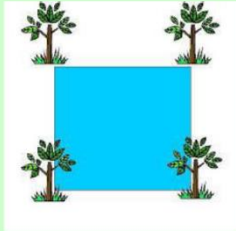


## SOLUCIONS MAIG 2024

**1\***

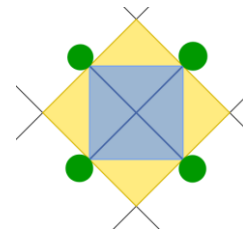
Tinc una piscina quadrada amb un arbre a cada cantó. Vull que tinga el doble de superfície i que segueixca sent quadrada, però no vull llevar els arbres.  
Se t'acudeix com fer-ho?

**2**



**Solució:**

Tracem les dues diagonals de la piscina i després les perpendiculars a les mateixes pels quatre vèrtexs de la piscina. Els punts d'intersecció d'aquestes rectes són els vèrtexs de la nova piscina.



**3\*\***

Al poliesportiu del meu poble hi ha una pista d'atletisme amb sis carrers. Cada carrer té una amplada de 1,22 m, i està separada per una línia de 5 cm. Si córrer pel centre del carrer 1 (el més interior), una volta són 400 m. Quant recorreré pel centre de la 6?

**4**



**Solució:**

En una pista d'atletisme hi ha dos trams rectes de la mateixa longitud a tots els carrers i dos trams corbs, que si unim formen una circumferència. Ací és on hi ha la diferència de longitud del recorregut per un o altre carrer, que dependrà del radi de cada carrer.

Anomenem  $R$  al radi del carrer 1. Cada carrer que ens allunyem de l'1, el radi augmentarà en 1,22 m de l'amplada del carrer i 5 cm de la línia de separació entre els carrers, és a dir, 1,27 m.

Per anar del carrer 1 al 6, hem de desplaçar-nos 5 carrers, és a dir, el radi quan corra pel carrer 6 serà  $R + 5 \cdot 1,27$  m.

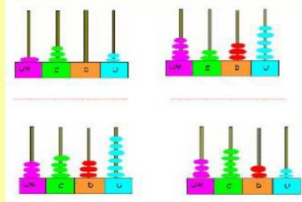
Anomenarem  $r$  a la longitud dels dos trams rectes, que coincideix en tots els carrers.

La longitud del carrer 6 serà:

$$\begin{aligned} L_6 &= r + 2\pi \cdot (R + 5 \cdot 1,27) = r + 2\pi R + 2\pi \cdot 5 \cdot 1,27 = \\ &= L_1 + 12,7\pi = 400 + 12,7\pi \approx 439,898 \text{ m} \end{aligned}$$

**6\*\*****7**

Quina és la probabilitat que en triar un número a l'atzar entre 1 000 i 9 999, el producte de les xifres siga múltiple de 3?

**Solució:**

Perquè el producte de diverses xifres siga múltiple de 3 cal que almenys una de les xifres ho siga. Les úniques que ho compleixen són el 3, el 6 i el 9.

És més fàcil calcular la probabilitat que el producte NO siga múltiple de 3, ja que hi hauria prou amb no fer servir un d'aquests tres números.

Formem números de quatre xifres sense utilitzar 3, 6, 9. A més, en la posició de les unitats de miler no podrem posar el 0, ja que el nombre no seria de quatre xifres.

Tindríem 6 opcions per a les unitats de miler (1, 2, 4, 5, 7, 8) i 7 per a la resta (0, 1, 2, 4, 5, 7, 8).

$$P(\text{ siga múltiple de 3}) = 1 - P(\text{ no siga múltiple de 3}) = 1 - \frac{6 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7}{9000} = \frac{1157}{1500} \cong 0,77$$

**8 ggb****9**

En un trapezi isòsceles ABCD, amb AB la base menor i CD la major, coneixem que AB=4 cm, AD=7 cm i que les dues diagonals, AC i BD, són perpendiculars. Calcula la longitud de la base major CD.

**Solució amb geogebra:**

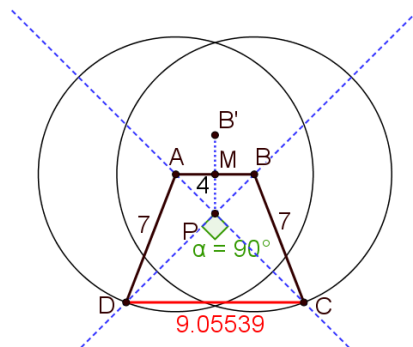
Començarem per dibuixar el segment AB amb una longitud de 4 unitats.

