

EXERCICIS DE MARÇ 2024 RESOLTS

1*

Un rei tenia deu súbdits obligats a pagar un tribut anual de deu monedes d'or de 10 grams cadascuna. Un any un súbdit va decidir rebel·lar-se i li va pagar deu monedes d'or que pesaven només 9 grams cadascuna. Com pot endevinar el rei quin dels seus súbdits li ha enganyat, fent una sola pesada en una bàscula?

2



Solució:

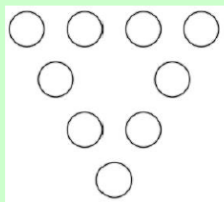
Ha d'agafar una moneda del primer, dues del segon, tres del tercer i així fins a deu del desé.

Si totes pesaren 10 grams, el pes seria de $1+2+3+\dots+10=55$ grams, però si un dels lots és de 9 grams, la quantitat que falte per arribar als 55 g serà la de monedes de 9 g que ha pesat i així sabrà qui l'ha enganyat.

4*

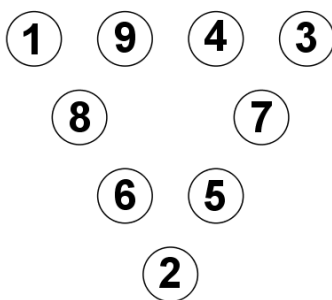
Col·loca els nombres de l'1 al 9, cadascun en un cercle, sense repetir-ne cap, de manera que la suma dels quatre nombres que formen cada costat del triangle siga igual a 17.

5



Solució:

La solució no és única, només caldria intercanviar dos nombres del centre d'una de les línies per obtenir-ne una altra.



6**

Reparteix 100 mesures de blat entre 100 persones sabent que cada home rep 3 mesures, cada dona 2 i cada xiquet 0,5. Sabem que les tres quantitats que busquem són parells i que el nombre de xiquets és menor que el del triple de dones.

7



Solució:

Anomenarem x a la quantitat d'homes, y a la de dones i z a la de xiquets.

Amb la informació de què disposem podem plantejar les equacions:

$$100 \text{ persones} \rightarrow x + y + z = 100$$

$$100 \text{ mesures (3 cada home, 2 cada dona i 0,5 cada xiquet)} \rightarrow 3x + 2y + 0,5z = 100 \text{ o, el que és equivalent, } 6x + 4y + z = 200$$

$$\begin{aligned} \text{De la primera obtenim que } z &= 100 - x - y \rightarrow 6x + 4y + 100 - x - y = 200 \rightarrow \\ &\rightarrow 5x + 3y = 100 \rightarrow x + \frac{3}{5}y = 20 \end{aligned}$$

Sabem que totes les incògnites són nombres naturals, ja que comptem persones, per la qual cosa y ha de ser múltiple de 5 i parell, per tant múltiple de 10. Amb això les opcions possibles són:

Dones: y	0	10	20	30
Homes: x	20	14	8	2
Xiquets: z	80	76	72	68

Com que el nombre de xiquets ha de ser menor que el del triple de dones, calculem $3y$:

$3y$	0	30	60	90
------	---	----	----	----

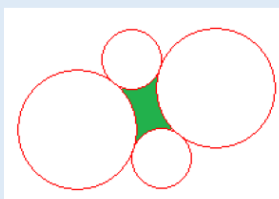
L'únic cas en què el nombre de xiquets és menor que el del triple de dones és l'últim:

Hi hauria 30 dones, 2 homes i 68 xiquets.

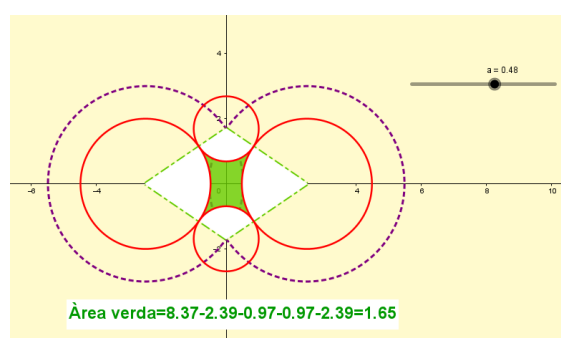
8 ggb

En la figura hi ha quatre circumferències. Les menudes són de radi 1 i les grans de radi 2. Les menudes són tangents a les grans. Calculeu l'àrea màxima limitada per les quatre circumferències.

