el **llop** a la gàbia (a l'esquerra de la que ocupa).
10. Posem el **tigre** a la gàbia.

## 5 ggb

6

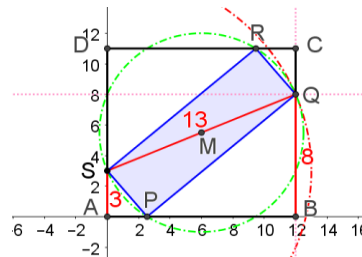
El rectangle PQRS està inscrit en el rectangle ABCD com indica la figura. Si  $AS=3$ ,  $BQ=8$  i  $SQ=13$ , calculeu l'àrea dels dos rectangles.



### Solució amb geogebra:

Passos per fer el dibuix:

1. Introduïm el punt  $S(0,3)$ .
2. Tracem la circumferència centrada a S amb radi 13.
3. Introduïm la recta  $y=8$ .
4. Trobem el punt Q com a intersecció de la circumferència i la recta del pas anterior.
5. Trobem el punt mitjà del segment SQ.
6. Tracem la circumferència centrada en M que passa per Q.
7. La intersecció d'aquesta circumferència amb l'eix d'abscisses ens dona les coordenades de P.
8. Amb la recta que passa per P i M trobem R (intersecció de la recta i la circumferència centrada en M).
9. Tracem el rectangle PQRS. En la vista algebraica veiem que la superfície que ocupa és  $48,6795 u^2$ .
10. Per a l'altre rectangle tracem la perpendicular a l'eix d'abscisses per Q i la perpendicular a l'eix d'ordenades per R.
11. Tracem el rectangle. L'àrea és  $132 u^2$ .



### Solució analítica:

Si tracem la perpendicular a l'eix d'ordenades pel punt S obtindrem un triangle rectangle del qual coneixem que la hipotenusa mesura 13 i un catet 5 ( $8-3=5$ ).

Aplicant el teorema de Pitàgores calculem l'altre catet:  $\sqrt{13^2 - 5^2} = 12$ . Coincideix amb la longitud de la base del rectangle exterior.

Com que CQ mesura el mateix que AS, l'alçada del rectangle serà  $3+8=11$ .

L'àrea del rectangle ABCD serà  $12 \cdot 11 = 132 u^2$ .

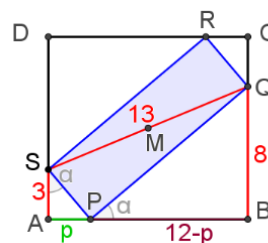
Per trobar l'àrea del rectangle PQRS cal saber les coordenades de  $P(p,0)$ . Tenint en compte que els triangles són iguals dos a dos i semblants, podem plantejar:

$$\frac{12-p}{8} = \frac{3}{p} \rightarrow 12p - p^2 = 24 \rightarrow p = \frac{12 \pm \sqrt{144 - 4 \cdot 1 \cdot 24}}{2} = 6 \pm 2\sqrt{3}$$

De les dues solucions ens interessa  $6 - 2\sqrt{3}$ .

$$A_{PQRS} = A_{ABCD} - 2(A_{APS} + A_{PQB}) = 132 - 2\left(\frac{3p}{2} + \frac{(12-p)8}{2}\right) =$$

$$= 132 - [3 \cdot (6 - 2\sqrt{3}) + 8(6 + 2\sqrt{3})] = 66 - 10\sqrt{3} \cong 48,6795 u^2$$



**7\*\***

Calculeu dos nombres naturals els quadrats dels quals es diferencien en 133 unitats.

**8****Solució:**

Anomenem  $x$  i  $y$  als dos números (suposem que  $x > y$ ).

S'ha de complir que  $x^2 - y^2 = 133$

Si factoritzem, obtindrem  $(x + y)(x - y) = 19 \cdot 7$

Com que són dos números naturals i es compleix  $x > y$ , això ens diu que:  $\begin{cases} x + y = 19 \\ x - y = 7 \end{cases}$

Resolent el sistema obtenim que  $x = 13$  i  $y = 6$ , que són els números buscats.

**9\*\*\***

Triem a l'atzar quatre nombres  $a, b, c$  i  $d$  entre els primers 2024 nombres naturals.

Quina és la probabilitat que  $a \cdot d - b \cdot c$  siga un nombre parell?