Si anomenem P al punt de tall de les dues diagonals, com que són perpendiculars, podem assegurar que ABP és un triangle rectangle isòsceles amb angle recte en P.

Per poder col·locar P en el seu lloc, trobem el punt mitjà M del segment AB i després rotem 90° el segment AB sobre M. Ja tenim P.

Tracem les rectes per A i per B que passen per P.

Sobre aquestes rectes estaran els punts C i D, a una distància de 7 unitats d'A i de B.



Dibuixem dues circumferències centrades en A i B amb radi 7. Amb la intersecció amb les rectes tenim C i D.

Ja podem dibuixar el trapezi i mesurar la base. Obtenim que la distància entre C i D és aproximadament de 9.05539 unitats.

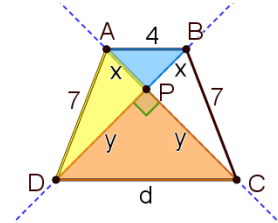
### Solució analítica:

Siga P el punt de tall de les dues diagonals.

Anomenem  $x = d(A, P) = d(B, P)$  i  $y = d(P, C) = d(P, D)$  i  $d = d(C, D)$ .

Com que les dues diagonals són perpendiculars, tenim tres triangles rectangles diferents: l'APD, el PCD i l'ABP.

Apliquem el teorema de Pitàgores:



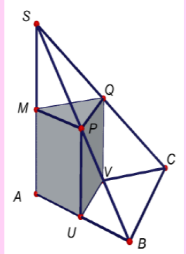
$$\begin{cases} x^2 + x^2 = 16 \rightarrow x^2 = 8 \\ x^2 + y^2 = 49 \rightarrow y^2 = 41 \\ y^2 + y^2 = d^2 \end{cases}$$

$$41 + 41 = d^2 \rightarrow d = \sqrt{82} \cong 9.05539$$

**10\*\*\***

**11**

En el tetraedre SABC, l'aresta AS és perpendicular a la base. La base és un triangle isòsceles amb  $\widehat{A} = 90^\circ$ . Siga M un punt variable de l'aresta. Pel punt M tracem un pla paral·lel a la base. Siguen  $x = \overline{AM}$ ,  $a = \overline{AS}$  i  $b = \overline{AB}$ . Determina el valor de x per al qual és màxim el volum del prisma MPQAUV.



### Solució:

Siga  $\overline{AM} = x$ .

El segment  $\overline{MP}$  és paral·lel al segment  $\overline{AB}$ .

Els triangles SAB i SMP són semblants. Aplicant el teorema de Tales:

$$\frac{a-x}{a} = \frac{\overline{MP}}{b} \rightarrow \overline{MP} = \frac{b}{a}(a-x).$$

El volum del prisma MPQAUV és:

$$V(x) = \frac{1}{2} \overline{MP}^2 \cdot x = \frac{1}{2} \left( \frac{b}{a}(a-x) \right)^2 \cdot x = \frac{1}{2} \cdot \frac{b^2}{a^2} (x^3 - 2ax^2 + a^2x) \quad \text{amb } x \in [0, a].$$

Derivem la funció:

$$V'(x) = \frac{b^2}{2a^2}(3x^2 - 4ax + a^2)$$

En igualar a zero la derivada obtenim l'equació  $3x^2 - 4ax + a^2 = 0$ , les solucions de la qual són  $x_1 = a$  i  $x_2 = \frac{a}{3}$ .

Calculem la segona derivada per a veure quin correspon al màxim:

$$V''(x) = \frac{b^2}{2a^2}(6x - 4a)$$

$$V''(a) = \frac{b^2}{2a^2}(6a - 4a) > 0 \rightarrow \text{en } x = a \text{ hi ha un mínim.}$$

$$V''\left(\frac{a}{3}\right) = \frac{b^2}{2a^2}\left(6\frac{a}{3} - 4a\right) < 0 \rightarrow \text{en } x = \frac{a}{3} \text{ obtenim el màxim que buscàvem.}$$

El volum serà:

$$V(x) = \frac{1}{2} \cdot \frac{b^2}{a^2} \left( x^3 - 2a \left( \frac{a}{3} \right)^2 + a^2 \frac{a}{3} \right) = \frac{2ab^2}{27} u^3$$

**13\***

Sabent que el nombre de cinc xifres  $887ab$  és múltiple de 101, calcula  $a^2 + b^2$ .

