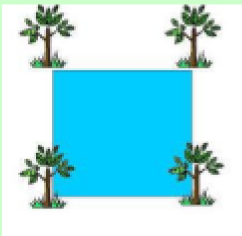
SOLUCIONES MAYO 2024

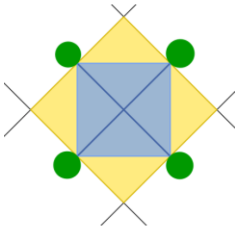
1* **2**

Tengo una piscina cuadrada con un árbol en cada esquina. Quiero que tenga el doble de superficie y siga siendo cuadrada, pero no quiero quitar los árboles.
¿Se te ocurre cómo hacerlo?



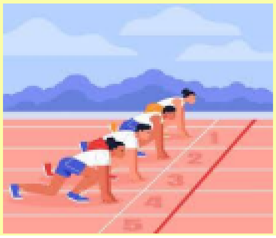
Solución:

Trazamos las dos diagonales de la piscina y después las perpendiculares a las mismas por los cuatro vértices de la piscina. Los puntos de intersección de estas rectas son los vértices de la nueva piscina.



3** **4**

En el polideportivo de mi pueblo hay una pista de atletismo con seis calles. Cada calle tiene una anchura de 1,22 m, y están separadas por una línea de 5 cm. Si corro por el centro de la calle 1 (la más interior), una vuelta son 400 m. ¿Cuánto recorreré por el centro de la 6?



Solución:

En una pista de atletismo hay dos tramos rectos de la misma longitud en todas las calles y dos tramos curvos, que si unimos forman una circunferencia. Aquí es donde está la diferencia de longitud del recorrido por una u otra calle, que dependerá del radio de cada calle.

Llamamos R al radio de la calle 1. Cada calle que nos alejemos de la 1, el radio aumentará en 1,22 m del ancho de la calle y 5 cm de la línea de separación entre las calles, es decir, 1,27 m.

Para ir de la calle 1 a la 6, debemos desplazarnos 5 calles, es decir, el radio cuando corra por la calle 6 será R+5·1,27 m.

Llamaremos r a la longitud de los dos tramos rectos, que coincide en todas las calles.

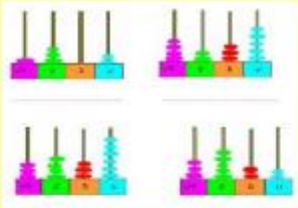
La longitud de la calle 6 será:

$$L_6 = \mathrm{r} + 2\pi \cdot (\mathrm{R} + 5 \cdot 1{,}27) = \mathrm{r} + 2\pi\mathrm{R} + 2\pi \cdot 5 \cdot 1{,}27 =$$

$$= L_1 + 12{,}7\pi = 400 + 12{,}7\pi \cong 439{,}898\ m$$

6** 7

¿Cuál es la probabilidad de que al elegir un número al azar entre 1000 y 9999, el producto de sus cifras sea múltiplo de 3?



Solución:

Para que el producto de varias cifras sea múltiplo de 3 es necesario que al menos una de las cifras lo sea. Las únicas que lo cumplen son el 3, el 6 y el 9.

Es más fácil calcular la probabilidad de que el producto NO sea múltiplo de 3, ya que bastaría con no usar uno de estos tres números.

Formamos números de cuatro cifras sin poder usar 3, 6, 9. Además, en la posición de las unidades de millar no podremos poner el 0, ya que el número no sería de cuatro cifras.

Tendríamos 6 opciones para las unidades de millar (1, 2, 4, 5, 7, 8) y 7 para el resto (0, 1, 2, 4, 5, 7, 8).

