EJERCICIOS DE MARZO 2024 RESUELTOS

1*

Un rey tenía diez súbditos obligados a pagar un tributo anual de diez monedas de oro de 10 gramos cada una. Un año un súbdito decidió rebelarse y le pagó diez monedas de oro que pesaban sólo 9 gramos cada una. ¿Cómo puede adivinar el rey cuál de sus súbditos le ha engañado, haciendo una sola pesada en una báscula?

2

Solución:

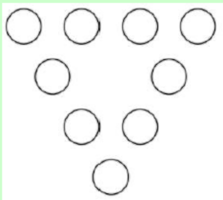
Debe coger 1 moneda del primero, dos del segundo, tres del tercero y así hasta diez del décimo.

Si todas pesaran 10 gramos, el peso sería de 1+2+3+...+10=55 gramos, pero si uno de los lotes es de 9 gramos, la cantidad que falte para llegar a los 55 g será la de monedas de 9 g que ha pesado y así sabrá quién le ha engañado.

4*

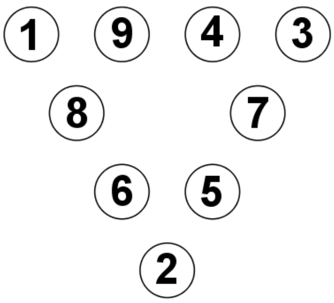
Coloca los números del 1 al 9, cada uno en un círculo, sin repetir ninguno, de manera que la suma de los cuatro números que forman cada lado del triángulo sea igual a 17.

5



Solución:

La solución no es única, bastaría con intercambiar dos números del centro de una de las líneas para obtener otra.



6**

Reparte 100 medidas de trigo entre 100 personas sabiendo que cada hombre recibe 3 medidas, cada mujer 2 y cada niño 0,5.
Sabemos que las tres cantidades buscadas son pares y que el número de niños es menor que el del triple de mujeres.

7

Solución:

Llamaremos x al número de hombres, y al de mujeres y z al de niños.

Con la información de que disponemos podemos plantear las ecuaciones:

100 personas $\rightarrow \quad x + y + z = 100$

100 medidas (3 cada hombre, 2 cada mujer y 0,5 cada niño) $\rightarrow \quad 3x + 2y + 0{,}5z = 100$ o, lo que es equivalente, $6x + 4y + z = 200$

De la primera obtenemos que $z = 100 - x - y \quad \rightarrow \quad 6x + 4y + 100 - x - y = 200 \quad \rightarrow$
$\rightarrow \quad 5x + 3y = 100 \quad \rightarrow \quad x + \frac{3}{5}y = 20$

Sabemos que todas las incógnitas son números naturales, ya que contamos personas, por lo que y debe ser múltiplo de 5 y par, por tanto múltiplo de 10. Con esto las opciones posibles son:

Mujeres y	0	10	20	30
Hombres x	20	14	8	2
Niños z	80	76	72	68

Como el número de niños debe ser menor que el del triple de mujeres, calculamos 3y:

$3y$	0	30	60	90

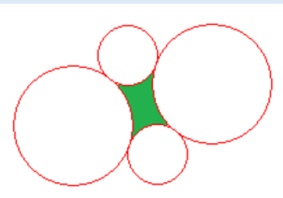
El único caso en que el número de niños es menor que el del triple de mujeres es el último:

Habría 30 mujeres, 2 hombres y 68 niños.

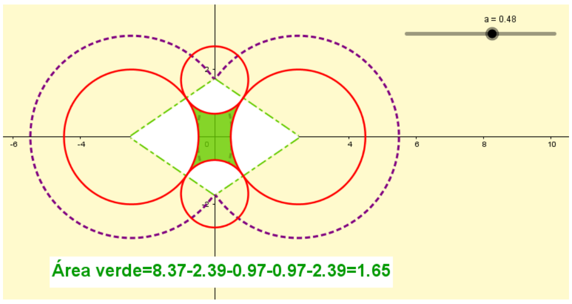
8 ggb

En la figura hay cuatro circunferencias. Las pequeñas son de radio 1 y las grandes de radio 2.
Las pequeñas son tangentes a las grandes.
Calculad el área máxima limitada por las cuatro circunferencias.