9



Solució amb geogebra:



Per fer el dibuix, el primer que tenim en compte és que els centres de les quatre circumferències formen un rombe de costat 3.

Els centres de les de radi 2 els col·locarem sobre l'eix d'abscisses i els de les de radi 1 sobre el d'ordenades.

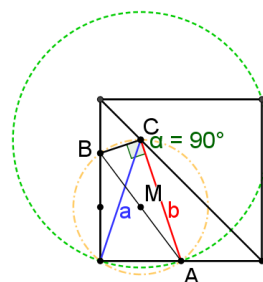
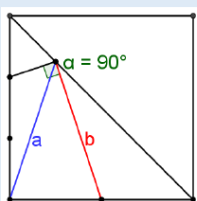
Passos a seguir:

1. Comencem per introduir un lliscador per poder moure els centres: serà de nombre, entre 0 i 0,83, amb increment 0,01.
2. El centre de la circumferència de la dreta és al punt $A(a + 2, 0)$. L'altre per simetria respecte a l'eix d'ordenades.
3. Dibuixem la circumferència amb centre A i radi 2. Per simetria, l'altra.
4. Les dues circumferències menudes tenen el centre a 3 unitats dels centres de les que ja hem dibuixat, de manera que les circumferències centrades en els mateixos punts, però amb radi 3 ens donaran amb la intersecció els dos centres de les circumferències de radi 1. Les dibuixem.
5. Tracem el polígon que uneix els quatre centres de les circumferències.
6. Trobem els punts d'intersecció del rombe amb les quatre circumferències.
7. Tracem els quatre sectors circulars.
8. Calculem l'àrea verda restant a l'àrea del rombe les dels quatre sectors (són iguals dos a dos).
9. El valor més gran obtingut en desplaçar el botó lliscador és una àrea de 1,65 unitats quadrades.

11 ggb

La figura està formada per un quadrat, dos costats del qual s'han dividit en tres parts i dos parts iguals, la diagonal i dos segments que formen un angle de 90° .
Proveu que $a = b$.

12



Solució amb geogebra:

Comencem per dibuixar un quadrat de costat 6, perquè siga fàcil dividir el costat vertical en tres parts iguals i la base en dues.

Per dibuixar els segments BC i AC de manera que l'angle entre ells siga recte, tindrem en compte que qualsevol triangle inscrit en una circumferència de manera que un dels costats coincidisca amb el diàmetre d'aquesta és rectangle.

Per dibuixar la circumferència amb diàmetre a AB, tracem el segment que els uneix i trobem el punt mitjà M, que serà el centre. Tracem la circumferència amb centre a M i que passa per A (o B).

El vèrtex C està en aquesta circumferència i també ha d'estar a la diagonal del quadrat. Amb intersecció trobem C.

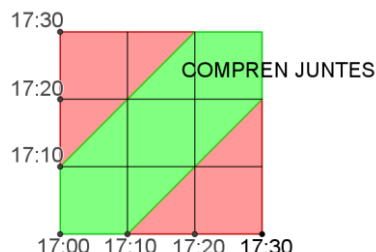
Dibuixem els segments a i b.

Per comprovar que mesuren el mateix, només cal traçar la circumferència amb centre a C que passe per A (o B). Tots dos segments són radis de la circumferència, per la qual cosa mesuren el mateix.

13***

Anna ha quedat amb Núria per anar de compres. Es veuran a la parada del metro entre les 17:00 h i les 17:30 h, però la primera que arribi només esperarà 10 minuts a l'altra. Quina és la probabilitat que compren juntes?

