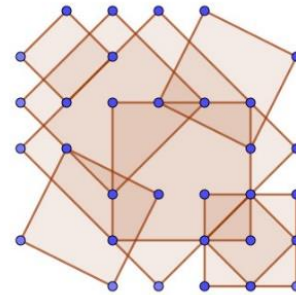


SOLUCIONS ABRIL 2024

1*

Dibuixa la quantitat més gran possible de quadrats que tinguin els vèrtexs en aquests punts. Un mateix punt no pot ser vèrtex de dos quadrats diferents, encara que sí que pot estar sobre el costat d'un quadrat i ser vèrtex d'un altre.

2



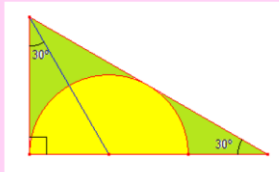
Solució:

Huit és la quantitat màxima possible, ja que la trama té 32 punts i cap d'ells pot ser vèrtex de més d'un quadrat ($32:4 = 8$).

3***

La figura està formada per un triangle rectangle i una semicircumferència. Calculeu la proporció entre l'àrea verda i l'àrea groga.

4



Solució:

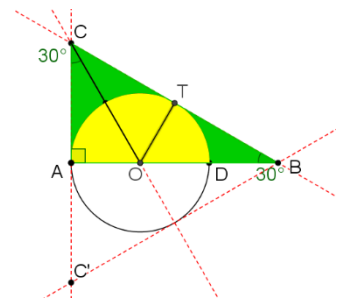
Es compleix $\overline{OA} = \overline{OT} = \overline{OD} = r$

Com que és una circumferència inscrita en un triangle equilàter, el centre és a $1/3$ de la base, d'on:

$$\overline{OB} = 2r$$

En el triangle AOC es compleix $\operatorname{tg} 30^\circ = \frac{\overline{OA}}{\overline{AC}} \rightarrow \overline{AC} = r\sqrt{3}$

$$\frac{\text{verd}}{\text{grog}} = \frac{\frac{1}{2} \cdot 3r \cdot r\sqrt{3} - \frac{1}{2} \pi \cdot r^2}{\frac{1}{2} \pi \cdot r^2} = \frac{3\sqrt{3} - \pi}{\pi} \approx 0.6540$$



5****6**

Tres nombres a , b i c estan en raó 4:14:21.

Si el $\text{MCM}(a, b, c) = 71148$, calcula el $\text{MCD}(a, b, c)$.



Solució:

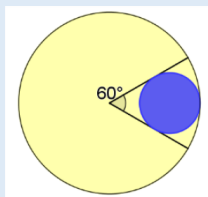
Els nombres tindran la forma: $4x$, $14x$ y $21x \rightarrow \text{MCM}(2^2x, 2 \cdot 7x, 3 \cdot 7x) = 2^2 \cdot 7 \cdot 3x = 84x$

$$84x = 71148 \rightarrow x = \frac{71148}{84} = 847 = 7 \cdot 11^2 \rightarrow$$

Els nombres són : $2^2 \cdot 7 \cdot 11^2$, $2 \cdot 7^2 \cdot 11^2$ y $3 \cdot 7 \cdot 11^2 \rightarrow \text{MCD} = 7 \cdot 11^2 = 847$

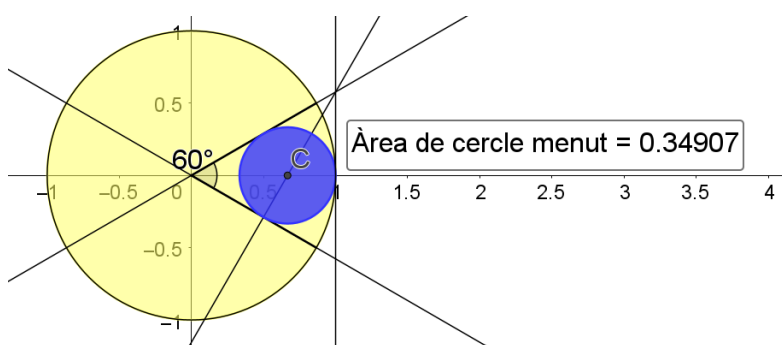
8 ggb**9**

Calculeu l'àrea del cercle menut sabent que l'àrea del cercle gran és de πm^2 .