9



Solución con geogebra:

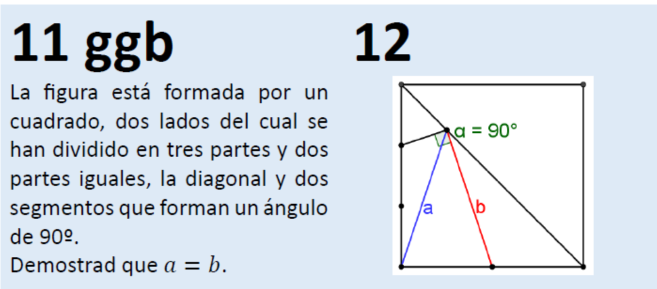


Para hacer el dibujo, lo primero que tenemos en cuenta es que los centros de las cuatro circunferencias forman un rombo de lado 3.

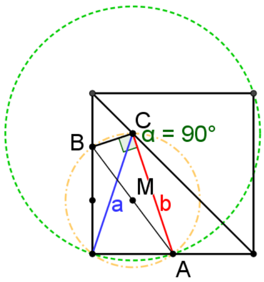
Los centros de las de radio 2 los colocaremos sobre el eje de abscisas y los de las de radio 1 sobre el de ordenadas.

Pasos a seguir:

1. Empezamos por introducir un deslizador a para poder mover los centros: será de número, entre 0 y 0,83 con incremento 0,01.
2. El centro de la circunferencia de la derecha está en el punto $A(a+2,0)$. El otro por simetría respecto al eje de ordenadas.
3. Dibujamos la circunferencia con centro en A y radio 2. Por simetría, la otra.
4. Las dos circunferencias pequeñas tienen el centro a 3 unidades de los centros de las que ya hemos dibujado, con lo que las circunferencias centradas en los mismos puntos, pero con radio 3 nos darán con intersección los dos centros de las circunferencias de radio 1. Las dibujamos.
5. Trazamos el polígono que une los cuatro centros de las circunferencias.
6. Hallamos los puntos de intersección del rombo con las cuatro circunferencias.
7. Trazamos los cuatro sectores circulares.
8. Calculamos el área verde restando al área del rombo las de los cuatro sectores (son iguales dos a dos).
9. El mayor valor obtenido al desplazar el deslizador es un área de 1,65 unidades cuadradas.


11 ggb **12**

La figura está formada por un cuadrado, dos lados del cual se han dividido en tres partes y dos partes iguales, la diagonal y dos segmentos que forman un ángulo de 90º.
Demostrad que $a=b$.



Solución con geogebra:

Empezamos por dibujar un cuadrado de lado 6, para que sea fácil dividir el lado vertical en tres partes iguales y la base en dos.

Para dibujar los segmentos BC y AC de forma que el ángulo entre ellos sea recto, tendremos en cuenta que cualquier triángulo inscrito en una circunferencia de forma que uno de sus lados coincida con el diámetro de esta es rectángulo.

Para dibujar la circunferencia con diámetro en AB, trazamos el segmento que los une y hallamos el punto medio del mismo M, que será el centro. Trazamos la circunferencia con centro en M y que pasa por A (o B).

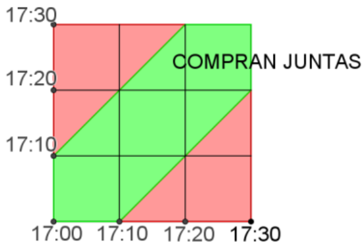
El vértice C está en esa circunferencia y también debe estar en la diagonal del cuadrado. Con intersección hallamos C.

Dibujamos los segmentos a y b.

Para comprobar que miden lo mismo, basta trazar la circunferencia con centro en C que pase por A (o B). Ambos segmentos son radios de la circunferencia, por lo que miden lo mismo.

13*** 14

Ana ha quedado con Nuria para ir de compras. Se verán en la parada del metro entre las 17:00 h y las 17:30 h, pero la primera que llegue solo esperará 10 minutos a la otra. ¿Cuál es la probabilidad de que compren juntas?