**10****Solució:**

Si triem a l'atzar un nombre entre els primers 2024 nombres naturals, la probabilitat que siga parell és  $\frac{1}{2}$ .

Perquè en restar dues quantitats el resultat siga parell cal que ambdues tinguin la mateixa paritat.

Perquè un producte siga imparell cal que els dos factors siguin imparells. La probabilitat seria  $P(a \cdot b \text{ imparell}) = P(a \text{ imparell}) \cdot P(b \text{ imparell}) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$ .

D'ací deduïm que la probabilitat que el producte siga parell serà:

$$P(a \cdot b \text{ parell}) = 1 - P(a \cdot b \text{ imparell}) = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$$

La probabilitat demanada serà:

$$\begin{aligned} P(a \cdot d - b \cdot c \text{ parell}) &= \\ &= P(a \cdot d \text{ imparell i } b \cdot c \text{ imparell}) + P(a \cdot d \text{ parell i } b \cdot c \text{ parell}) = \\ &= \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4} + \frac{3}{4} \cdot \frac{3}{4} = \frac{10}{16} = \frac{5}{8} \end{aligned}$$

## 12\*\*

Calculeu la suma de les xifres del nombre  $\overline{MAR}$  si és el menor dels nombres de tres dígits que verifica  $\overline{MAR} + 2\overline{MAR} + 3\overline{MAR} + \dots + 20\overline{MAR} = 119$  (múltiple de 119).

## 13



**Solució:**

$$\overline{MAR} + 2\overline{MAR} + 3\overline{MAR} + \dots + 20\overline{MAR} = 119$$

$$\overline{MAR} \cdot (1 + 2 + 3 + \dots + 20) = k \cdot 119$$

$$\overline{MAR} \cdot \frac{20 \cdot 21}{2} = k \cdot 119 \rightarrow \overline{MAR} \cdot 210 = k \cdot 119 \rightarrow \overline{MAR} \cdot 3 \cdot 7 \cdot 10 = k \cdot 7 \cdot 17 \rightarrow$$

$$30 \cdot \overline{MAR} = 17 \cdot k \rightarrow \text{Com 30 no és múltiple de 17} \rightarrow \overline{MAR} \text{ és múltiple de 17}$$

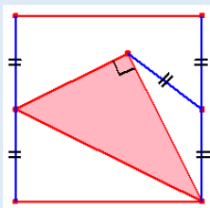
$$\overline{MAR} = 17 \cdot k \text{ Donant valors a k busquem el menor nombre de tres dígits}$$

$$\text{Si } k=6 \rightarrow \overline{MAR} = 17 \cdot 6 = 102 \rightarrow M+A+R = 1+0+2 = 3$$

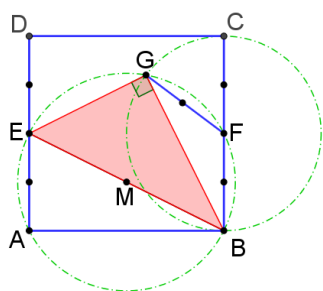
## 14 ggb

La figura està formada per un quadrat que conté un triangle rectangle. Calculeu la proporció entre l'àrea del triangle rectangle i l'àrea del quadrat.

## 15



**Solució amb geogebra:**



$$\frac{A_{triangle}}{A_{quadrat}} = \frac{19.2}{64} = 0.3$$

**Passos:**

1. Dibuixem el quadrat amb polígon regular.
2. Trobem els punts mitjans dels costats verticals.
3. Unim els punts B i E per traçar la hipotenusa del triangle.
4. Trobem el punt mitjà d'aquest segment (M).
5. Si un triangle està inscrit en una circumferència i el costat major coincideix amb el diàmetre de la circumferència, el triangle és rectangle. Si tracem la circumferència centrada en M que passa per B, el vèrtex G del triangle estarà sobre aquesta circumferència.

6. Com que la distància entre F i C coincideix amb la distància entre F i G, si tracem la circumferència centrada en F que passa per C, també contindrà el punt G.
7. Trobem G amb la intersecció de les dues circumferències.
8. Tracem el triangle.
9. Ja tenim en la vista algebraica les àrees del triangle i del quadrat. En dividir-les, el resultat és 0,3.