Solució amb geogebra:

Per calcular l'àrea del cercle menut cal tindre present que està inscrit en un triangle equilàter tal com es veu al dibuix:



Si l'àrea del cercle gran és πm^2 , el radi mesura 1 m.

1. Dibuixem la circumferència centrada a l'origen amb radi 1.
2. Amb angle donada la seva amplitud dibuixem (30°) per sobre de l'eix d'abscisses un dels radis i per simetria l'altre.

3. Trobem el punt d'intersecció de la circumferència amb l'eix d'abscisses i, en aquest mateix punt, la recta tangent a la circumferència. Amb ella tindrem limitat el triangle equilàter.
4. Per trobar el centre de la circumferència inscrita al triangle, necessitem dues de les bisectrius dels angles. Una coincideix amb l'eix d'abscisses, l'altra la calculem amb bisectriu. Trobem el centre de la circumferència amb la intersecció de les dues bisectrius.
5. Tracem la circumferència menuda amb centre en aquest punt i passant pel punt on hem traçat la tangent a la circumferència gran.
6. Amb l'eina àrea calculem la del cercle menut, que és de $0,34907 m^2$.

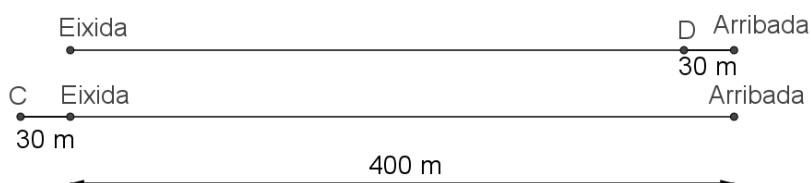
10**

Carles i Daniel competeixen en una carrera de 400 m. Quan Carles arriba a la meta, a Daniel li falten 30 m. L'endemà, Carles decideix eixir 30 m enrere del punt d'eixida. Si tots dos corren a la mateixa velocitat que el dia anterior, com acabarà la carrera?

11



Solució:



El primer dia Carlos recorre 400 m a una velocitat vc .

En el mateix temps, Daniel recorre $400 - 30 = 370$ m a una velocitat vd .

Com $t = \frac{e}{v}$, i els dos temps coincideixen, podem plantejar l'equació:

$$t = \frac{e}{v} \rightarrow t_{Carlos} = \frac{400}{vc} = \frac{370}{vd} = t_{Daniel} \rightarrow vd = \frac{370}{400} \cdot vc = 0,925 \cdot vc$$

El segon dia, Carlos intenta recórrer $400 + 30 = 430$ m a la mateixa velocitat que el dia anterior (vc). De la mateixa manera, Daniel recorre 400 m a la mateixa velocitat del primer dia (vd), i intenta guanyar a Carlos.

Si plantegem l'equació amb les dades del segon dia per calcular què recorre cadascun:

$$e_{Carlos} = 430 = t \cdot vc \rightarrow t = \frac{430}{vc}$$

$$e_{Daniel} = t \cdot vd = \frac{430}{vc} \cdot 0,925 \cdot vc = 397,75 m$$

De manera que el segon dia, amb el mateix temps, Daniel no arriba a recórrer la distància de 400 m, mentre que Carlos recorre els 430 m, per la qual cosa Carlos serà una altra vegada el guanyador.

Una altra forma de raonar-ho:

Del que ha passat el primer dia sabem que, quan Carlos recorre 400 m, Daniel recorre 370 m. En la carrera del segon dia, quan Carles haja recorregut 400 m, Daniel haurà recorregut 370 m i tots dos es trobaran a 30 m de la meta. Com que Carlos és més veloç que Daniel, Carlos recorrerà els 30 m restants en menys temps i serà una altra vegada el guanyador.