**14**



**Solució:**

Com  $887ab$  ha de ser múltiple de 101, hem de buscar un múltiple de 101 que tinga cinc xifres i que comence per 887.

Per tindre una idea de la mesura del número, dividim  $88799:101 \cong 879,198$ .

Si multipliquem  $879 \cdot 101 = 88779$ , és el número que busquem, ja que  $878 \cdot 101 = 88678$  és massa menut i  $880 \cdot 101 = 88880$  massa gran.

Per tant,  $a=7$  i  $b=9$ .

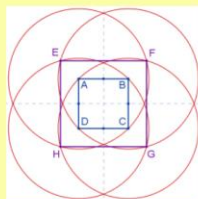
Aleshores  $a^2 + b^2 = 7^2 + 9^2 = 130$ .

15\*\*

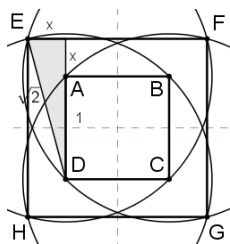
16

Siguen A, B, C i D els vèrtexs d'un quadrat. Amb centre a cada vèrtex, es traça una circumferència que passa pel vèrtex oposat.

Si el costat del quadrat ABCD mesura 1 cm, calcula l'àrea del quadrat EFGH.



**Solució:**



La diagonal d'un quadrat de 1 cm de costat mesura  $\sqrt{2}$  cm.

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle:

$$(1+x)^2 + x^2 = \sqrt{2}^2 \rightarrow 1 + 2x + x^2 + x^2 = 2 \rightarrow 2x^2 + 2x - 1 = 0$$

Resolent aquesta equació de segon grau:

$$x = \frac{-2 \pm \sqrt{4+8}}{4} = \frac{-2 \pm \sqrt{12}}{4} = \frac{-2 \pm 2\sqrt{3}}{4} = \frac{-1 \pm \sqrt{3}}{2} \rightarrow x = \frac{\sqrt{3}-1}{2}$$

El costat del quadrat EFGH mesura:  $l = \frac{\sqrt{3}-1}{2} + 1 + \frac{\sqrt{3}-1}{2} = \sqrt{3}$  cm

L'àrea del quadrat EFGH és igual a:  $A = \sqrt{3}^2 = 3$  cm<sup>2</sup>

17\*

18

He acompanyat els meus alumnes amb autobús a Cantàbria. A Torrelavega se n'han quedat la meitat més un. A Laredo, la meitat dels que en quedaven més un. Els últims 5 s'han quedat a Reinosa. Quants alumnes són?



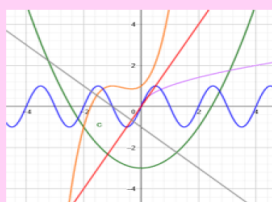
**Solució:**

Anirem calculant a partir de l'última dada:

| Eixida      | Arriben | Es queden   | ixen |
|-------------|---------|-------------|------|
| Torrelavega | 26      | $26:2+1=14$ | 12   |
| Laredo      | 12      | $12:2+1=7$  | 5    |
| Reinosa     | 5       | 5           |      |

## 20\*\*\*

Calcula totes les funcions  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  que compleixen que  $f(1-x) + 2f(x) = 3(1-x)^2$



### Solució:

Sabem que es compleix per a qualsevol valor de  $x$ :

$$f(1-x) + 2f(x) = 3(1-x)^2$$

Com no podem aïllar  $f(x)$ , farem un canvi de variable: on posa  $x$ , posarem  $1-x$ , amb la qual cosa obtindrem:

$$f(1-(1-x)) + 2f(1-x) = 3(1-(1-x))^2 \rightarrow f(x) + 2f(1-x) = 3x^2$$

Si multipliquem la primera igualtat per 2 i restem:

$$\begin{cases} 2f(1-x) + 4f(x) = 6(1-x)^2 \\ f(x) + 2f(1-x) = 3x^2 \end{cases} \rightarrow 3f(x) = 6(1-x)^2 - 3x^2 \rightarrow$$

$$\rightarrow f(x) = 2(1-x)^2 - x^2 \rightarrow f(x) = 2(1-2x+x^2) - x^2 = x^2 - 4x + 2$$

L'única funció que ho compleix és  $f(x) = x^2 - 4x + 2$ .