### Solució analítica:

Suposem que  $AB=2$

Si situem A a l'origen de coordenades (0,0), la resta dels punts tindran les coordenades següents:

B(2,0), C(2,2), E(0,1), F(2,1), M(1, 0.5)

Per trobar G farem servir que està a la intersecció de les dues circumferències: una centrada en F i amb radi 1 i l'altra centrada en M i amb radi  $\frac{\sqrt{5}}{2}$  (es calcula aplicant Pitàgores al triangle ABE).

Les equacions seran

$$\begin{cases} (x-1)^2 + (y-0.5)^2 = \left(\frac{\sqrt{5}}{2}\right)^2 \\ (x-2)^2 + (y-1)^2 = 1^2 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x^2 - 2x + 1 + y^2 - y + 0.25 = 1.25 \\ x^2 - 4x + 4 + y^2 - 2y + 1 = 1 \end{cases}$$

Si restem les dues equacions obtenim  $2x + y - 4 = 0 \rightarrow y = 4 - 2x$

Substituïm a la segona circumferència (és igual fer-ho a la primera):

$$x^2 - 4x + 4 + (4 - 2x)^2 - 2(4 - 2x) = 0 \rightarrow x^2 - 4x + 4 + 16 - 16x + 4x^2 - 8 + 4x = 0$$

$$\rightarrow 5x^2 - 16x + 12 = 0 \rightarrow x = \frac{16 \pm \sqrt{16^2 - 4 \cdot 5 \cdot 12}}{2 \cdot 5} = \frac{16 \pm 4}{10} = \begin{cases} x_1 = 2 \\ x_2 = \frac{6}{5} \end{cases}$$

La primera solució correspon a B i la segona a G.

$$\text{Calculem l'ordenada de G: } y = 4 - 2x \rightarrow y = 4 - 2 \cdot \frac{6}{5} = \frac{8}{5}$$

Ja tenim les coordenades de  $G\left(\frac{6}{5}, \frac{8}{5}\right)$ .

Com que és un triangle rectangle, un dels catets seria la base i l'altre l'altura. Els calculem amb la distància entre dos punts:

$$d(E, G) = \sqrt{\left(0 - \frac{6}{5}\right)^2 + \left(1 - \frac{8}{5}\right)^2} = \frac{3\sqrt{5}}{5}$$

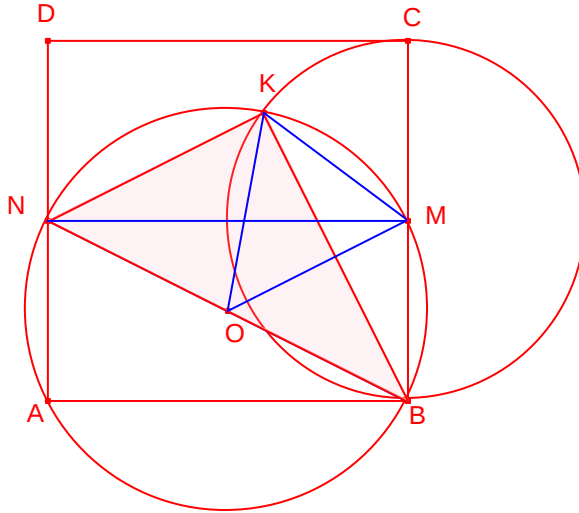
$$d(B, G) = \sqrt{\left(2 - \frac{6}{5}\right)^2 + \left(0 - \frac{8}{5}\right)^2} = \frac{4\sqrt{5}}{5}$$

$$A_{triangle} = \frac{1}{2} \cdot \frac{3\sqrt{5}}{5} \cdot \frac{4\sqrt{5}}{5} = \frac{6}{5}$$

$$A_{\text{quadrat}} = 2^2 = 4$$

$$\text{D'on } \frac{A_{\text{triangle}}}{A_{\text{quadrat}}} = \frac{\frac{6}{5}}{4} = \frac{3}{10} = 0.3$$

Una altra forma:



$$AB=2; MN=MK=1; BN=\sqrt{5}$$

$$\text{El quadrilàter NBMK és cíclic. } OK=OM=ON=\frac{\sqrt{5}}{2}$$

$$\text{Angle KOM} = \text{angle MOB} = \alpha$$

$$\text{Angle KNB} = \alpha$$

Aplicant el teorema del cosinus en el triangle KOM:

$$1^2 = \left(\frac{\sqrt{5}}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{5}}{2}\right)^2 - 2 \cdot \frac{\sqrt{5}}{2} \cdot \frac{\sqrt{5}}{2} \cdot \cos \alpha$$

$$1 = \frac{5}{4} + \frac{5}{4} - 2 \cdot \frac{5}{4} \cdot \cos \alpha$$

$$\text{D'on s'obté que } \cos \alpha = \frac{3}{5} \text{ i, per tant, } \sin \alpha = \frac{4}{5}$$

$$KN = \frac{3}{5} \cdot \sqrt{5} = \frac{3\sqrt{5}}{5}; BK = \frac{4}{5} \cdot \sqrt{5} = \frac{4\sqrt{5}}{5}$$