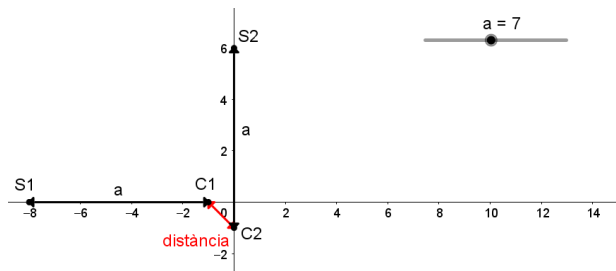
12 ggb

Dos automòbils van a la mateixa velocitat sobre dues carreteres que són perpendiculars i en sentit de trobada. Un d'ells és a 6 km de la intersecció de les dues carreteres i l'altre a 8 km. Quina serà la mínima distància entre els dos automòbils?

13



Solució amb geogebra:

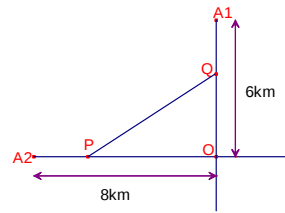


Dos automòbils que van a la mateixa velocitat recorren el mateix espai en el mateix temps.

Sigueu a l'espai que recorren els dos automòbils en cert temps.

1. Col·loquem les dues eixides, una al punt $S1(-8,0)$ i l'altra en $S2(0,6)$.
2. Introduïm un botó lliscador de nombre entre 0 i 15 amb increment 0.01. Representarà la distància recorreguda pels dos cotxes en un moment determinat.
3. Una vegada recorreguts a quilòmetres, el primer cotxe es trobarà a $C1(-8 + a, 0)$ i el segon a $C2(0, 6 - a)$. Introduïm els dos punts a la barra d'entrada.
4. Tracem el segment que uneix $C1$ amb $C2$. La seua longitud ens indicarà la distància entre els dos vehicles.
5. Movem el botó lliscador fins obtenir la distància mínima. S'obté amb $a=7$, i és la distància 1.41421.

Solució analítica:



Dos automòbils que van a la mateixa velocitat recorren el mateix espai en el mateix temps.

Siga $x = \overline{A_1Q} = \overline{A_2P}$ l'espai que recorren els dos automòbils en un cert temps.

$$\overline{OQ} = 6 - x, \quad \overline{OP} = 8 - x.$$

La distància entre els dos automòbils és:

$$\overline{PQ} = \sqrt{(6 - x)^2 + (8 - x)^2}.$$

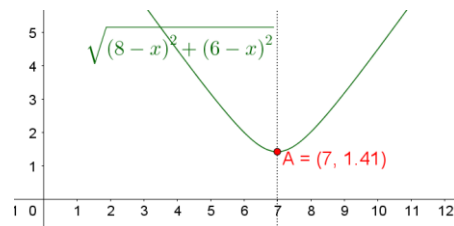
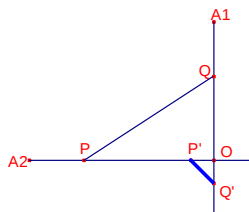
$$\text{Simplificant: } \overline{PQ} = \sqrt{2x^2 - 28x + 100}.$$

Considerem la funció $f(x) = 2x^2 - 28x + 100$.

La distància mínima entre els dos automòbils s'aconsegueix en el valor mínim de la funció $f(x) = 2x^2 - 28x + 100$.

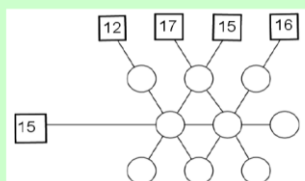
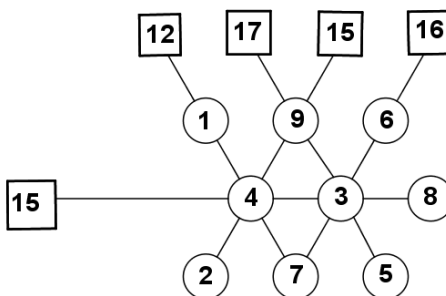
La funció es una paràbola còncaua. El mínim s'aconsegueix en el vèrtex: $x = \frac{28}{2 \cdot 2} = 7$.