## 22\*

A una festa van anar 4 parelles i van prendre 32 pastissos en total. Les dones (Ana, Berta, Carla i Dana) van prendre, respectivament, 1, 2, 3 i 4 pastissos. Els homes (Eloy, Fran, Gil i Héctor) van prendre, respectivament, 1, 2, 3 i 4 vegades el que van prendre les seves esposes. Pots formar les parelles?

## 23



### Solució:

Sabem que Ana va prendre 1 pastís, Berta 2, Carla 3 i Dana 4. En total, entre les quatre van prendre 10 pastissos.

Entre els quatre homes han d'haver pres els 22 que falten.

També sabem que Eloy va prendre els mateixos que la seva dona, Fran el doble, Gil el triple i Héctor el quàdruple. Vegem en una taula el que prendria cadascun segons quina siga la seva parella. Entre tots quatre hem d'aconseguir els 22 pastissos.

|           | Ana<br>1 | Berta<br>2 | Carla<br>3 | Dana<br>4 |
|-----------|----------|------------|------------|-----------|
| Eloy x1   | 1        | 2          | 3          | 4         |
| Fran x2   | 2        | 4          | 6          | 8         |
| Gil x3    | 3        | 6          | 9          | 12        |
| Héctor x4 | 4        | 8          | 12         | 16        |

De manera que les parelles seran:

Eloy i Carla

Fran i Dana

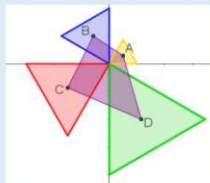
Gil i Ana

Héctor i Berta.

**24 ggb**

Tenim quatre triangles equilàters amb un costat a cadascun dels eixos, i de longituds 1, 2, 3 i 4 cm, respectivament. Es construeix el trapezoide ABCD unint els baricentres d'aquests triangles. Calcula'n l'àrea.

**25**



**Solució amb geogebra:**

Dibuixem els triangles equilàters i trobem el baricentre de cadascú (amb punt mig o centre).

Unim els quatre baricentres i formem el trapezi.

L'àrea és 4 cm<sup>2</sup>.

**Solució analítica:**

La longitud de la mitjana (que coincideix amb l'altura) del triangle d'1 cm de costat és:

$$h_1^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 = 1^2 \rightarrow h_1^2 + \frac{1}{4} = 1 \rightarrow h_1^2 = \frac{3}{4} \rightarrow h_1 = \sqrt{\frac{3}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2} \text{ cm}$$

La distància d'aquest baricentre a l'origen de coordenades és 2/3 de la longitud de la mitjana:

$$l_1 = \frac{2}{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{3} \text{ cm}$$

Com tots els triangles equilàters són semblants, la distància de cada baricentre a l'origen de coordenades, O, és:

$$l_2 = 2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{2\sqrt{3}}{3} \text{ cm} \quad l_3 = 3 \cdot \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{3\sqrt{3}}{3} = \sqrt{3} \text{ cm} \quad l_4 = 4 \cdot \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{4\sqrt{3}}{3} \text{ cm}$$

Els punts A, O i C estan alineats. També els punts B, O i D.

Les diagonals del trapezoide mesuren:

$$d_1 = d(A, O) + d(C, O) = \frac{\sqrt{3}}{3} + \frac{3\sqrt{3}}{3} = \frac{4\sqrt{3}}{3} \text{ cm}$$

$$d_2 = d(B, O) + d(D, O) = \frac{2\sqrt{3}}{3} + \frac{4\sqrt{3}}{3} = \frac{6\sqrt{3}}{3} = 2\sqrt{3} \text{ cm}$$

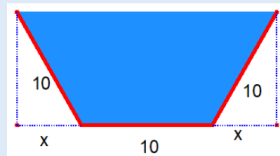
L'àrea del quadrilàter es pot calcular com la suma de les àrees dels quatre triangles rectangles, com a suma de les àrees de dos triangles amb la base una de les diagonals, o també, per ser les diagonals perpendiculars, com:

$$A = \frac{d_1 \cdot d_2}{2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{4\sqrt{3}}{3} \cdot \frac{6\sqrt{3}}{3} = \frac{24 \cdot 3}{18} = 4 \text{ cm}^2$$