Solución:

En el dibujo representamos en un eje la hora de llegada de Ana y en el otro la de Nuria. La zona central (el hexágono verde) representa las opciones en que se encuentran (por ejemplo, Ana llega a las 17:10 h y Nuria a las 17:15 h sería un punto en esta zona), mientras que los dos triángulos rojos corresponden a los casos en que no se encuentran (por ejemplo, Ana llega a las 17:10 h y Nuria a las 17:25 h).

Todas las situaciones posibles las tenemos divididas en 9 cuadrados, mientras que las que corresponden a que se encuentren y compren juntas en total ocupan 5 cuadrados (tres completos y cuatro medios).

La probabilidad de que compren juntas será: $P = \frac{5}{9}$.

15** 16

Calcula todos los divisores del 2024.
¿Cuál fue el año anterior con la misma cantidad de divisores?
¿Y el siguiente?

Solución:

Si factorizamos el 2024 obtenemos $2024 = 2^3 \cdot 11 \cdot 23$

El número de divisores es (3+1)·(1+1)·(1+1)=4·2·2=16

Calcula todos los divisores del 2024. 1, 2, 4, 8, 11, 22, 23, 44, 46, 88, 92, 184, 253, 506, 1012 y 2024.

Para calcularlos todos, lo más fácil es hacerlo por parejas cuyo producto sea 2024, empezando por 1·2024:

1	2	4	8	11	22	23	44
2024	1012	506	253	184	92	88	46

¿Cuál fue el año anterior con la misma cantidad de divisores?

$2010=2\cdot3\cdot5\cdot67 \rightarrow (1+1)\cdot(1+1)\cdot(1+1)\cdot(1+1)=2\cdot2\cdot2\cdot2=16$

¿Y el siguiente?

$2030=2\cdot5\cdot7\cdot29 \rightarrow (1+1)\cdot(1+1)\cdot(1+1)\cdot(1+1)=2\cdot2\cdot2\cdot2=16$

18 **

La maestra calculó la media de las notas de 6 estudiantes y obtuvo 85. Después se dio cuenta de que había puesto un 86 a Juan en lugar de un 68. ¿Cuál es la media correcta?

19

Solución:

La media que obtuvo fue 85, por lo que la suma de las notas fue $85 \cdot 6 = 510$

Restamos la cantidad incorrecta: $510 - 86 = 424$

Añadimos la nota correcta: $424 + 68 = 492$

Y volvemos a calcular la media: $\frac{492}{6} = 82$

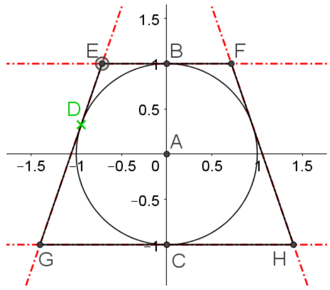
20 ggb

Determinad las medidas del trapecio isósceles de área mínima circunscrito a una circunferencia de radio 1 m.

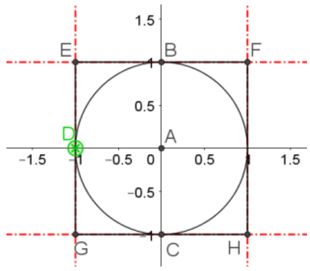
21

Solución con geogebra:

Empezaremos por dibujar la circunferencia de radio 1 y centro en el origen de coordenadas A.
Hallamos los puntos de intersección de esta con el eje de ordenadas (B y C).
Trazamos las rectas tangentes a la circunferencia por estos dos puntos para tener las bases del trapecio.



Con punto en objeto introducimos el punto D. Trazamos la recta tangente por este punto a la circunferencia. La intersección con las dos rectas anteriores nos da los puntos E y G.
Por simetría respecto al eje de ordenadas trazamos la recta por F y H.
Dibujamos el trapecio con polígono por E, F G y H.
Movemos D hasta encontrar el área mínima.
Corresponde a un cuadrado de lado 2 m.



22* **23**

Un caracol sube por una pared vertical de 10 metros de altura. Durante el día sube 3 metros, pero durante la noche se queda dormido y resbala 2 metros hacia abajo. ¿En cuántos días conseguirá subir la pared?