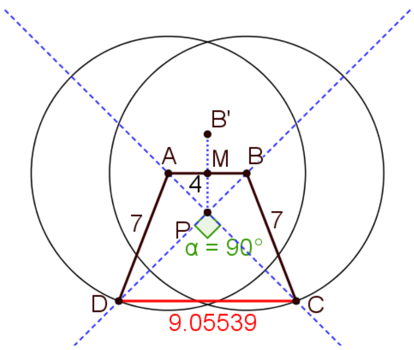
$$P(sea\ múltiplo\ de\ 3) = 1 - P(no\ sea\ múltiplo\ de\ 3) = 1 - \frac{6 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7}{9000} = \frac{1157}{1500} \cong 0{,}77$$

8 ggb 9

En un trapecio isósceles ABCD, con AB la base menor y CD la mayor, conocemos que AB=4 cm, AD=7 cm y que las dos diagonales, AC y BD son perpendiculares. Calcula la longitud de la base mayor CD.

Solución con geogebra:

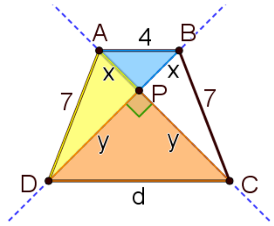
Empezaremos por dibujar el segmento AB con una longitud de 4 unidades.
Si llamamos P al punto de corte de las dos diagonales, al ser ambas perpendiculares, podemos asegurar que ABP es un triángulo rectángulo isósceles con ángulo recto en P.
Para poder colocar P en su sitio, hallamos el punto medio M del segmento AB y después rotamos 90° el segmento AB sobre M. Ya tenemos P.



Trazamos las rectas por A y por B que pasen
por P.
Sobre ellas estarán los puntos C y D a una distancia de 7 unidades de A y B.
Dibujamos dos circunferencias centradas en A y B con radio 7. Con la intersección con las rectas tenemos C y D.
Ya podemos dibujar el trapecio y medir la base. Obtenemos que la distancia entre C y D es aproximadamente de 9.05539 unidades.

Solución analítica:

Sea P el punto de corte de las dos diagonales.
Llamamos $x = d(A,P) = d(B,P)$ y $y = d(P,C) = d(P,D)$ y $d = d(C,D)$.
Al ser perpendiculares las dos diagonales, tenemos tres triángulos rectángulos distintos: el APD, el PCD y el ABP.
Aplicamos el teorema de Pitágoras:

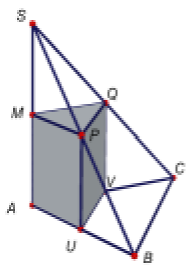


$$\begin{cases} x^2 + x^2 = 16 \;\rightarrow\; x^2 = 8 \\ x^2 + y^2 = 49 \;\rightarrow\; y^2 = 41 \\ y^2 + y^2 = d^2 \end{cases}$$

$$41 + 41 = d^2 \quad \rightarrow \quad d = \sqrt{82} \cong 9.05539$$

10*** **11**

En el tetraedro SABC, la arista AS es perpendicular a la base. La base es un triángulo isósceles con $\hat{A} = 90°$. Sea M un punto variable de la arista. Por el punto M trazamos un plano paralelo a la base. Sean x=$\overline{AM}$, a=$\overline{AS}$ y b=$\overline{AB}$. Determina el valor de x para el que es máximo el volumen del prisma MPQAUV.



Solución:

Sea $\overline{AM} = x$.

El segmento $\overline{MP}$ es paralelo al segmento $\overline{AB}$.

Los triángulos SAB y SMP son semejantes. Aplicando el teorema de Tales:

$$\frac{a-x}{a} = \frac{\overline{MP}}{b} \quad \rightarrow \quad \overline{MP} = \frac{b}{a}(a-x).$$

El volumen del prisma MPQAUV es:

$V(x) = \frac{1}{2}\overline{MP}^2 \cdot x = \frac{1}{2}\left(\frac{b}{a}(a-x)\right)^2 \cdot x = \frac{1}{2} \cdot \frac{b^2}{a^2}(x^3 - 2ax^2 + a^2x)$ con $x \in [0, a]$.

Derivamos la función:

$$V'(x) = \frac{b^2}{2a^2}(3x^2 - 4ax + a^2)$$

Al igualar a cero la derivada obtenemos la ecuación $3x^2 - 4ax + a^2 = 0$ cuyas soluciones son $x_1 = a \quad y \quad x_2 = \frac{a}{3}$.