14



Solució:

En el dibuix representem en un eix l'hora d'arribada d'Anna i en l'altre la de Núria. La zona central (l'hexàgon verd) representa les opcions en què es troben (per exemple, Anna arriba a les 17:10 h i Núria a les 17:15 h seria un punt en aquesta zona), mentre que els dos triangles rojos corresponen als casos en què no es troben (per exemple, Anna arriba a les 17:10 h i Núria a les 17:25 h).

Totes les situacions possibles les tenim dividides en 9 quadrats, mentre que les que corresponen que es troben i compren juntes en total ocupen 5 quadrats (tres complets i quatre meitats).

La probabilitat que compren juntes serà: $P = \frac{5}{9}$.

15**

Calcula tots els divisors del 2024.
Quin va ser l'any anterior amb la mateixa quantitat de divisors?
I el següent?

16



Solució:

Si factoritzem el 2024 obtenim $2024 = 2^3 \cdot 11 \cdot 23$

El nombre de divisors és $(3+1) \cdot (1+1) \cdot (1+1) = 4 \cdot 2 \cdot 2 = 16$

Calcula tots els divisors del 2024. 1, 2, 4, 8, 11, 22, 23, 44, 46, 88, 92, 184, 253, 506, 1012 i 2024.

Per a calcular-los tots, el més fàcil és fer-ho per parelles de nombres el producte dels quals siga 2024, començant per 1·2024:

1	2	4	8	11	22	23	44
2024	1012	506	253	184	92	88	46

Quin va ser l'any anterior amb la mateixa quantitat de divisors?

$$2010=2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 67 \rightarrow (1+1) \cdot (1+1) \cdot (1+1) \cdot (1+1)=2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2=16$$

I el següent?

$$2030=2 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 29 \rightarrow (1+1) \cdot (1+1) \cdot (1+1) \cdot (1+1)=2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2=16$$

18 **

La mestra va calcular la mitjana de les notes de 6 estudiants i va obtenir 85. Després es va adonar que li havia posat un 86 a Joan en lloc d'un 68. Quina és la mitjana correcta?

19



Solució:

La mitjana que va obtenir va ser 85, per la qual cosa la suma de les notes va ser $85 \cdot 6 = 510$

Restem la quantitat incorrecta: $510 - 86 = 424$

Afegim la nota correcta: $424 + 68 = 492$

I tornem a calcular la mitjana: $\frac{492}{6} = 82$

20 ggb

Determineu les mesures del trapezi isòsceles d'àrea mínima circumscribit a una circumferència de radi 1 m.

21



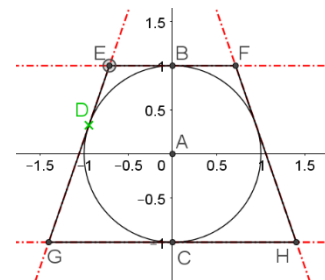
Solució amb geogebra:

Començarem per dibuixar la circumferència de radi 1 i centre a l'origen de coordenades A.

Trobem els punts d'intersecció amb l'eix d'ordenades (B i C).

Tracem les rectes tangents a la circumferència per aquests dos punts per tindre les bases del trapezi.

Amb punt en objecte introduïm el punt D. Tracem la recta tangent per aquest punt a la circumferència. La intersecció amb les dues rectes anteriors ens dona els punts E i G.

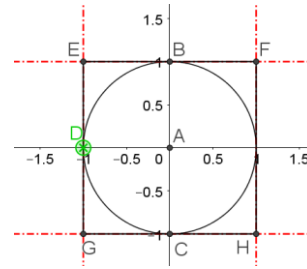


Per simetria respecte a l'eix d'ordenades tracem la recta per F i H.

Dibuixem el trapezi amb polígon per E, F G i H.

Movem D fins trobar l'àrea mínima.

Correspon a un quadrat de costat 2 m.



22*

Un caragol puja per una paret vertical de 10 metres d'altura. Durant el dia puja 3 metres, però durant la nit es queda adormit i rellisca 2 metres cap avall. En quants dies aconseguirà pujar la paret?