Solución:

Si tenemos en cuenta que el primer día sube 3 metros pero baja 2, quiere decir que sólo ha subido 1 metro. El segundo día pasa lo mismo y ya ha subido 2 metros entre los dos días. El tercer día sube 3 metros y vuelve a resbalar, así que durante los siete primeros días ha ido subiendo un metro por día una vez que se ha escurrido por la noche, pero el octavo día, al subir los 3 metros consigue llegar a la parte superior de la pared.

Necesitará ocho días.

25*** **26**

Sean los números de dos cifras $\overline{a4}$ y $\overline{b(a+1)}$.

Si el MCD ($\overline{a4}, \overline{b(a+1)}$) = 18, calcular a +b.

Solución:

$18=3^2\cdot 2 \rightarrow \overline{a4}$ y $\overline{b(a+1)}$ son múltiplos de 2 y de 9.

$\overline{a4} = \dot{9} \rightarrow$ (criterio divisibilidad del 9): $a+4=9 \rightarrow a=5$

O bien $a+4=18 \rightarrow a=14$ (no válido porque a es un dígito).

Y, por la misma razón, $a+4 \neq 27$ y sucesivamente. Por tanto, $a=5 \rightarrow \overline{a4}=54$

$\overline{b(a+1)} = \overline{b6} = \dot{9} \rightarrow b+6=9 \rightarrow b=3$ o bien $b+6=18 \rightarrow$ b=12 (no válido).

Por tanto, $\overline{b(a+1)}=36$

Comprobación:

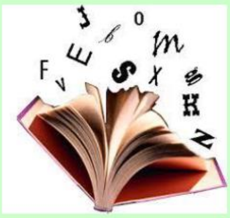
MCD $(54,36)=\text{MCD}(3^3 \cdot 2, 3^2 \cdot 2^2)=3^2 \cdot 2=18$

a+b=5+3= **8**

27*

¿Cuántos diccionarios hay que editar para que se puedan efectuar directamente traducciones entre cualquiera de los 5 idiomas: español, ruso, inglés, francés y alemán?
(Un único diccionario relaciona dos idiomas: ruso-francés equivale a francés-ruso).

28



Solución:

Si elegimos uno de los idiomas, por ejemplo el español, habrá cuatro diccionarios:

Español-ruso

Español-inglés

Español-francés

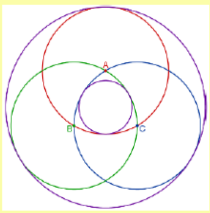
Español-alemán

Como esto lo haremos con los cinco idiomas, en total tendríamos 5·4=20 diccionarios, pero cada diccionario lo habríamos contado dos veces, así que el número total de diccionarios será 20:2=10.

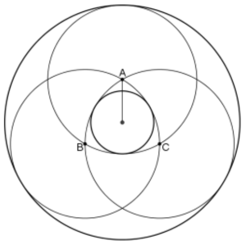
29**

Sean A, B y C tres puntos equidistantes. Con centro en cada uno de ellos, trazamos una circunferencia que pasa por los otros. Si d(A,B)=d(A,C)=d(B,C)=1, calcula el radio de las circunferencias interior y exterior, tangentes a las tres anteriores.

30



Solución:



El centro de las circunferencias está a la misma distancia de los tres puntos, por lo que coincide con el circuncentro del triángulo ABC.

La distancia del centro al circuncentro es 2/3 de la longitud de la altura.

$$h^2+\left(\frac{1}{2}\right)^2=1^2 \quad\rightarrow\quad h^2+\frac{1}{4}=1 \quad\rightarrow\quad h^2=\frac{3}{4} \quad\rightarrow\quad h=\sqrt{\frac{3}{4}}=\frac{\sqrt{3}}{2}\ cm$$

$$d=\frac{2}{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\cong 0{,}58\ cm$$

El radio de la circunferencia exterior es: $R=1+\frac{\sqrt{3}}{3}\cong 1{,}58\ cm.$

El radio de la circunferencia interior es igual al diámetro de las tres circunferencias iniciales menos el radio de la circunferencia exterior:

$$r=2-\left(1+\frac{\sqrt{3}}{3}\right)=1-\frac{\sqrt{3}}{3}\cong 0{,}42\ cm.$$