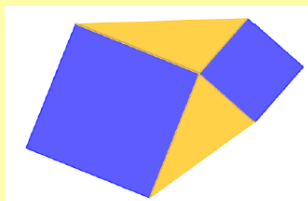
$$A_{\text{triangle}} = \frac{1}{2} \cdot \frac{3\sqrt{5}}{5} \cdot \frac{4\sqrt{5}}{5} = \frac{6}{5}$$

$$A_{\text{quadrat}} = 2^2 = 4$$

$$\frac{A_{\text{triangle}}}{A_{\text{quadrat}}} = \frac{\frac{6}{5}}{4} = \frac{3}{10}$$

**16\*\***

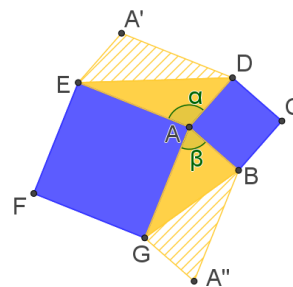
En el dibuix hi ha dos quadrats i dos triangles. Quina relació hi ha entre les àrees dels dos triangles?

**17****Solució:**

Les àrees són iguals.

Si observem el dibuix, com es tracta de dos quadrats, és clar que es compleix  $\alpha + \beta = 180^\circ$ .

Si tracem els paral·lelograms ADA'E i ABA''G, és evident que són semblants, ja que tenen costats de la mateixa longitud (els costats dels dos quadrats) i angles iguals ( $\alpha$  i  $\beta$ ). Les àrees dels dos paral·lelograms són iguals, i per tant, també les dels triangles.

**19 \*\*\***

Donada la funció  $f(x) = |3x - 1|$ , calcula tots els valors de  $x$  per als quals es compleix  $f(f(x)) = x$ .

**20****Solució:**

Busquem els valors de  $x$  per als quals es compleix:

$$f(f(x)) = f(|3x - 1|) = |3 \cdot |3x - 1| - 1| = |9x - 3| - 1 = x$$

Com hi ha dos valors absoluts, haurem de considerar diversos casos, segons siga positiva o negativa l'expressió de la qual calculem el valor absolut:

Cas 1:  $9x - 3 \geq 0 \rightarrow x \geq \frac{1}{3}$

La nostra equació quedarà:  $|9x - 3 - 1| = x \rightarrow |9x - 4| = x$

Tornem a tenir dues opcions segons el valor de  $9x - 4$ :

Cas 1a:  $9x - 4 \geq 0 \rightarrow x \geq \frac{4}{9} \geq \frac{1}{3}$

Podem eliminar el valor absolut:  $9x - 4 = x \rightarrow 8x = 4 \rightarrow x = \frac{1}{2} > \frac{4}{9}$ , per la qual cosa és una solució vàlida.

Cas 1b:  $9x - 4 < 0 \rightarrow \frac{1}{3} \leq x < \frac{4}{9}$

Per eliminar el valor absolut hem de canviar signes:

$$|9x - 4| = -9x + 4 = x \rightarrow 4 = 10x \rightarrow x = \frac{2}{5}$$

Perquè sigui vàlida s'ha de complir  $\frac{1}{3} \leq \frac{2}{5} < \frac{4}{9}$  o, el que és el mateix:  $\frac{15}{45} \leq \frac{18}{45} < \frac{20}{45}$ , que és cert, evidentment. Tenim la segona solució:  $x = \frac{2}{5}$

Cas 2:  $9x - 3 < 0 \rightarrow x < \frac{1}{3}$

Per a eliminar el valor absolut de  $|9x - 3|$  hem de canviar signes:

$$||9x - 3| - 1| = x \rightarrow |-9x + 3 - 1| = x \rightarrow |-9x + 2| = x$$

Tornem a tindre dues opcions segons el valor de  $-9x + 2$ :