La distància mínima és $\overline{PQ}_{\min} = \sqrt{(6 - 7)^2 + (8 - 7)^2} = \sqrt{2} \approx 1.41 \text{ km}$.



17*

Col·loca els nombres de l'1 al 9, sense repetir-ne cap, en els cercles en blanc, de manera que la suma de tres nombres que estan connectats en línia recta siga igual al nombre que s'indica en el requadre de la mateixa línia.

18**Solució:****19*****

Si x, y, z són nombres diferents i les ternes (x, y, z) i (x^3, y^3, z^3) formen progressions aritmètiques, calcula el valor del nombre y .

20**Solució:**

Com x, y, z estan en progressió aritmètica, deduïm que $y - x = z - y$.

De la mateixa manera, $y^3 - x^3 = z^3 - y^3$.

Si factoritzem les diferències de cubs obtenim:

$$y^3 - x^3 = (y - x)(y^2 + xy + x^2) = (z - y)(z^2 + yz + y^2) = z^3 - y^3$$

Com $y - x = z - y$, podem simplificar, i obtenim:

$$\begin{aligned} y^2 + xy + x^2 &= z^2 + yz + y^2 \rightarrow xy + x^2 = z^2 + yz \rightarrow \\ \rightarrow x^2 - z^2 &= yz - xy \rightarrow (x + z)(x - z) = -y(x - z) \rightarrow y = -(x + z) \end{aligned}$$

Per ser x, y, z una progressió aritmètica, el terme central és la mitjana dels altres dos: $y = \frac{x+z}{2}$.

De les dues igualtats deduïm que $\frac{x+z}{2} = -(x + z) \rightarrow x + z = 0 \rightarrow y = 0$

22*

23

Cinc amics estan asseguts al voltant d'una taula redona. El de cognom García està entre López i Martínez. Juan està entre Álex i Pérez. López entre Juan i Pedro. Daniel té Gómez a la seva esquerra i Martínez a la dreta. Quin és el cognom de Juan?



Solució:

La informació que tenim és:

1	López	García	Martínez
2	Álex	Juan	Pérez
3	Juan	López	Pedro
4	Martínez (a la dreta)	Daniel	Gómez (a l'esquerra)

Comencem per col·locar la informació 4.

Després la informació 1.

La següent és la 3.

Per fi la 2.

Per la qual cosa el cognom de Juan és

Gómez.



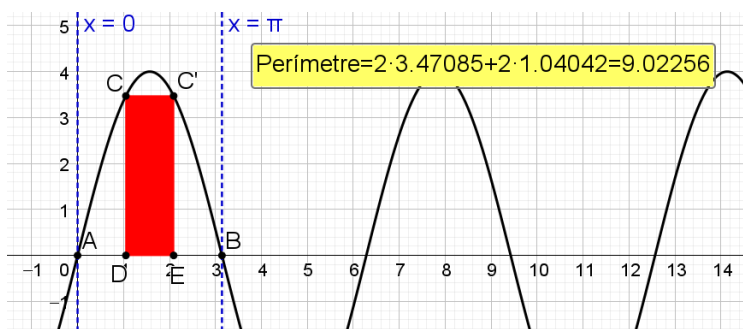
24 ggb

25

En el pla cartesià considerem els punts $A(0,0)$, $B(\pi,0)$. Siga la regió plana limitada pel segment $\overline{AB}$ i l'arc de corba de la funció $y = 4 \sin x$, amb $0 \leq x \leq \pi$. Calcula el màxim perímetre del rectangle inscrit en la regió tal que un costat estiga contingut en el segment $\overline{AB}$.



Solució amb geogebra:



1. Introduïm a la barra d'entrada la funció $y = 4 \sin x$.

2. Trobem amb intersecció entre la funció i l'eix d'abscisses els punts A i B.
3. Introduïm el punt C sobre la branca esquerra de la funció entre A i B.
4. Mitjançant perpendiculars i interseccions, trobem els punts C', D i E.
5. Tracem el rectangle que els uneix.
6. Cadascun dels segments que el formen té una longitud que podem veure en la vista algebraica.
7. Introduïm a la barra d'entrada un nombre que anomenarem perímetre, i que és la resultant de sumar els quatre segments.
8. Movem el punt C fins obtenir el valor mínim per al perímetre. Obtenim 9.02256.