23



Solució:

Si tenim en compte que el primer dia puja 3 metres però en baixa 2, vol dir que només ha pujat 1 metre. El segon dia passa el mateix i ja ha pujat 2 metres entre els dos dies. El tercer dia puja 3 metres i torna a baixar-ne 2... Així que durant els set primers dies ha anat pujant un metre per dia. Però el huité, en pujar els 3 metres del dia, aconsegueix arribar a la part superior de la paret.

Per tant, aconseguirà pujar la paret en huit dies.

25***

Siguen els nombres de dues xifres

$\overline{a4}$ i $\overline{b(a+1)}$.

Si el MCD $(\overline{a4}, \overline{b(a+1)}) = 18$,
calculeu $a+b$.

26



Solució:

$18=3^2 \cdot 2 \rightarrow \overline{a4}$ i $\overline{b(a+1)}$ són múltiples de 2 i de 9.

$\overline{a4} = \dot{9} \rightarrow$ (criteri divisibilitat del 9): $a+4=9 \rightarrow a=5$.

O bé $a+4=18 \rightarrow a=14$ (no vàlid perquè a és un dígit).

I, per la mateixa raó, $a+4 \neq 27$ i successivament. Per tant, $a=5 \rightarrow \overline{a4}=54$

$\overline{b(a+1)} = \overline{b6} = \dot{9} \rightarrow b+6=9 \rightarrow b=3$ o bé $b+6=18 \rightarrow b=12$ (no vàlid).

Per tant, $\overline{b(a+1)}=36$

Comprovació:

$$\text{MCD}(54,36)=\text{MCD}(3^3 \cdot 2, 3^2 \cdot 2^2)=3^2 \cdot 2=18$$

$$a+b=5+3=8$$

27*

Quants diccionaris cal editar perquè es puguin fer directament traduccions entre qualsevol dels 5 idiomes: espanyol, rus, anglès, francès i alemany?
(Un únic diccionari relaciona dos idiomes: rus-francès equival a francès-rus).

28



Solució:

Si triem un dels idiomes, per exemple l'espanyol, hi haurà quatre diccionaris:

Espanyol-rus

Espanyol-anglès

Espanyol-francès

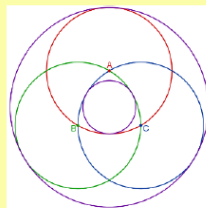
Espanyol-alemany

Com que això ho farem amb els cinc idiomes, en total tindriem $5 \cdot 4 = 20$ diccionaris, però cada diccionari l'hauríem comptat dues vegades, així que el nombre total de diccionaris serà $20:2=10$.

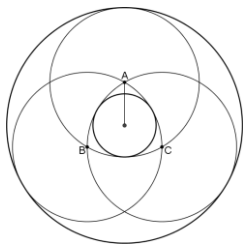
29**

Siguen A, B i C tres punts equidistants. Amb centre en cadascun d'ells, tracem una circumferència que passa pels altres. Si $d(A,B)=d(A,C)=d(B,C)=1$, calcula el radi de les circumferències interior i exterior, tangents a les tres anteriors.

30



Solució:



El centre de les circumferències està a la mateixa distància dels tres punts, per la qual cosa coincideix amb el circumcentre del triangle ABC.

La distància del centre al circumcentre és $2/3$ de la longitud de l'altura.

$$h^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 = 1^2 \rightarrow h^2 + \frac{1}{4} = 1 \rightarrow h^2 = \frac{3}{4} \rightarrow h = \sqrt{\frac{3}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2} \text{ cm}$$

$$d = \frac{2}{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cong 0,58 \text{ cm}$$

El radi de la circumferència exterior és: $R = 1 + \frac{\sqrt{3}}{3} \cong 1,58 \text{ cm}$.

El radi de la circumferència interior és igual al diàmetre de les tres circumferències inicials menys el radi de la circumferència exterior:

$$r = 2 - \left(1 + \frac{\sqrt{3}}{3}\right) = 1 - \frac{\sqrt{3}}{3} \cong 0,42 \text{ cm}.$$