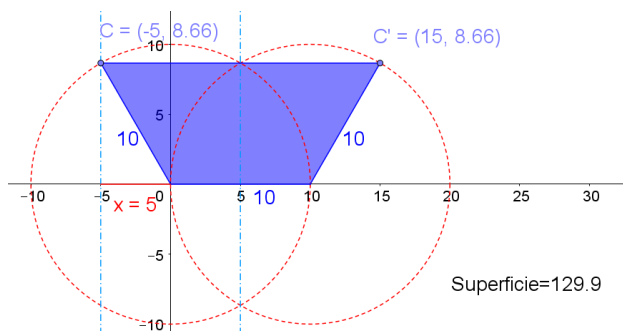
## 27 ggb

Es vol construir un canal per recollir aigua, la secció del qual és com la figura. La base i els costats han de mesurar 10 cm, i es vol donar la inclinació adequada als costats per obtenir una secció d'àrea màxima. Calcula el valor de x per al qual s'aconsegueix l'àrea màxima.

## 28



**Solució amb geogebra:**



Dibuixem el segment de la base amb longitud 10.

Per col·locar els laterals, que també han de mesurar 10, dibuixem una circumferència de centre cadascun dels extrems del segment de la base i radi 10.

Col·loquem un punt C sobre una de les circumferències i per simetria obtenim el de l'altra, de manera que tenim els quatre vèrtexs del trapezi i podem dibuixar-lo.

L'area sarà  $129,9 \text{ cm}^2$ .

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle  $APB$ , l'altura del canal és:

The diagram shows a trapezoid \$ABCD\$ with vertices \$A(0,0)\$, \$B(-5,10)\$, \$C(15,10)\$, and \$D(10,0)\$. The height is 10. The area of \$\triangle ABC\$ is calculated as:

$$\text{Area}(\triangle ABC) = \frac{1}{2} \times \text{base } AB \times \text{height} = \frac{1}{2} \times 10 \times 10 = 50$$

L'àrea és:

$$S(x) = \frac{20 + 2x}{2} \sqrt{100 - x^2}, \quad x \in [0, 10]$$

$$S(x) = (10 + x) \sqrt{100 - x^2}$$

$$S(x) = \sqrt{(10+x)^2(100-x^2)}$$

$$S(x) = \sqrt{-x^4 - 20x^3 + 2000x + 10000}$$

$$f(x) = -x^4 - 20x^3 + 2000x + 10000 \quad \text{con } x \in [0, 10]$$

$$f'(x) = -4x^3 - 60x^2 + 2000$$

$$f''(x) = -12x - 120x$$
$$f''(5) < 0 \rightarrow \text{hi ha un màxim relatiu.}$$
$$f(0) = 10000, \quad f(10) = 0$$

$$f(5) = 16875$$

Amb això podem afirmar que el màxim s'obté quan  $x=5$ .

L'àrea màxima és  $S = \sqrt{f(5)} = \sqrt{16875} = 75\sqrt{3} \approx 129.90 \text{ cm}^2$ .

**29\*\***

Tenim un terreny rectangular de costats 3 600 m i 800 m, i es vol dividir en parcel·les quadrades, totes d'igual àrea i de costat un nombre enter. Si volem fer entre 6 000 i 10 000 parcel·les, calcula el costat de cada parcel·la.

**30****Solució:****Mètode 1:**

Si les parcel·les han de ser quadrades, el costat ha de ser divisor de 800 i de 3600.

Trobem  $\text{MCD}(800, 3600) = 400$ .

El costat dels quadrats ha de ser divisor de  $400 = 2^4 \cdot 5^2$ .

Les opcions són: 1, 2, 4, 5, 8, 10, 16, 20, 25, 40, 50, 80, 100, 200, 400 .