Cas 2a:  $-9x + 2 > 0 \rightarrow x < \frac{2}{9} < \frac{1}{3}$

Podem eliminar el valor absolut de  $|-9x + 2|$ :

$$-9x + 2 = x \rightarrow -9x + 2 = x \rightarrow 10x = 2 \rightarrow x = \frac{1}{5}$$

Perquè siga vàlida s'ha de complir  $\frac{1}{5} < \frac{2}{9}$  o, el que és el mateix:  $\frac{9}{45} < \frac{10}{45}$ . que és

cert, evidentment. Tenim la tercera solució:  $x = \frac{1}{5}$

Cas 2b:  $-9x + 2 < 0 \rightarrow \frac{1}{3} > x > \frac{2}{9}$

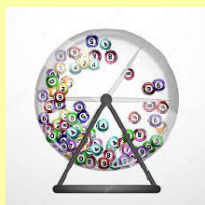
Podem eliminar el valor absolut de  $|-9x + 2|$  canviant signes:

$$9x - 2 = x \rightarrow 8x = 2 \rightarrow x = \frac{1}{4}$$

Perquè siga vàlida s'ha de complir  $\frac{1}{3} > \frac{1}{4} > \frac{2}{9}$  o, el que és el mateix:  $\frac{12}{36} > \frac{9}{36} > \frac{8}{36}$ , que és cert, de la qual cosa obtenim la quarta solució:  $x = \frac{1}{4}$

**21\*\*****22**

Donats quatre nombres en triem tres, calculem la seva mitjana i a la mitjana obtinguda li sumem el que falta. Això es pot fer de 4 maneres. Si obtenim com a resultats 17, 21, 23 i 29, quin és el major dels quatre nombres que teníem al principi?

**Solució:**

Anomenem als quatre nombres  $a, b, c$  i  $d$ . Traduïm a equacions les condicions que ens dona l'enunciat:

$$\begin{cases} \frac{a+b+c}{3} + d = 17 \\ \frac{a+b+d}{3} + c = 21 \\ \frac{a+c+d}{3} + b = 23 \\ \frac{b+c+d}{3} + a = 29 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} a+b+c+3d = 3 \cdot 17 \\ a+b+d+3c = 3 \cdot 21 \\ a+c+d+3b = 3 \cdot 23 \\ b+c+d+3a = 3 \cdot 29 \end{cases}$$

Si sumem les quatre equacions obtenim

$$6a + 6b + 6c + 6d = 3 \cdot (17 + 21 + 23 + 29) = 3 \cdot 90 \rightarrow a + b + c + d = 45$$

Si substituïm això en les quatre equacions anteriors, obtenim

$$\begin{cases} 45 + 2d = 3 \cdot 17 \\ 45 + 2c = 3 \cdot 21 \\ 45 + 2b = 3 \cdot 23 \\ 45 + 2a = 3 \cdot 29 \end{cases}$$

D'on podem deduir que el nombre més gran és  $a$ , i el seu valor el deduïm de l'equació

$$45 + 2a = 3 \cdot 29 \rightarrow 2a = 87 - 45 = 42 \rightarrow \mathbf{a = 21}$$



26\*

L'any 2024 comença en dilluns i acaba en dimarts. Quin serà el proper any que comence en dilluns i acabe en dimarts?

27



### Solució:

Els anys que no són de traspàs comencen i acaben el mateix dia de la setmana. Ha de ser un any de traspàs. Com qualsevol any de traspàs que comence en dilluns acabarà dimarts, ens limitarem a buscar quin és el proper any de traspàs que comence en dilluns.

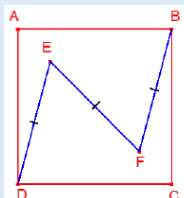
| Any bixest | Comença   | Acaba     | Anys no bixestos (comencen i acaben el mateix dia) |
|------------|-----------|-----------|----------------------------------------------------|
| 2024       | Dilluns   | Dimarts   | 2025 dimecres, 2026 dijous, 2027 divendres         |
| 2028       | Dissabte  | Diumenge  | 2029 dilluns, 2030 dimarts, 2031 dimecres          |
| 2032       | Dijous    | Divendres | 2033 dissabte, 2034 diumenge, 2035 dilluns         |
| 2036       | Dimarts   | Dimecres  | 2037 dijous, 2038 divendres, 2039 dissabte         |
| 2040       | Diumenge  | Dilluns   | 2041 dimarts, 2042 dimecres, 2043 dijous           |
| 2044       | Divendres | Dissabte  | 2045 diumenge, 2046 dilluns, 2047 dimarts          |
| 2048       | Dimecres  | Dijous    | 2049 divendres, 2050 dissabte, 2051 diumenge       |
| 2052       | Dilluns   | Dimarts   |                                                    |

Any 2052.