Calculamos la segunda derivada para ver cuál corresponde al máximo:

$$V''(x) = \frac{b^2}{2a^2}(6x - 4a)$$

$$V''(a) = \frac{b^2}{2a^2}(6a - 4a) > 0 \quad \rightarrow \quad en\ x = a\ hay\ un\ mínimo.$$

$$V''\left(\frac{a}{3}\right) = \frac{b^2}{2a^2}\left(6\frac{a}{3} - 4a\right) < 0 \quad \rightarrow \quad en\ x = \frac{a}{3}\ obtenemos\ el\ máximo\ buscado.$$

El volumen será:

$V(x) = \frac{1}{2} \cdot \frac{b^2}{a^2}\left(x^3 - 2a\left(\frac{a}{3}\right)^2 + a^2\frac{a}{3}\right) = \frac{2ab^2}{27} \quad u^3$

13*

Sabiendo que el número de cinco cifras 887ab es múltiplo de 101, calcula a^2+b^2.

14

Solución:

Como 887ab debe ser múltiplo de 101, debemos buscar un múltiplo de 101 que tenga cinco cifras y empiece por 887.

Para tener una idea del tamaño del número, dividimos 88799:101≅879,198.

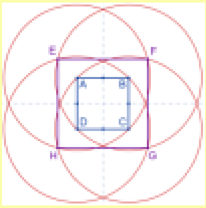
Si multiplicamos 879·101=88779 es el número que buscamos, ya que 878·101=88678 es demasiado pequeño y 880·101=88880 demasiado grande.

Por lo tanto, a=7 y b=9.

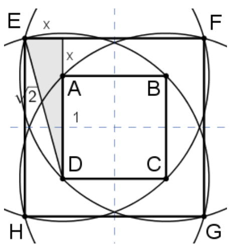
Entonces $a^2 + b^2 = 7^2 + 9^2 = 130$.

15** 16

Sean A, B, C y D los vértices de un cuadrado. Con centro en cada vértice, se traza una circunferencia que pasa por el vértice opuesto.
Si el lado del cuadrado ABCD mide 1 cm, calcula el área del cuadrado EFGH.



Solución:



La diagonal de un cuadrado de 1 cm de lado mide $\sqrt{2}$ cm.

Aplicando el teorema de Pitágoras al triángulo rectángulo:

$$(1+x)^2 + x^2 = \sqrt{2}^2 \quad \rightarrow \quad 1+2x+x^2+x^2 = 2 \quad \rightarrow \quad 2x^2+2x-1=0$$

Resolviendo esta ecuación de segundo grado:

$$x = \frac{-2 \pm \sqrt{4+8}}{4} = \frac{-2 \pm \sqrt{12}}{4} = \frac{-2 \pm 2\sqrt{3}}{4} = \frac{-1 \pm \sqrt{3}}{2} \quad \rightarrow \quad x = \frac{\sqrt{3}-1}{2}$$

El lado del cuadrado EFGH mide: $l = \frac{\sqrt{3}-1}{2} + 1 + \frac{\sqrt{3}-1}{2} = \sqrt{3}\ cm$

El área del cuadrado EFGH es igual a: $A = \sqrt{3}^2 = 3\ cm^2$

17* 18

He acompañado a mis alumnos en autobús a Cantabria. En Torrelavega se han quedado la mitad más uno. En Laredo, la mitad de los que quedan más uno. Los últimos 5 se han quedado en Reinosa. ¿Cuántos alumnos son?

Solución:

Vamos a ir calculando a partir del último dato:

Salida	Llegan	Se quedan	Salen
Torrelavega	26	26:2+1=14	12
Laredo	12	12:2+1=7	5
Reinosa	5	5	

Solución:

Sabemos que se cumple para cualquier valor de x :

$$f(1-x)+2f(x)=3(1-x)^2$$

Como no podemos despejar $f(x)$, vamos a hacer un cambio de variable: donde pone x, pondremos $1-x$, con lo que obtendremos:

$$f\big(1-(1-x)\big)+2f(1-x)=3\big(1-(1-x)\big)^2 \quad \rightarrow \quad f(x)+2f(1-x)=3x^2$$