Calculem en cada cas el nombre de parcel·les que obtindríem del terreny que ocupa en total  $800 \cdot 3600 = 2\,880\,000 \text{ m}^2$ .

| Costat parcel·la<br>(en m) | Superfície parcel·la<br>(en m <sup>2</sup> ) | Nombre de parcel·les obtingudes<br>(2 880 000/superfície parcel·la) |
|----------------------------|----------------------------------------------|---------------------------------------------------------------------|
| 1                          | 1                                            | 2 880 000                                                           |
| 2                          | 4                                            | 720 000                                                             |
| 4                          | 16                                           | 180 000                                                             |
| 5                          | 25                                           | 115 200                                                             |
| 8                          | 64                                           | 45 000                                                              |
| 10                         | 100                                          | 28 800                                                              |
| 16                         | 256                                          | 11 250                                                              |
| 20                         | 400                                          | 7 200                                                               |
| 25                         | 625                                          | 4 608                                                               |

No cal seguir, ja que en augmentar la mida de les parcel·les, disminuirà el nombre. Hem de fer parcel·les quadrades de 20 m de costat i obtindrem 7 200 parcel·les.

**Mètode 2:**

Anomenem  $c$  a la longitud del costat d'una de les parcel·les.

$$\text{Nombre de parcel·les: } 6000 < \frac{3600800}{c^2} < 10000 \rightarrow 6 < \frac{2880}{c^2} < 10 \rightarrow$$

$$\rightarrow 10^{-1} < \frac{c^2}{2880} < 6^{-1} \rightarrow \frac{2880}{10} < c^2 < \frac{2880}{6} \rightarrow 288 < c^2 < 480$$

I, com que  $c$  ha de ser positiu:  $16,97 < c < 21,9$

A més el costat ha de ser un divisor comú dels costats i per tant divisor del MCD:

$$\text{MCD}(800;3600)=400 \rightarrow \mathbf{c=20\text{ m}}$$

## 31\*

A la imatge pots veure les 28 fitxes d'un dòmino formant un rectangle, però falten les línies que les delimiten.

Pots reconstruir les fitxes?

|   |   |   |   |   |   |   |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 3 | 6 | 2 | 0 | 0 | 4 | 4 |
| 6 | 5 | 5 | 1 | 5 | 2 | 3 |
| 6 | 1 | 1 | 5 | 0 | 6 | 3 |
| 2 | 2 | 2 | 0 | 0 | 1 | 0 |
| 2 | 1 | 1 | 4 | 3 | 5 | 5 |
| 4 | 3 | 6 | 4 | 4 | 2 | 2 |
| 4 | 5 | 0 | 5 | 3 | 3 | 4 |
| 1 | 6 | 3 | 0 | 1 | 6 | 6 |

### Solució:

|   |   |   |   |   |   |   |   |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 8 | 3 | 6 | 2 | 0 | 0 | 4 | 4 |
| 7 | 6 | 5 | 5 | 1 | 5 | 2 | 3 |
| 6 | 6 | 1 | 1 | 5 | 0 | 6 | 3 |
| 5 | 2 | 2 | 2 | 0 | 0 | 1 | 0 |
| 4 | 2 | 1 | 1 | 4 | 3 | 5 | 5 |
| 3 | 4 | 3 | 6 | 4 | 4 | 2 | 2 |
| 2 | 4 | 5 | 0 | 5 | 3 | 3 | 4 |
| 1 | 1 | 6 | 3 | 0 | 1 | 6 | 6 |
|   | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |

Si observem els números, és evident que qualsevol fitxa té més d'una opció per a ser col·locada. Cal observar més coses.

Farem servir els números amb les caselles en blanc per indicar la posició d'un número concret. Per exemple, el 3 que apareix dalt a l'esquerra està en la posició (1,8).

Primers passos:

1. El 3 de la posició (1,8) ha de ser part de la fitxa 3/6, per la qual cosa els altres casos en què el 3 i el 6 estiguen junts, cadascun serà d'una fitxa diferent i podem marcar que estan separats.
2. El 3 de la posició (3,1) és part de la fitxa 3/0. Separem la resta de 3-0. (Cada vegada que fixem una fitxa, després separarem totes les opcions restants en què aquests dos números estan junts).
3. El 3 doble ocupa les posicions (7,6) i (7,7).
4. El 4 doble està sobre la (6,8) i la (7,8).
5. La fitxa 3/2 està en (6,2) i (6,3).
6. El 4/0 en (4,4) i (4,5).
7. El 4 de (5,3) sols pot ser del 4/3.
8. El 4 de (1,3) sols pot ser del 4/2.

...