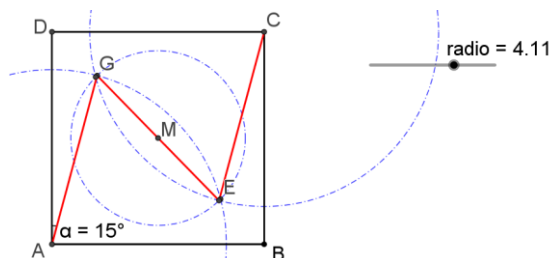
28 ggb

Siguen E i F dos punts interiors al quadrat ABCD tals que  $\overline{DE} = \overline{EF} = \overline{FB}$  i que  $\overline{DE} \parallel \overline{FB}$ .  
Siga  $\alpha = \angle ADE$ .  
Determineu el valor mínim de l'angle  $\alpha = \angle ADE$ .

29



### Solució amb geogebra:



Per dibuixar el quadrat li donarem una mida qualsevol al costat, per exemple 10 cm.

Passos:

1. Dibuixem un quadrat (polígon regular) de costat 10.
2. Trobem el centre del quadrat M.
3. Creem un botó lliscador de nombre amb valor mínim 2 i màxim 5. Serà la distància entre M i qualsevol dels punts extrems del segment (E o G). La distància entre A i G serà el doble del que indique el botó lliscador, igual que la distància entre C i E.

4. Per trobar E i G tracem una circumferència centrada en M amb radi el lliscador i dues centrades en A i C amb radi el doble del lliscador. Els punts de tall ens donaran els punts E i G.
5. Tracem els tres segments: AG, GE i EC.
6. Mesurem l'angle que volem minimitzar i movem el botó lliscador fins obtenir el mínim. S'aconsegueix quan l'angle mesura  $15^\circ$ .

#### Solució analítica:

Siga  $\overline{AB} = 1$  el costat del quadrat ABCD.

Siga  $\overline{DE} = \overline{EF} = \overline{FB} = x$ .

Siga E' la projecció de E sobre el costat  $\overline{AD}$ .

Siga E'' la projecció de E sobre el costat  $\overline{CD}$ .

Siga F'' la projecció de F sobre el costat  $\overline{CD}$ .

Siga P la projecció de F sobre la recta EE'.

$$\overline{EE'} = \overline{DE''} = x \cdot \sin \alpha$$

$$\overline{DE'} = \overline{EE''} = x \cdot \cos \alpha$$

$$\overline{E''F''} = 1 - 2 \cdot \overline{DE''} = 1 - 2x \cdot \sin \alpha$$

$$\overline{EP} = 1 - 2(1 - \overline{EE''}) = 2x \cdot \cos \alpha - 1$$

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle  $\triangle EPF$ :

$$x^2 = (1 - 2x \cdot \sin \alpha)^2 + (2x \cdot \cos \alpha - 1)^2. \text{ Simplificant:}$$

$$\cos \alpha + \sin \alpha = \frac{2+3x^2}{4x}$$

$$\sqrt{2} \cos \left( \frac{\pi}{4} - \alpha \right) = \frac{2 + 3x^2}{4x}$$

$$\alpha = f(x) = \frac{\pi}{4} - \arccos \left( \frac{2 + 3x^2}{4\sqrt{2}x} \right)$$

$$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1 - \left( \frac{2 + 3x^2}{4\sqrt{2}x} \right)^2}} \cdot \frac{1}{4\sqrt{2}} \cdot \frac{3x^2 - 2}{x^2}$$

$$f'(x) = 0, x = \frac{\sqrt{6}}{3}$$

Estudiant el signe de la primera derivada  $x = \frac{\sqrt{6}}{3}$  és un mínim relatiu estricte.

El valor mínim de l'angle  $\alpha = \angle ADE$  és:

$$\alpha_{\min} = f \left( \frac{\sqrt{6}}{3} \right) = \frac{\pi}{4} - \arccos \left( \frac{\sqrt{3}}{2} \right) = \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{12}$$