Si multiplicamos la primera igualdad por 2 y restamos:

$$\begin{cases} 2f(1-x)+4f(x)=6(1-x)^2 \\ \quad f(x)+2f(1-x)=3x^2 \end{cases} \rightarrow \;\; 3f(x)=6(1-x)^2-3x^2 \quad \rightarrow$$

$$\rightarrow \;\; f(x)=2(1-x)^2-x^2 \quad \rightarrow \quad f(x)=2(1-2x+x^2)-x^2=x^2-4x+2$$

La única función que lo cumple es $\;f(x)=x^2-4x+2$.

Solución:

Sabemos que Ana tomó 1 pastel, Berta 2, Carla 3 y Dana 4. En total, entre las cuatro tomaron 10 pasteles.

Entre los cuatro hombres deben haber tomado los 22 que faltan.

También sabemos que Eloy tomó los mismos que su esposa, Fran el doble, Gil el triple y Héctor el cuádruple. Vamos a ver en una tabla lo que tomaría cada uno según cuál sea su pareja. Entre los cuatro debemos conseguir los 22 pasteles.

	Ana 1	Berta 2	Carla 3	Dana 4
Eloy x1	1	2	3	4
Fran x2	2	4	6	8
Gil x3	3	6	9	12
Héctor x4	4	8	12	16

Con lo que las parejas serán:

Eloy y Carla

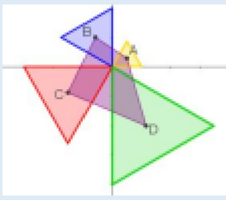
Fran y Dana

Gil y Ana

Héctor y Berta.

24 ggb **25**

Tenemos cuatro triángulos equiláteros con un lado en cada uno de los ejes y de longitudes 1, 2, 3 y 4 cm respectivamente. Se construye el trapezoide ABCD uniendo los baricentros de dichos triángulos. Calcula su área.



Solución con geogebra:

Dibujamos los triángulos equiláteros y hallamos el baricentro de cada uno (con punto medio o centro).

Unimos los cuatro baricentros y formamos el trapecio.

Su área es de 4 cm^2.

Solución analítica:

La longitud de la mediana, que coincide con la altura, del triángulo de 1 cm de lado es:

$$h_1^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 = 1^2 \quad \rightarrow \quad h_1^2 + \frac{1}{4} = 1 \quad \rightarrow \quad h_1^2 = \frac{3}{4} \quad \rightarrow \quad h_1 = \sqrt{\frac{3}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2}\,cm$$

La distancia de este baricentro al origen de coordenadas es 2/3 de la longitud de la mediana:

$$l_1 = \frac{2}{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{3}\,cm$$

Como todos los triángulos equiláteros son semejantes, la distancia de cada baricentro al origen de coordenadas, O, es:

$$l_2 = 2\cdot\frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{2\sqrt{3}}{3}\,cm \qquad l_3 = 3\cdot\frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{3\sqrt{3}}{3} = \sqrt{3}\,cm \qquad l_4 = 4\cdot\frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{4\sqrt{3}}{3}\,cm$$

Los puntos A, O y C están alineados. También los puntos B, O y D.

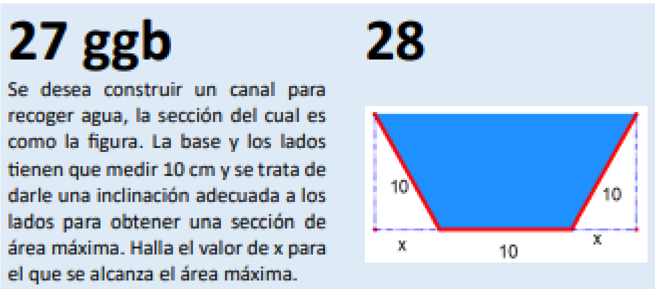
Las diagonales del trapezoide miden:

$$d_1 = d(A,O) + d(C,O) = \frac{\sqrt{3}}{3} + \frac{3\sqrt{3}}{3} = \frac{4\sqrt{3}}{3}\,cm$$

$$d_2 = d(B,O) + d(D,O) = \frac{2\sqrt{3}}{3} + \frac{4\sqrt{3}}{3} = \frac{6\sqrt{3}}{3} = 2\sqrt{3}\,cm$$