Solució analítica:

La corba $y = 4 \sin x$ és simètrica respecte de la recta $x = \frac{\pi}{2}$

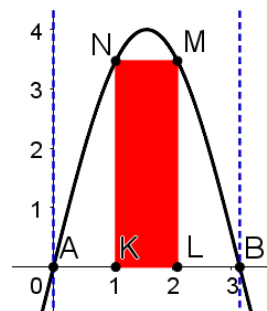
Siga KLMN el rectangle inscrit en la regió.

Per la simetria de la funció, $\overline{AK} = \overline{LB} = x$

$$\overline{KN} = 4 \sin x$$

El perímetre del rectangle és:

$$P(x) = 2(\pi - 2x) + 8 \sin x, \quad x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$$



Derivem la funció i igualem a 0:

$$P'(x) = -4 + 8 \cos x = 0 \rightarrow \cos x = \frac{1}{2}$$

$$x = \arccos \frac{1}{2} = \frac{\pi}{3}$$

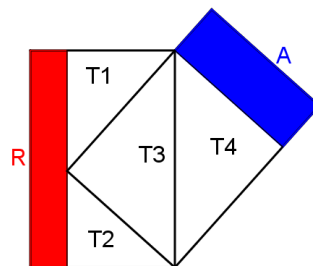
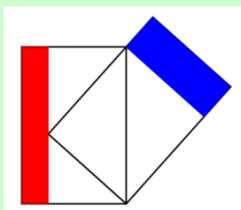
El perímetre màxim s'obté quan $x = \frac{\pi}{3}$

El perímetre màxim és, aproximadament: $P_{\max} = 2 \left(\pi - 2 \cdot \frac{\pi}{3} \right) + 8 \cos \frac{\pi}{3} \cong 9.0226$

26*

Sabent que els dos rectangles grans són iguals (el de la part blava s'ha obtingut rotant sobre un vèrtex el de la part roja), quina és la relació entre les àrees dels rectangles roig i blau?

27



Solució:

Si anomenem els diferents trossos en què queda descompost cada rectangle com es veu al dibuix, sabem que les àrees compleixen:

$$R + T1 + T2 + T3 = A + T3 + T4$$

També es compleix que $T3 = T4$ i que $T3 = T1 + T2$. Si substituïm en la primera igualtat, obtindrem:

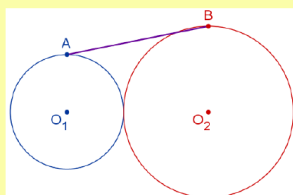
$$R + T3 + T3 = A + T3 + T3 \rightarrow R = A.$$

És a dir, el rectangle blau i el roig ocupen la mateixa superfície, les àrees són iguals.

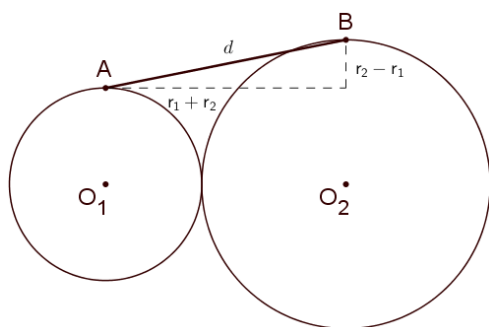
29**

Les dues circumferències de la imatge són tangents, amb radis diferents r_1 i r_2 . Es tracen radis perpendiculars a la recta que uneix els centres, que tallen cadascuna de les circumferències en els punts A i B. Calcula la distància entre aquests dos punts.

30



Solució:



Es construeix el triangle de la figura i es calcula amb el teorema de Pitàgores.

$$d^2 = (r_1 + r_2)^2 + (r_2 - r_1)^2$$

$$d^2 = r_1^2 + 2r_1r_2 + r_2^2 + r_2^2 - 2r_1r_2 + r_1^2 = 2r_1^2 + 2r_2^2$$

$$d = \sqrt{2r_1^2 + 2r_2^2}$$