El área del cuadrilátero se puede calcular como la suma de las áreas de los cuatro triángulos rectángulos, como suma de áreas de dos triángulos con base una de las diagonales, o también, por ser las diagonales perpendiculares, como:

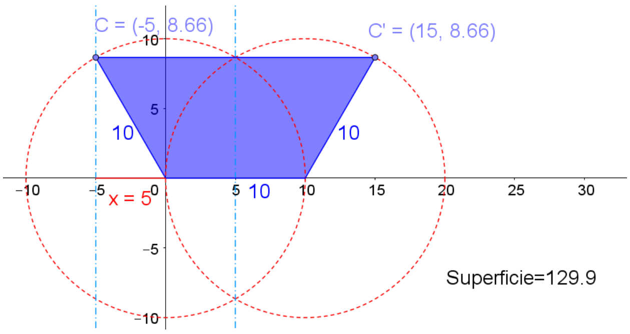
$$A = \frac{d_1\cdot d_2}{2} = \frac{1}{2}\cdot\frac{4\sqrt{3}}{3}\cdot\frac{6\sqrt{3}}{3} = \frac{24\cdot 3}{18} = 4\,cm^2$$


27 ggb

28

Se desea construir un canal para recoger agua, la sección del cual es como la figura. La base y los lados tienen que medir 10 cm y se trata de darle una inclinación adecuada a los lados para obtener una sección de área máxima. Halla el valor de x para el que se alcanza el área máxima.

Solución con geogebra:



Dibujamos el segmento de la base con longitud 10.

Para colocar los laterales que también deben medir 10, dibujamos una circunferencia de centro cada uno de los extremos del segmento de la base y radio 10.

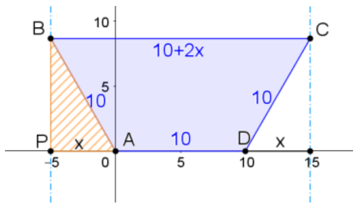
Colocamos un punto C sobre una de las circunferencias y por simetría obtenemos el de la otra, con lo que tenemos los cuatro vértices del trapecio y podemos dibujarlo.

Movemos el punto C hasta obtener el área máxima, que se obtiene con C en (-5, 8.66).

El área será de 129,9 cm^2.

Solución analítica:

Aplicando el teorema de Pitágoras al triángulo rectángulo $\overset{\Delta}{APB}$,la altura del canal es:
$\overline{BP} = \sqrt{100 - x^2}, \quad x \in [0, 10]$



La figura es un trapecio isósceles.

El área es:

$$S_{ABCD} = \frac{\overline{BC} + \overline{AD}}{2}\overline{BP}$$

$$S(x) = \frac{20 + 2x}{2}\sqrt{100 - x^2}, \quad x \in [0, 10]$$

$$S(x) = (10 + x)\sqrt{100 - x^2}$$

$$S(x) = \sqrt{(10 + x)^2(100 - x^2)}$$

$$S(x) = \sqrt{-x^4 - 20x^3 + 2000x + 10000}$$

El máximo de la función área se obtiene en el máximo de la función:

$f(x) = -x^4 - 20x^3 + 2000x + 10000$ con $x \in [0, 10]$

$f'(x) = -4x^3 - 60x^2 + 2000$

Resolvemos la ecuación $f'(x) = 0$ y obtenemos que la única solución real es $x = 5\ cm$

$f"(x) = -12x - 120x$

$f"(5) < 0 \ \rightarrow$ hay un máximo relativo.

Vemos que valores alcanza f(x) en los extremos del intervalo de definición:

$f(0) = 10000, \ \ f(10) = 0$

$f(5) = 16875$

Con lo que podemos afirmar que el máximo se obtiene cuando x=5.

El área máxima es $S = \sqrt{f(5)} = \sqrt{16875} = 75\sqrt{3} \approx 129.90\ cm^2$.

29**

Tenemos un terreno rectangular de 3600 m por 800 m de lados, el cual se quiere dividir en parcelas cuadradas todas de igual área y lado número entero. Si queremos hacer entre 6000 y 10 000 parcelas, calcula el lado de cada parcela.

30

Solución:

Método 1:

Si las parcelas deben ser cuadradas, su lado debe ser divisor de 800 y de 3600.

Hallamos MCD(800, 3600)=400.

El lado de los cuadrados debe ser divisor de $400=2^4 \cdot 5^2$.

Las opciones son: 1, 2, 4, 5, 8, 10, 16, 20, 25, 40, 50, 80, 100, 200, 400 .

Calculamos en cada caso el número de parcelas que obtendríamos del terreno que ocupa en total 800·3600=2 880 000 m^2.

Lado parcela (en m)	Superficie parcela (en m^2)	Número de parcelas obtenidas (2 880 000/superficie parcela)
1	1	2 880 000
2	4	720 000
4	16	180 000
5	25	115 200
8	64	45 000
10	100	28 800
16	256	11 250
20	400	7 200
25	625	4 608

No hace falta seguir, ya que al aumentar el tamaño de las parcelas, disminuirá el número de estas. Debemos hacer parcelas cuadradas de 20 m de lado y obtendremos 7 200 parcelas.

Método 2:

Llamamos c a la longitud del lado de una de las parcelas.

Número de parcelas : $6000 < \frac{3600 \cdot 800}{c^2} < 10000 \;\rightarrow\; 6 < \frac{2880}{c^2} < 10 \;\rightarrow$

$\rightarrow\; 10^{-1} < \frac{c^2}{2880} < 6^{-1} \;\rightarrow\; \frac{2880}{10} < c^2 < \frac{2880}{6} \;\rightarrow\; 288 < c^2 < 480$

Y como c debe ser positivo, $16{,}97 < c < 21{,}9$

Además el lado debe ser un divisor común de los lados y por tanto divisor del MCD:

MCD(800;3600)=400 $\rightarrow$ **c= 20 m**

31*

En la imagen puedes ver las 28 fichas de un dominó formando un rectángulo, pero faltan las líneas que las delimitan.
¿Puedes reconstruir las fichas?

3	6	2	0	0	4	4
6	5	5	1	5	2	3
6	1	1	5	0	6	3
2	2	2	0	0	1	0
2	1	1	4	3	5	5
4	3	6	4	4	2	2
4	5	0	5	3	3	4
1	6	3	0	1	6	6

Solución:

8	3	6	2	0	0	4	4
7	6	5	5	1	5	2	3
6	6	1	1	5	0	6	3
5	2	2	2	0	0	1	0
4	2	1	1	4	3	5	5
3	4	3	6	4	4	2	2
2	4	5	0	5	3	3	4
1	1	6	3	0	1	6	6
	1	2	3	4	5	6	7

Si observamos los números, es evidente que cualquier ficha tiene más de una opción sobre dónde está colocada. Hay que observar más cosas.

Vamos a usar los números con las casillas en blanco para indicar la posición de un número concreto. Por ejemplo, el 3 que aparece arriba está en la posición (1,8).

Primeros pasos:

1. El 3 de la posición (1,8) debe ser parte de la ficha 3/6, por lo que los demás casos en que el 3 y el 6 estén juntos, cada uno será de una ficha distinta y podemos marcar que están separados.
2. El 3 de la posición (3,1) es parte de la ficha 3/0. Separamos el resto de 3-0 (Cada vez que fijemos una ficha, después separaremos todas las opciones restantes en que esos dos números están juntos).

3. El 3 doble ocupa las posiciones (7,6) y (7,7).
4. El 4 doble está sobre el (6,8) y el (7,8).
5. La ficha 3/2 está en (6,2) y (6,3).
6. El 4/0 en (4,4) y (4,5).
7. El 4 de (5,3) sólo puede ser del 4/3.
8. El 4 de (1,3) sólo puede ser del 4/2.